高等学校应用型特色规划教材



材料力学

赠送课件

文明才　夏　平　主编

- 面向应用型人才培养
  理论知识与实训内容紧密结合
- 案例导向型的内容设置
  典型案例+实际工作过程+课后习题
- 立体化的教材体系
  免费提供电子课件、习题答案和相关资料

清华大学出版社

高等学校应用型特色规划教材

材 料 力 学

文明才　夏　平　主　编

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是根据“材料力学课程教学基本要求(A 类)”编写的。内容包括绪论、轴向拉伸和压缩、扭转与剪切、弯曲内力、弯曲应力、弯曲变形、应力状态和强度理论、组合变形、压杆稳定、动载荷、交变应力、能量方法及附录。附录中有平面图形的几何性质、型钢表。在各章后按内容顺序安排一定数量的习题，书末附有习题参考答案。本书注重理论与工程实际相结合，在叙述和例题中力求通俗易懂。

本书主要作为高等工科院校应用型本科机械类各专业的材料力学教学用书，也可供其他工科专业师生和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学/文明才，夏平主编. —北京：清华大学出版社，2019
(高等学校应用型特色规划教材)
ISBN 978-7-302-51891-4

Ⅰ. ①材…　Ⅱ. ①文…　②夏…　Ⅲ. ①材料力学—高等学校—教材　Ⅳ. ①TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 294425 号

责任编辑：陈冬梅　桑任松
装帧设计：王红强
责任校对：周剑云
责任印制：李红英
出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：**100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购：**010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn, 010-62791865
印 装 者：三河市君旺印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张：**19　　**字　数：**463 千字
版　　次：2019 年 5 月第 1 版　　**印　次：**2019 年 5 月第 1 次印刷
印　　数：1～1200
定　　价：58.00 元

产品编号：076429-01

前　言

材料力学作为高等工科院校中机械、土建、航空航天类等专业的技术基础课程，已有较经典的教材和课程教学资源。然而，随着许多地方普通高校向应用型高校转型和相关专业人才培养方案的优化，精简了材料力学课时，对教学提出了“实基础、重应用”的要求。这种情形下，很多研究型大学选用的材料力学经典教材已不太适用于应用型本科高校的教学。因此就萌生了编写一本适用于应用型本科院校机械类专业材料力学教材的想法。于是联系同类高校长期从事机械类材料力学教学的教师和清华大学出版社共同编写了本书。

本书在编写内容上保证了全国力学基础课程教学指导分委员会制订的“材料力学课程教学基本要求(A 类)”，实现了应用型大学“实基础”的要求。结合应用型高校学生的特点，在保证教材内容的完整性、严密性的同时，注重在概念、例题、应用等方面与工程实际有机结合，力求实现复杂问题简单化。

全书共 12 章，包括绪论、轴向拉伸和压缩、扭转与剪切、弯曲内力、弯曲应力、弯曲变形、应力状态和强度理论、组合变形、压杆稳定、动载荷、交变应力、能量方法及附录。每章按章节顺序安排了习题，供学生课后练习，并附有习题参考答案。

本书由文明才、夏平担任主编，第 1、2、4、5、7、8 章由文明才编写，第 9～12 章由夏平编写，第 3 章由黄志亮编写，第 6 章由马小林编写。

湖南文理学院吴晓教授担任本书的审稿工作，并提出了许多宝贵的意见和建议，在此表示由衷的感谢。

由于编者水平所限，书中难免存在疏漏和不妥之处，恳请广大教师和读者批评指正，以便加以修正。

编　者

目　录

第 1 章　绪　　论

【本章学习重点】

本章重点学习材料力学的任务及研究对象；学习材料力学的基础知识，如变形固体的基本假设、内力、应力、变形、应变和截面法等。

【本章学习目标】

- 熟知材料力学的研究内容，理解材料力学对工程设计的重要意义。
- 掌握材料力学的基本概念，能够熟练地用截面求解内力。

1.1　材料力学的基本任务

工程中的各类工程结构和机械设备都会受到各种外力的作用，如建筑物的梁受到自重力和楼板的压力，车床主轴受到齿轮啮合力和切削力，这些直接作用力通常称为**载荷**(也称荷载)。组成工程结构和机械设备的各组成部分，如建筑物中的梁和柱、车床中的主轴、活塞式发动机中的连杆等，统称为**构件**。

当工程结构和机械设备承受额定载荷或传递运动时，为保证正常工作，其中的每一个构件应具有足够承受规定载荷的能力。首先要求构件在载荷作用下不发生破坏，如吊车梁因载荷过大而断裂时将导致设备损坏甚至造成安全事故；其次，构件没有破坏的情况下，不一定就能保证工程结构和机械设备的正常工作，如机床主轴变形太大时会影响加工精度且产生振动和噪声，建筑物中的梁变形太大会导致楼板开裂。此外，对于一些受压构件为细长杆或薄壁件时，载荷压力可能使构件变弯而不能保持原有的平衡形态，这种现象称为丧失稳定。失稳构件会使承载能力急剧下降，如建筑工程中的脚手架，如果其中一根杆失稳就会导致坍塌事故。综上所述，构件承受载荷的能力由以下 3 个方面来衡量。

(1)　构件应具有足够的强度。

强度是指构件在载荷作用下抵抗破坏的能力。构件应在额定载荷作用下不会发生破坏(断裂或失效)。

(2)　构件应具有足够的刚度。

刚度是指构件在载荷作用下抵抗变形的能力。构件在额定载荷作用下所产生的变形应不超过工程上所允许的范围。

(3)　构件应具有足够的稳定性。

稳定性是指构件保持其原有平衡状态的能力。对于受压的细长构件，应始终能维持原有的直线平衡形态，保证不会失稳压弯。

工程实际中的构件必须满足强度、刚度和稳定性的基本要求。增大构件载荷尺寸或选用优质材料可以显著提高构件的承载能力。但如果设计不恰当，虽能满足上述基本要求，但会导致构件成本的提高和自重的增加，造成不必要的浪费。材料力学的任务就是在满足

构件强度、刚度和稳定性要求的前提下，为设计既经济又安全的构件，提供必要的理论基础和计算方法。

构件的强度、刚度和稳定性都与所用材料的力学性能有关，这些力学性能需要通过材料试验来测定。在一些假设前提下得出的理论分析结果，也要由试验来验证。此外，工程中还有一些难以用理论分析得出结果的问题，须借助试验方法来解决，因此，试验研究和理论分析在材料力学中同样重要，都是用来解决问题的方法和手段。

1.2　可变形固体及其基本假设

构件一般由固体制成。固体在外力作用下都会或大或小地产生变形，故称其为**可变形固体**。材料力学中的所有构件均视为可变形固体，而不能假设为刚体。

对于可变形固体制成的构件，在进行强度、刚度或稳定性计算时，通常略去一些次要因素，将其抽象为理想化的材料来进行理论分析。

对可变形固体做以下 3 个基本假设。

(1)　连续性假设。

这种假设的含义是认为可变形固体在整体体积内毫无空隙地充满了物质。根据这一假设，受力构件内一些力学量可用坐标的连续函数来表示，也可在构件内任一点截取一个微元体来进行分析。

(2)　均匀性假设。

这种假设的含义是认为可变形固体内各处材料的性质都一样，力学性能也一样。实际中一些构件材料的力学性质在不同部位存在一定的差异，如混凝土构件中不同大小的石子其力学性能就有一定的偏差。通过均匀性假设取均值力学性能，可使力学计算模型大为简化。

(3)　各向同性假设。

这种假设的含义是认为可变形固体内沿各个不同方向都有相同的力学性质。就金属中的单一晶粒而言，在不同方向上其力学性质并不相同，但金属构件内包含着数量较多的晶粒，且各晶粒又是毫无规律地排列的，这样沿各个方向上的力学性质就接近相同了。具有这种属性的材料称为各向同性材料，如钢材、铝材、高分子材料等。

有些材料沿不同方向的力学性能存在明显的差异，称为各向异性材料，如木材、竹材、胶合板等，这类材料应按各向异性来进行计算。

按照连续性、均匀性和各向同性假设的可变形固体称为理想可变形固体。采用理想可变形固体模型可使理论分析和计算得到简化，其计算结果在大多数情况下能满足工程精度的要求。

1.3　外力及其分类

一个受力构件会受到其他物体作用给它的力，这些来自构件外部的力就是外力。外力包括载荷和约束反力。载荷是主动力，约束反力一般由载荷大小求得。

构件上的载荷根据其作用范围可分为分布载荷和集中载荷。分布载荷是作用于整个构件或构件上某一部分的载荷，又可分为体载荷、面载荷和线载荷。体载荷是分布在构件体积内的载荷，如构件的自重、惯性力等；面载荷是分布在构件表面上的载荷，如楼板上的载荷、作用于汽缸(也称气缸)上的气压力等；线载荷是面载荷的一种简化，载荷分布在一个狭长面积上时可视为载荷沿构件中心线分布，如分布在梁上的载荷。分布载荷的大小用载荷集度表示，载荷集度是载荷分布的密集程度。体载荷集度、面载荷集度、线载荷集度的单位分别为 N/m^3、N/m^2、N/m 或 kN/m^3、kN/m^2、kN/m。若分布载荷作用在构件上的面积远小于构件表面积时，可将载荷简化为集中作用于一个点上，这种载荷称为集中载荷，如火车轮对钢轨的压力、吊车中重物通过钢绳对吊臂的拉力等。

按载荷随时间的变化特点，又可分为静载荷和动载荷。静载荷是指缓慢施加到构件上的载荷且保持大小不随时间变化，如构件自重、水对大坝的压力等都属静载荷。若载荷随时间显著地变化，则称为动载荷。如齿轮转动时，作用于每个齿上的力随时间做周期性变化，这种动载荷称为交变载荷；又如锻造时汽锤对连杆的作用力，在接触锻件的瞬间发生突然变化，这种动载荷称为冲击载荷。工程中大部分载荷可视为静载荷，静载荷问题分析计算较为简单，也是分析动载荷问题的基础，材料力学重点研究静载荷问题。

1.4　内力和应力的概念

1.4.1　内力

构件在受外力作用而变形时，其内部各质点之间因相对位置改变而产生的相互作用力就是内力。这样的内力随外力的变化而变化，外力增大，内力也增大，外力去掉后，内力也随之消失。内力达到某一限度时就会使构件破坏，因此内力与构件的强度密切相关。

为了显示和求得构件上某一截面上的内力，一般采用截面法。如图 1.1(a)所示，构件在外力作用下处于平衡状态，欲求 $m—m$ 截面的内力，可用一假想平面沿 $m—m$ 截面截开，分成Ⅰ、Ⅱ两部分(见图 1.1(b))，任取其中一部分(如Ⅰ)作为研究对象。在Ⅰ部分上除作用的外力有 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 外，还有Ⅱ部分作用于Ⅰ部分的内力(沿 $m—m$ 截面连续分布)。Ⅰ部分在上述外力和内力作用下仍处于平衡状态，可由静力平衡方程求取内力。根据连续性假设，在 $m—m$ 截面上各处都有内力作用，所以内力实际上是一个连续分布系，将这一分布内力系向截面上某一点简化合成后可得到一个合力和合力偶，简称内力。

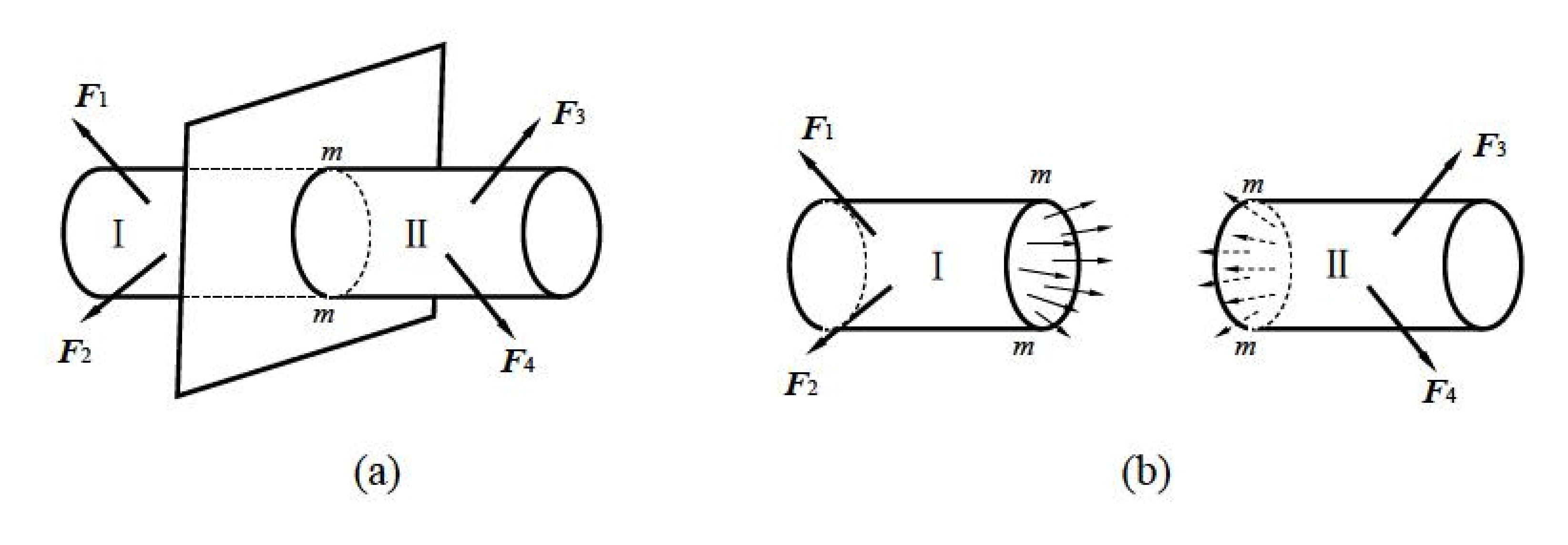


图 1.1

上述用假想平面将构件截成两部分，以显示和确定内力的方法称为**截面法**。截面法可

归纳为以下 3 个步骤。

(1) **截开**：在需要求取内力的截面处，假想地将构件截开为两部分。

(2) **代替**：将两部分中任一部分留下进行受力分析，标出作用在留下部分的所有外力，以作用在截面上的内力代替弃去部分对留下部分的作用。

(3) **平衡**：建立留下部分的受力平衡方程，确定出未知内力。

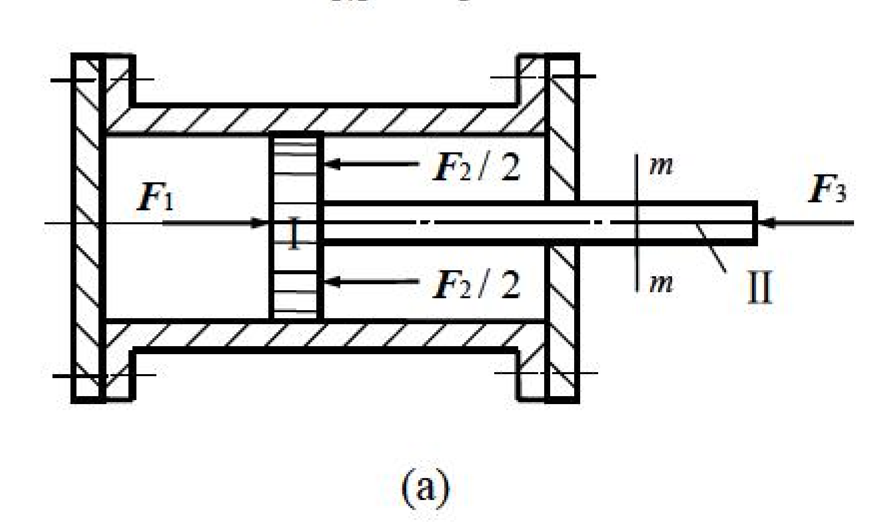
例 1.1 液压油缸的活塞杆在力 F_1、F_2、F_3 的作用下处于平衡状态，如图 1.2(a)所示。试求 m—m 截面上的内力，设 $F_1=80\text{kN}$、$F_2=45\text{kN}$、$F_3=35\text{kN}$。

解：(1) 沿 m—m 截面假想将活塞杆分成两部分，取右端Ⅱ为研究对象。

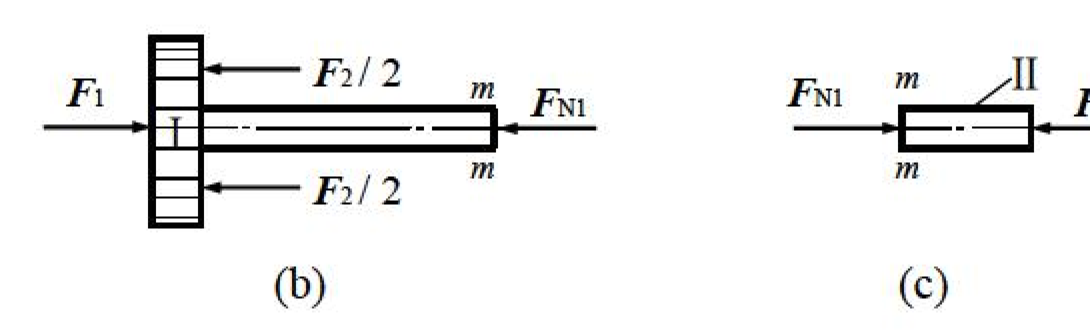
(2) 画出Ⅱ部分的受力图，如图 1.2(c)所示。Ⅱ部分上作用有外力 F_3、内力 F_{N1}。

(3) 列平衡方程求内力。

$$\sum F=0,\quad F_{\text{N1}}-F_3=0$$
$$F_{\text{N1}}=F_3=35\text{kN}$$



(a)



(b) (c)

图 1.2

如取活塞杆左端Ⅰ为研究对象，其受力如图 1.2(b)所示，由平衡方程

$$\sum F=0,\quad F_1-F_2-F_{\text{N1}}=0$$
$$F_{\text{N1}}=F_1-F_2=80-45=35(\text{kN})$$

1.4.2 应力

知道构件上的内力大小还不能判断构件的强度是否足够。例如，有两根材料相同的拉杆，一根较粗，另一根较细，两根拉杆在相同外力作用下内力是相同的。当力增大时，显然细杆会先断裂。因此，要研究构件的强度问题，还必须知道内力在某一点的分布集度，从而引入应力的概念。

应力是受力构件截面上内力在一点处的分布集度。如图 1.3(a)所示，求解受力构件的 m—m 截面上 C 点处的应力 $\boldsymbol{p}$，可围绕 C 点取微面积 ΔA，该微面积上分布的内力合力为 $\Delta\boldsymbol{F}$，则 $\Delta\boldsymbol{F}$ 与 ΔA 的比值称为微面积上的平均应力，用 $\boldsymbol{p}_m$ 表示，为

$$\boldsymbol{p}_m=\frac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta A}$$

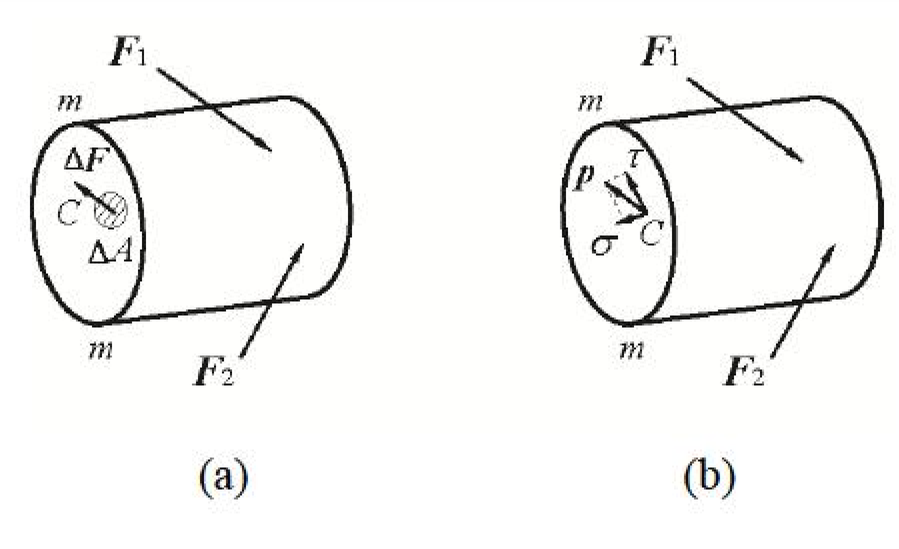


图 1.3

$\boldsymbol{p}_m$ 是一个矢量，其方向与 $\Delta\boldsymbol{F}$ 相同。一般来说，截面 $m—m$ 上的分布内力并不一定均匀。为了计算内力在 C 点处的集度，令微面积 ΔA 趋于零时，其极限值就是 C 点处的应力 $\boldsymbol{p}$，即

$$\boldsymbol{p}=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta\boldsymbol{A}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}$$

C 点处的应力一般情况下既不与截面垂直，也不与截面相切。通常将应力分解为垂直于截面的法向分量 σ 和与截面相切的切向分量 τ (见图 1.3(b))，σ 称为**正应力**，τ 称为**切应力**。

应力的国际标准单位为 Pa，称为帕斯卡，$1\mathrm{Pa}=1\mathrm{N/m^2}$。工程中常使用 MPa，$1\mathrm{MPa}=1\times10^6\mathrm{Pa}$。

1.5　变形与应变

构件是可变形固体，在外力作用下构件会改变原有的形状，称为**变形**。为了研究构件的变形，可将构件看作无数个微小的单元体(简称微元体，通常取正六面体)，构件整体的变形是所有微元体变形累加的结果。

微元体上的变形与作用在其上的应力有关，对于在正应力作用下的微元体(见图 1.4(a))，沿着正应力 σ 方向的棱边长度会伸长，设棱边的原长为 Δx，变形后长度的改变量是 Δu，则其比值 $\varepsilon_{\mathrm{m}}=\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ 为棱边 AB 的平均线应变(也称正应变)。为了精确描述 A 点处沿 x 方向的变形程度，使 Δx 趋近于零，此时 A 点在 x 方向上的线应变为

$$\varepsilon_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

线应变 ε_x 是无量纲的量。

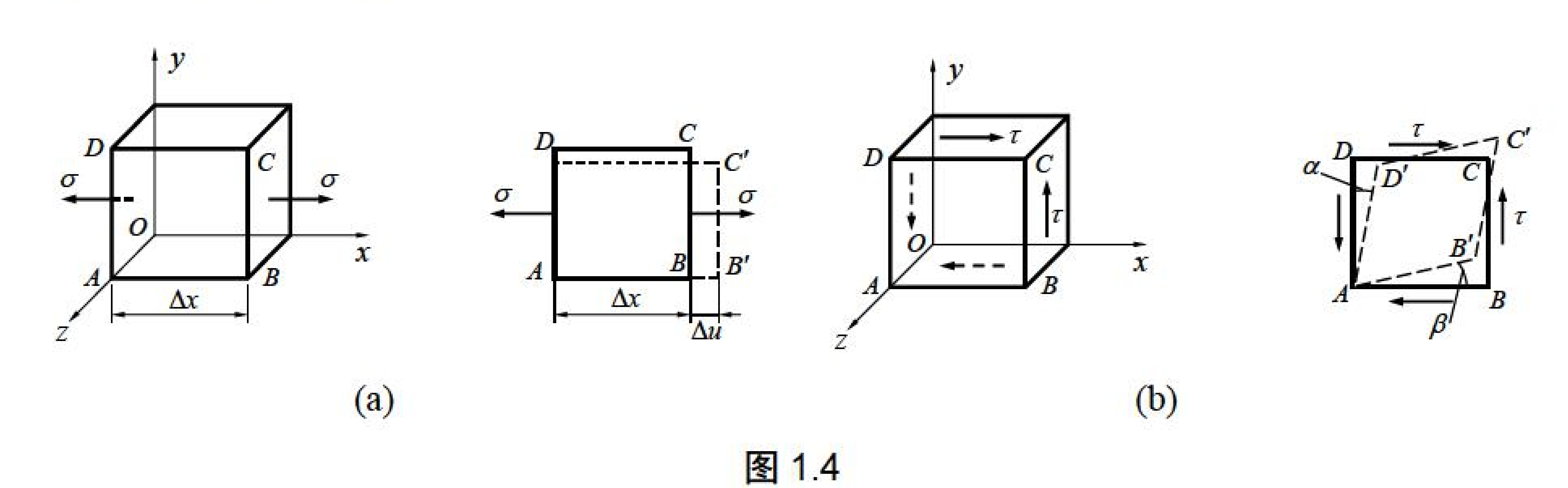


图 1.4

对于在切应力作用下的微元体，棱边 AB 与 AD 所夹的直角会发生改变，如图 1.4(b)所示。微元体直角改变量$\gamma = \alpha + \beta$，称为切应变(或称剪应变)。切应变的单位为 rad。

1.6 材料力学的研究对象及其几何特征

工程中构件的类型主要分为杆、板(壳)、块三大类型。其中杆件是指其长度尺寸远大于横截面尺寸的构件，如工程结构中的梁、柱及机械设备中的轴、连杆等都可抽象为杆件。材料力学所研究的主要构件为杆件。杆件以外的其他结构类型则是弹性力学研究的范畴。

杆件的两个主要几何因素是横截面和轴线。按轴线的形状，杆件分为直杆和曲杆(见图 1.5)；按横截面沿轴线变化情况，杆件分为等截面杆和变截面杆(见图 1.6)。材料力学中所研究的多为等截面直杆。

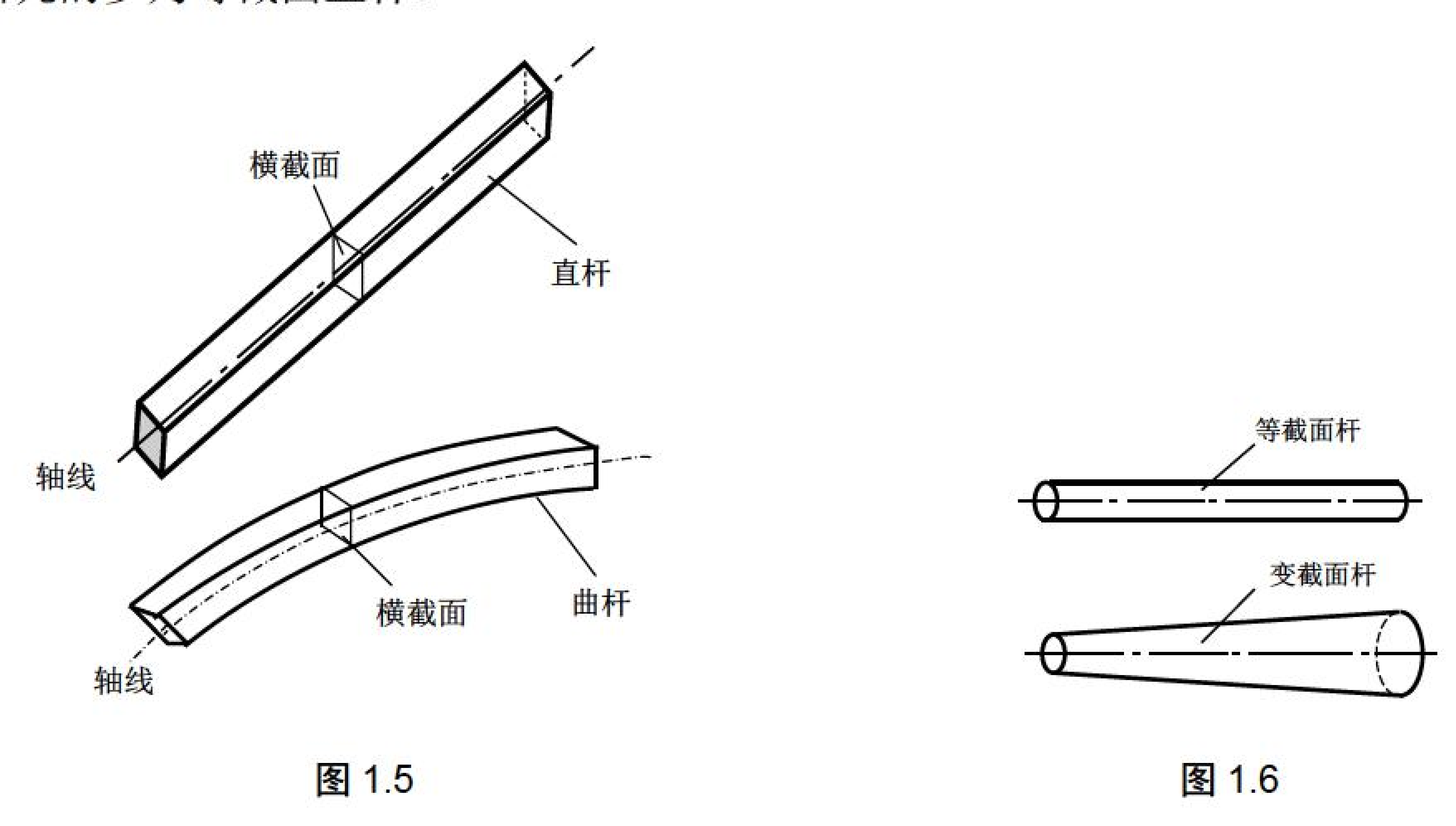


图 1.5　　图 1.6

1.7 杆件变形的基本形式

杆件受力情况有多种多样，相应的变形也有各种形式。究其本质，杆件变形的基本形式可归纳为 4 种，其他变形是基本变形的组合。

1.7.1 轴向拉伸或压缩

当杆件的两端(或其中一段)承受一对大小相等、方向相反，作用线沿轴线方向的作用力时，杆件将产生轴向伸长或缩短。这种变形形式称为轴向拉伸(见图 1.7(a))或轴向压缩(见图 1.7(b))。工程中吊车的油缸活塞杆和钢索、桁架中的杆件都属于此类基本变形。

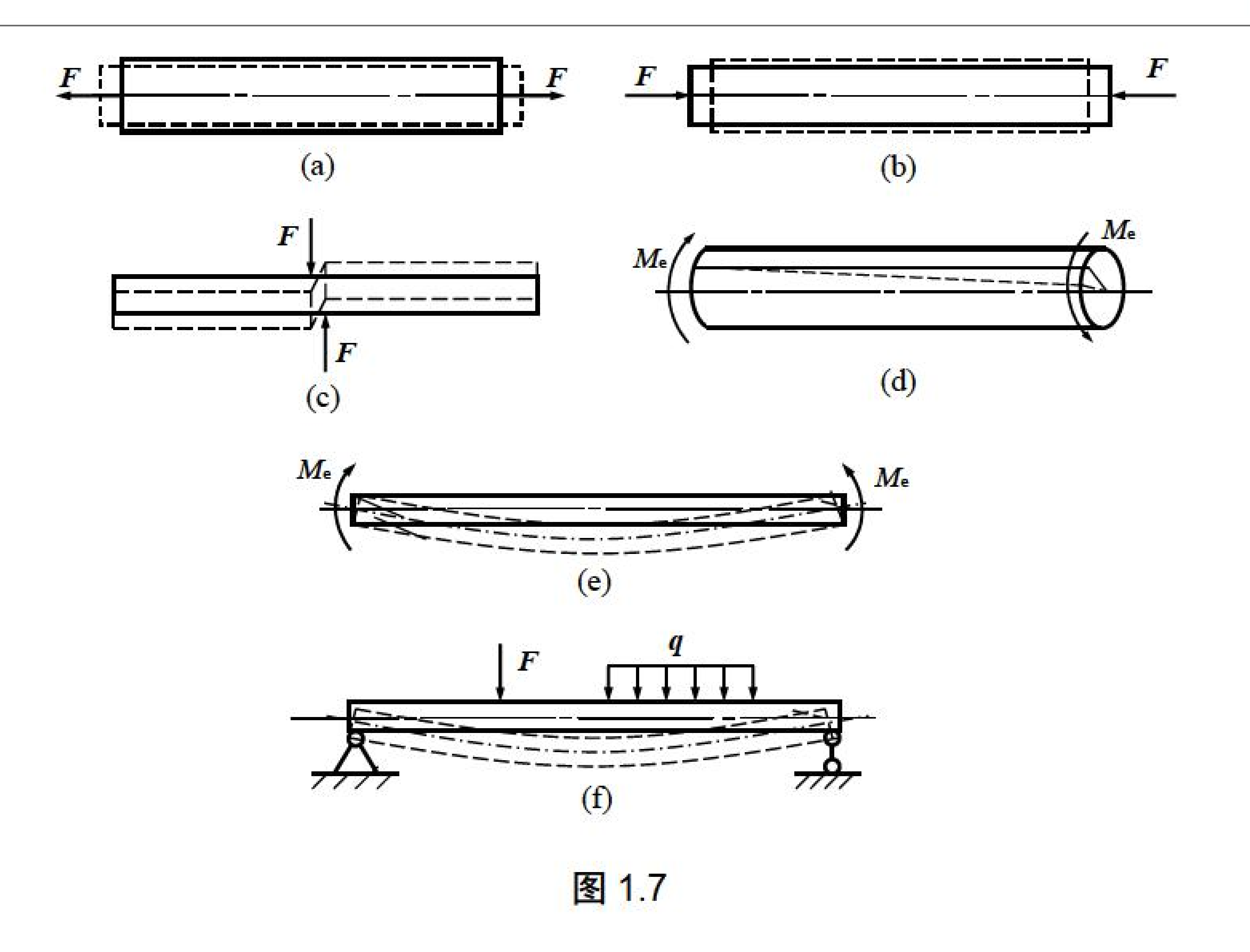


图 1.7

1.7.2　剪切

当杆件横截面附近作用一对大小相等、方向相反、相距很近的一对横向力(力的作用线垂直于杆件轴线)时，杆件的两部分会沿外力作用线方向产生相对错位的变形(见图 1.7(c))，这种变形称为剪切。机械设备中的连接件如键、销钉等在工作状态下会产生剪切变形。

1.7.3　扭转

当杆件的两端(或其中一段)承受一对大小相等、方向相反、作用面垂直于杆件轴线的两个力偶时，杆件的相邻两个横截面将产生绕轴线相对转动的变形(见图 1.7(d))，这种变形形式称为扭转。机械设备中的传动轴主要产生扭转变形。

1.7.4　弯曲

在杆件的纵向对称面内，作用有一对大小相等、转向相反的力偶，或作用有与杆件轴线垂直的横向力时，杆件轴线会由直线变为一条光滑的曲线，这种变形形式称为弯曲(见图 1.7(e)、(f))，如桥式起重机中的大梁、切削工件中的车刀等都产生弯曲变形。

本 章 小 结

材料力学的任务就是在满足强度、刚度和稳定性的要求下，为设计既经济又安全的构件，提供必要的理论基础和设计方法。

外力是指施加在构件上的载荷和支座反力，外力按作用方式分为分布载荷和集中载荷；按载荷随时间的变化特点，又可分为静载荷和动载荷。内力是构件在受外力作用而变形时，其内部各质点之间因相对位置改变而产生的相互作用力，为了显示和求得构件上某

一截面上的内力，一般采用截面法。

应力是受力构件截面上内力在一点处的分布集度，变形是构件在外力作用下构件会改变原有形状的现象。

工程中构件的类型主要分为杆、板(壳)、块三大类型，材料力学主要研究等截面直杆件，杆件变形有轴向拉伸或压缩、剪切、扭转、弯曲四种基本形式。

第 2 章　轴向拉伸和压缩

【本章学习重点】

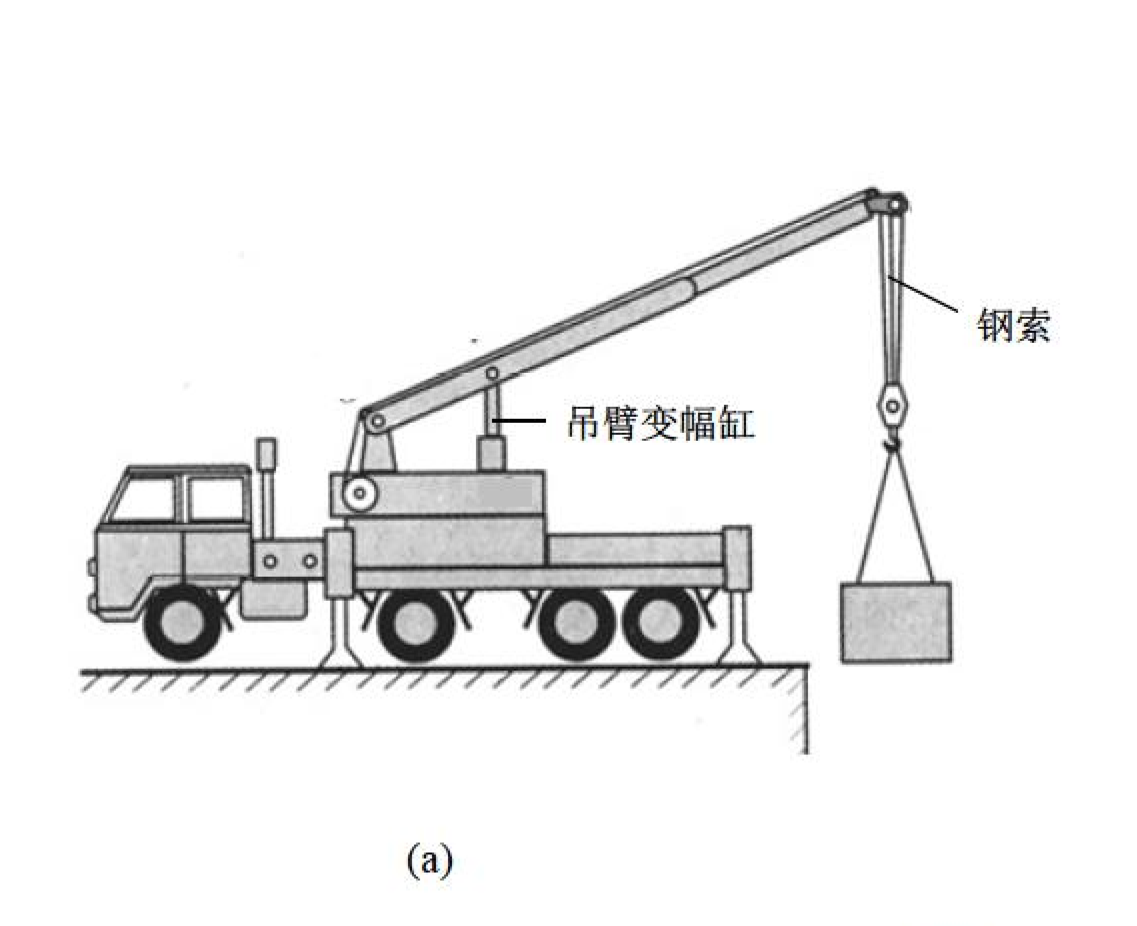
本章重点学习拉伸(压缩)杆件横截面内应力的计算。利用胡克定律计算拉伸(压缩)杆件的变形量。塑性材料和脆性材料在拉伸和压缩时的力学性能。根据拉(压)杆的强度条件，对其进行强度计算。

【本章学习目标】

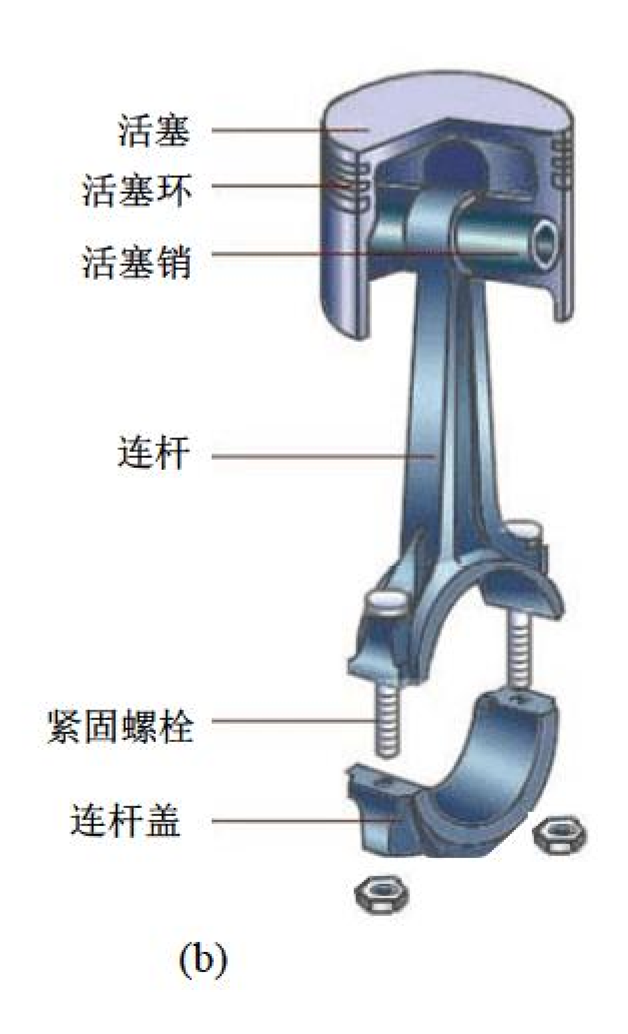
- 熟练计算拉(压)杆的内力，并正确绘制轴力图。
- 掌握拉(压)杆的应力计算公式。
- 掌握纵、横向线应变的概念及关系，会用胡克定律进行应变和变形量的计算。
- 熟悉应变能的概念及计算。
- 熟知低碳钢、铸铁等材料在拉伸和压缩时的力学性能。
- 能利用强度条件对拉(压)构件进行强度校核、截面设计和承载能力计算。
- 能求解简单的拉(压)超静定问题。
- 了解应力集中的概念。

2.1　轴向拉伸和压缩的概念

承受轴向载荷的拉伸和压缩杆在工程中应用非常广泛。例如，汽车起重机中的钢索在重物作用下受拉，吊臂变幅缸沿活塞杆受压(见图 2.1(a))；内燃机连杆在冲程阶段受压，用来紧固的螺栓受拉(见图 2.1(b))。此外，如锻压机的立柱在锻压时受拉；千斤顶的螺杆在顶起重物时受压；桁架中的杆件不是受拉便是受压。



(a)



(b)

图 2.1

上述受拉或受压的构件虽然外形各异，加载方式也不同，但它们都可以简化为两端受力的等直二力杆，其受力特征是在杆的两端受一对大小相等、方向相反、作用线与杆轴线重合的集中力，其变形特征是杆将发生轴线方向的伸长或缩短。这些杆件的受力简图和变形情况(虚线表示变形后的形状)如图 2.2 所示。

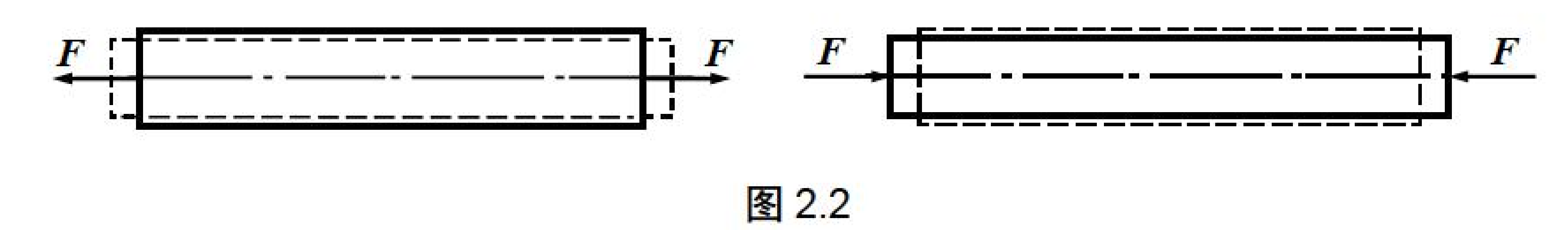


图 2.2

2.2　轴力和轴力图

轴向拉伸或压缩的杆件在任一截面上的内力可通过截面法求得，图 2.3(a)中受轴向拉伸的杆件，杆件左右两端在指定横截面 m—m 上的内力是一个分布力系，其合力为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$(见图 2.3(b)、(c))，由平衡方程得到 $F_{\mathrm{N}} = F$ 。

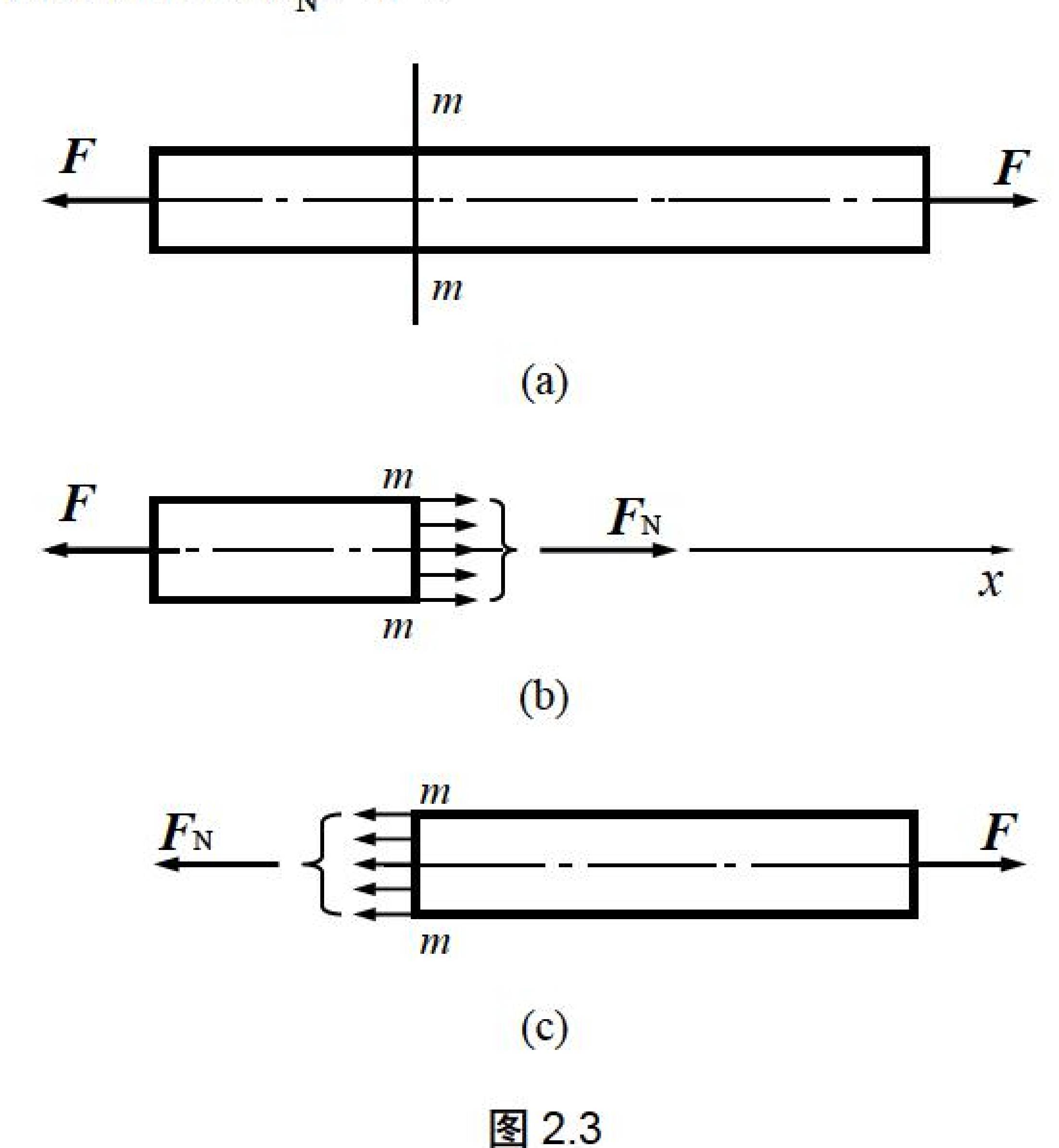


图 2.3

因为外力的作用线与杆件轴线重合，内力的合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 的作用线也必然与杆件的轴线重合，所以轴向拉伸或压缩中的内力称为轴力。材料力学中规定，杆件受拉伸(轴力背离截面)时的轴力(即为拉力)为正，压缩(轴力指向截面)时的轴力(即为压力)为负。这样规定后，尽管图 2.3(c)中 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 方向在 x 轴反方向，但由于是拉力，仍然为正。

如果杆件上作用有两个以上的轴向外力，则在杆件各部分的横截面上的轴力不尽相同，这时可用轴力图来表示轴力沿杆件轴线方向的不同横截面上的变化情况。轴力图的绘制规定如下。

(1)　平行于杆轴线的横坐标表示杆横截面的位置，垂直于杆轴线的纵坐标表示杆横截面上轴力的数值，即建立 F_{N}-$\boldsymbol{x}$ 坐标系。

(2)　用截面法求出杆件各段的轴力，并在坐标系中画出轴力，标上轴力值。两个相邻

轴向外力作用点之间的杆横截面上的轴力是相同的，因此指定横截面取在相邻两外力作用点之间。

(3) 习惯上将正值的轴力画在上侧，标注“+”号，负值轴力画在下侧，标注“−”号。

(4) 为了直观地看到每个截面上内力的大小，在轴力图上画出与 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$ 轴平行的线。

例 2.1 如图 2.4(a)所示等直杆，在 B、C、D 处作用有集中力 F_1、F_2 和 F_3，设 F_1=8kN，F_2=3kN，F_3=2kN。试画出杆件的轴力图。

解：(1) 求约束反力。

用静力学方法，画受力图如图 2.4(b)所示，列平衡方程为

$$\sum F=0，\quad F_1-F_2-F_3-F_{\mathrm{R}A}=0$$

$$F_{\mathrm{R}A}=F_1-F_2-F_3=8\mathrm{kN}-3\mathrm{kN}-2\mathrm{kN}=3\mathrm{kN}$$

(2) 计算轴力。

在 AB 段内，沿 1—1 截面截开后取左段杆为研究对象(见图 2.4(c))，假定轴力为 F_{N1}，由平衡方程可求得轴力为

$$F_{\mathrm{N1}}=F_{\mathrm{R}A}=3\mathrm{kN}\ (拉力)$$

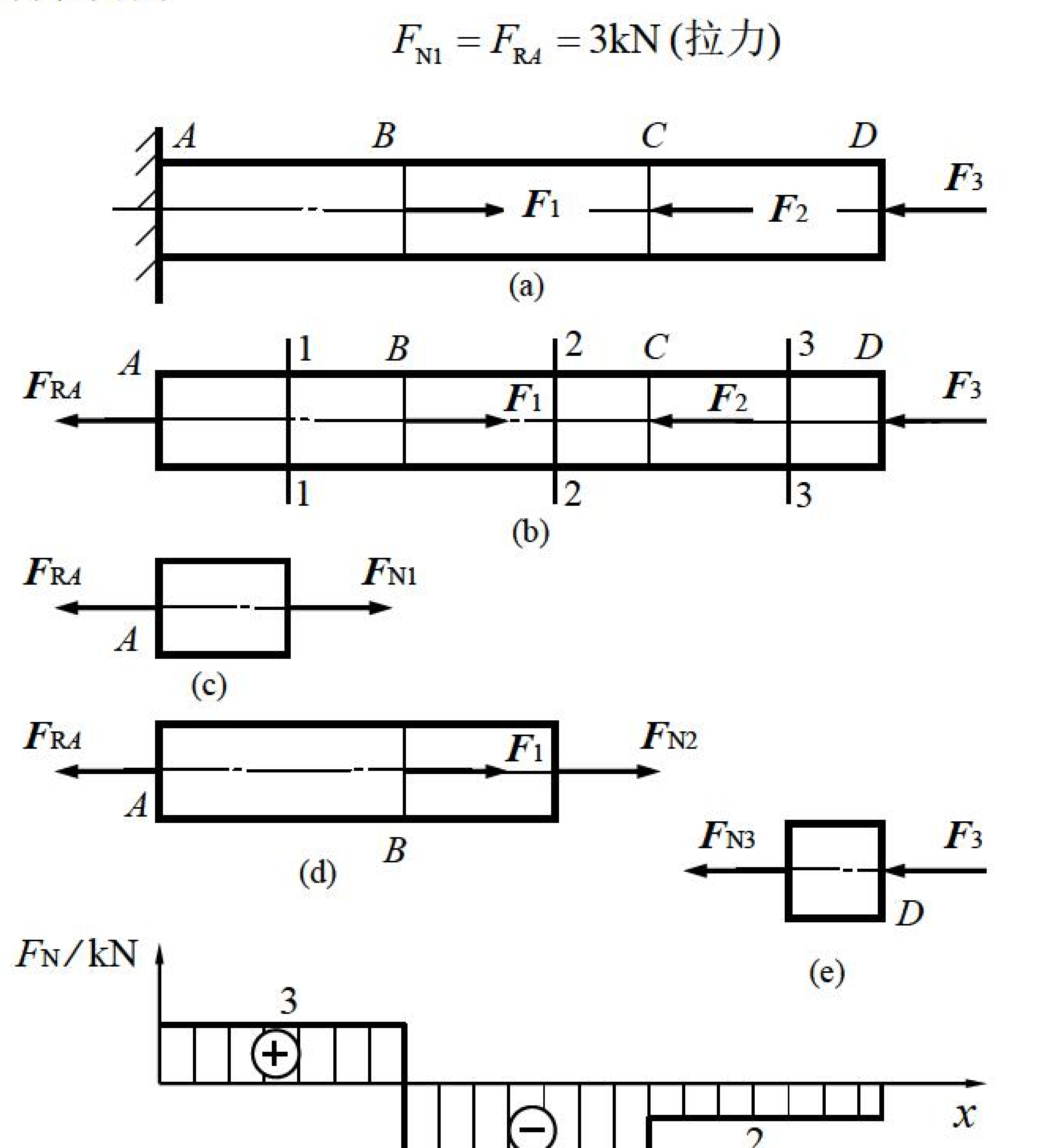


图 2.4

同理可求得 BC 段内任一横截面的轴力(见图 2.4(d))为

$$F_{\mathrm{N2}}=F_{\mathrm{R}A}-F_1=3\mathrm{kN}-8\mathrm{kN}=-5\mathrm{kN}\ (压力)$$

求 CD 段内的轴力时，可取外力较少的右段作为研究对象，并假定为 F_{N3} 拉力(见图

2.4(e))，则有

$$F_{N3} = -F_3 = -2\text{kN}\ (\text{压力})$$

(3) 画轴力图。

按轴力图的作图规则，画出杆的轴力图如图 2.4(f)所示。从轴力图中可以看出，最大轴力发生在 *BC* 段，且为压力。

从作轴力图中可知，外力作用点就是轴力突变的横截面。如杆上作用有 n 个集中外力，轴力图的分段数为 $n-1$。

2.3 拉(压)杆内的应力

2.3.1 拉(压)杆横截面上的应力

在轴向拉(压)的横截面上，除轴力 F_N 外，没有其他内力分量。因此，杆件横截面上只有正应力 σ。根据连续性假设，轴力在横截面上是连续分布的，那么横截面上的正应力也分布于整个截面，正应力 σ 在横截面上的分布规律还不清楚。

为了弄清楚正应力 σ 在杆横截面内的分布规律，可以观察一个试验：取一根等直杆(见图 2.5(a))，在其侧面画上两条垂直于轴线的横向线 *ab*、*cd*(可设想为两个横截面)。然后在杆两端施加一对轴向拉力，使其产生拉伸变形(变形后的杆件如图 2.5(a)中的虚线所示)。从中可观察到以下现象：变形后的两条横向线 *a'b'*、*c'd'*仍然为直线，且垂直于杆的轴线，只是分别沿轴线平行移动了一段距离。

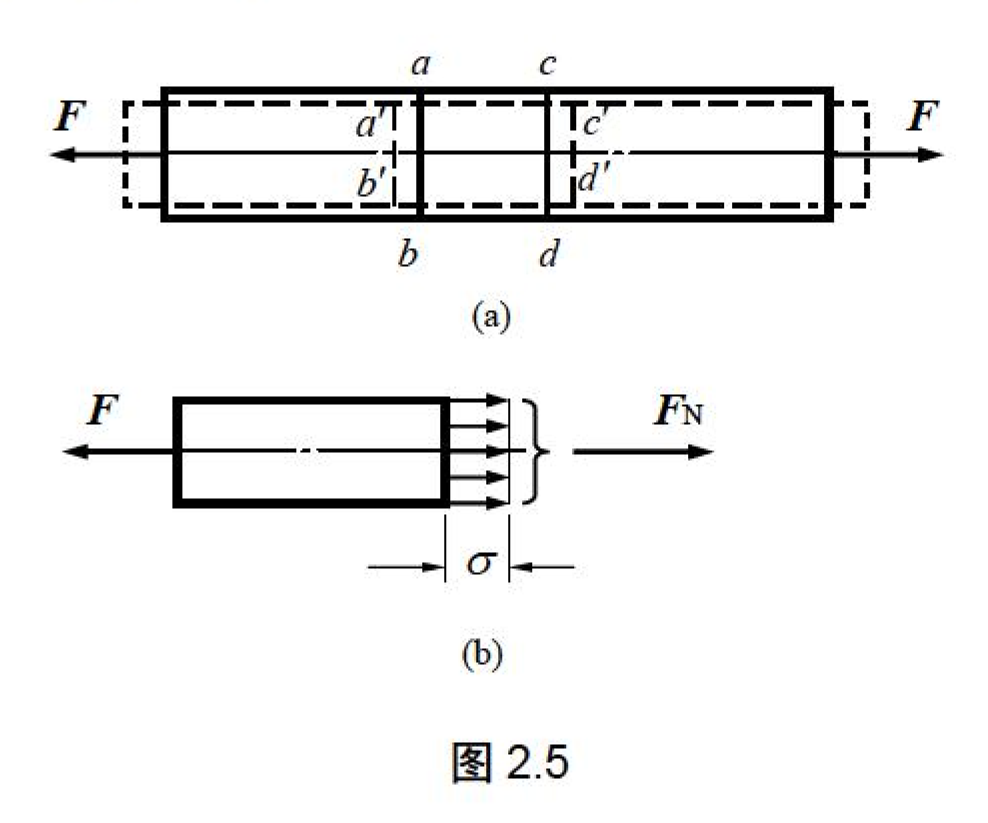


图 2.5

根据上述试验现象，可提出一个新的假设，并由此得到正应力的分布规律。

(1) 平面假设。假设变形前原为平面的横截面，在杆件变形后仍保持为平面且垂直于轴线。

(2) 由平面假设知，杆件所有纵向纤维的伸长是相等的；结合均匀性假设，纵向纤维力学性能相同。由此可以推断横截面上各点的正应力 σ 相等，即正应力均匀分布于横截面上，σ 是一个常量，如图 2.5(b)所示。

按照应力与内力的静力学关系，即

$$\boldsymbol{F}_N = \int_A \sigma \mathrm{d}A = \sigma \int_A \mathrm{d}A = \sigma A$$

拉(压)杆横截面上正应力σ的计算公式为

$$\sigma = \frac{F_N}{A} \tag{2.1}$$

式中：F_N为轴力；A为杆的横截面面积。

正应力σ的符号与轴力F_N符号是一致的，拉应力为正，压应为为负。

式(2.1)是根据正应力在杆横截面上均匀分布的结论而导出的，如杆端外力是均布载荷则完全适应。若杆端作用的是集中载荷，则集中载荷作用点附近区域应力分布较为复杂，暂且不能描述作用点附近应力的真实情况。圣维南原理指出：“力作用于杆端方式的不同，只会使杆端距离不大于杆的横向尺寸的范围内受到影响。”根据这一原理可知，式(2.1)为除杆端附近外的拉(压)杆应力计算公式。

例 2.2　简易起重设备及受力如图 2.6(a)所示，不计杆件自重。其中重物$F = 22\text{kN}$，钢杆 BD 直径$d_1 = 22\text{mm}$，钢梁 CD 的横截面积$A_2 = 2320\text{mm}^2$。试求 BD、CD 两杆横截面内的应力。

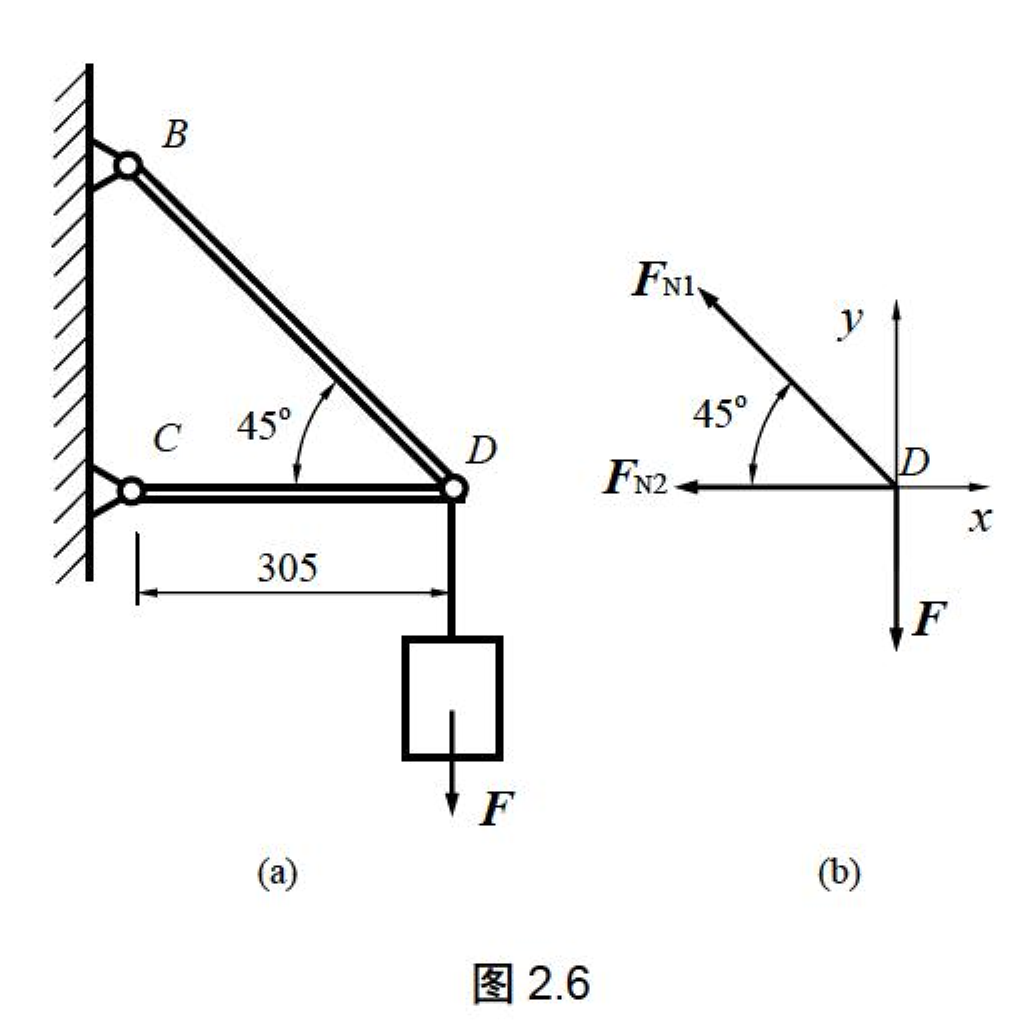


图 2.6

解：(1)　确定各杆的轴力。

结构中 B、C、D 三处均为铰连接，BD、CD 杆均只有两端受力，可简化为轴向拉(压)杆件，假设 BD、CD 杆轴力均为拉力(见图 2.6(b))。由节点 D 的平衡方程为

$$\sum F_x = 0，\ -F_{N2} - F_{N1}\cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0，\ F_{N1}\sin 45^\circ - F = 0$$

由上面两式解得二杆轴力分别为

$$F_{N1} = \sqrt{2}F = \sqrt{2} \times 22\text{kN} = 31.11\text{kN}$$

$$F_{N2} = -F = -22\text{kN}\ (压力)$$

(2)　计算各杆的应力。

由式(2.1)可求得 BD、CD 杆横截面上的正应力分别如下。

杆 BD：

$$\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_{BD}} = \frac{F_{N1}}{\pi d_1^2/4} = \frac{4 \times 31.11 \times 10^3}{\pi \times 25^2 \times 10^{-6}}\text{Pa} = 63.38 \times 10^6\text{Pa} = 63.38\text{MPa}$$

杆 CD：

$$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_{CD}} = \frac{-22\times10^3}{2320\times10^{-6}} = -9.48\times10^6\,\text{Pa} = -9.48\text{MPa}\ (\text{压应力})$$

2.3.2 拉(压)杆斜截面上的应力

为了全面了解轴向拉(压)杆中的应力情况，在分析杆件横截面的应力后，有必要进一步研究其他截面上的应力，这将对后述的杆件破坏分析提供更多的理论依据。

斜截面是指与杆的横截面成 α 角的截面(简称 α 截面)，且约定从横截面转到斜截面时，逆时针转动 α 角为正，顺时针转动 α 角为负。

研究拉(压)杆斜截面上的应力仍采用截面法，如图 2.7(a)所示，用一假想平面沿斜截面将杆件截分为两部分，取左段杆为研究对象(见图 2.7(b))。

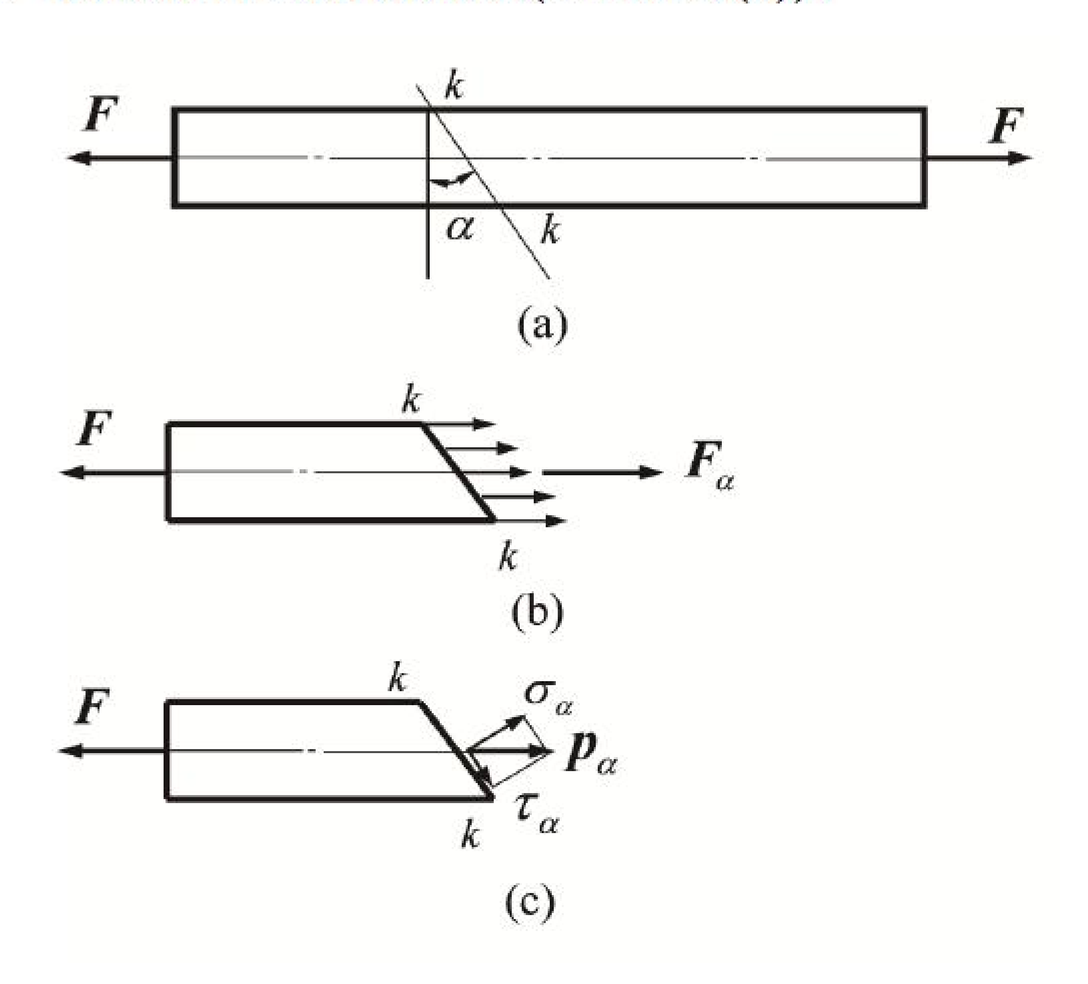


图 2.7

以 F_α 表示斜截面 k—k 上的内力合力，由二力两衡定律可知

$$F_\alpha = F \tag{2.2}$$

设斜截面面积为 A_α， A_α 与横截面面积 A 的关系为

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos\alpha} \tag{2.3}$$

斜截面上的应力 p_α 在斜截面内也是均布的，方向与 F_α 一致。由式(2.2)、式(2.3)可得斜截面上的应力 p_α 为

$$p_\alpha = \frac{F_\alpha}{A_\alpha} = \frac{F}{A}\cos\alpha = \sigma\cos\alpha \tag{2.4}$$

式中，σ 为横截面上的正应力。

将应力 p_α 分解为沿截面法线方向的正应力 σ_α 和沿截面切线方向的切应力 τ_α，如图 2.7(c)所示，可得

$$\sigma_\alpha = p_\alpha\cos\alpha = \sigma\cos^2\alpha \tag{2.5}$$

$$\tau_{\alpha} = p_{\alpha}\sin\alpha = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha \tag{2.6}$$

式(2.5)、式(2.6)表示了杆内任一斜截面上的正应力 σ_{α} 和切应力 τ_{α} 随 α 角的变化规律，并可以看出以下两点。

(1)　$\alpha = 0°$ 时，正应力 σ_0 最大，其值 $\sigma_0 = \sigma$，即最大正应力发生在横截面上。

(2)　$\alpha = 45°$ 时，切应力 $\tau_{45°}$ 最大，其值 $\tau_{45°} = \dfrac{\sigma}{2}$，即最大切应力发生在与横截面成 45° 的斜截面上。

例 2.3　如图 2.8 所示两钢板沿 α 角焊成整体，受拉力 $F = 20\text{kN}$，钢板厚度 $t = 10\text{mm}$，宽度 $b = 200\text{mm}$。求 $\alpha = 30°$ 时焊缝内应力。

解：先求钢板横截面上的应力为

$$\sigma = \frac{F_{\text{N}}}{A} = \frac{F}{bt} = \frac{20\times10^3}{0.2\times0.01}\text{Pa} = 10\times10^6\text{Pa} = 10\text{MPa}$$

焊缝内的正应力即 30° 截面的正应力，为

$$\sigma_{30°} = \sigma\cos^2\alpha = 10\text{MPa}\times\cos^2 30° = 7.5\text{MPa}$$

焊缝内的切应力为

$$\tau_{30°} = \frac{\sigma}{2}\sin 2\alpha = \frac{10}{2}\text{MPa}\times\sin 60° = 4.33\text{MPa}$$

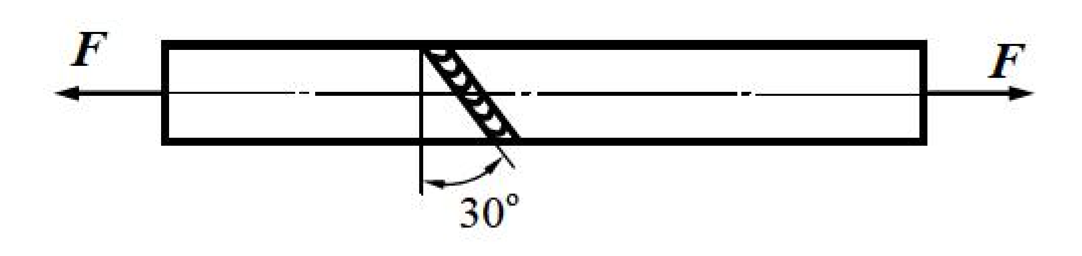


图 2.8

2.4　拉(压)杆的变形

等直杆在轴向拉伸时，会引起杆轴向尺寸的伸长和横向尺寸的缩小，即产生纵向变形和横向变形；反之在轴向压缩时，杆轴向尺寸会缩短，横向尺寸会增大。

2.4.1　纵向线应变和横向线应变

如图 2.9 所示，一根长度为 l、横向尺寸为 b 的等直杆，在轴向拉力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，其长度增加为 l_1，横向尺寸变为 b_1，则杆在纵向伸长量为

$$\Delta l = l_1 - l \tag{2.7}$$

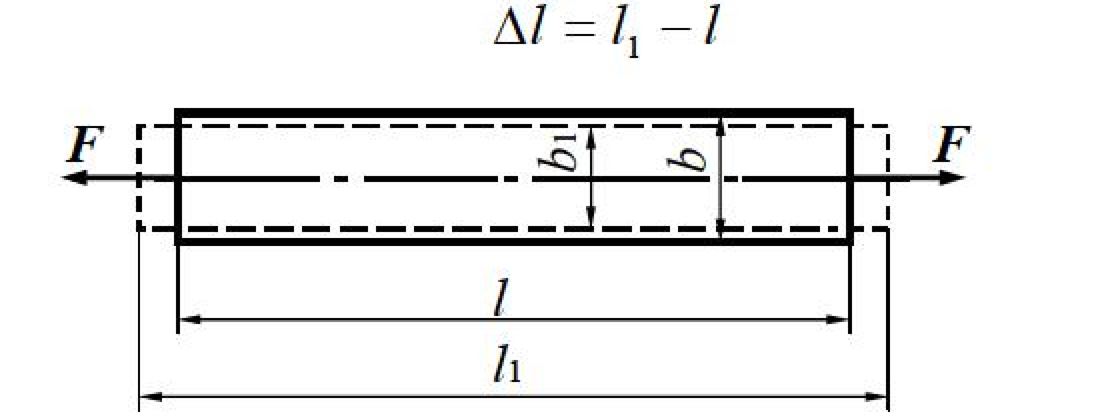


图 2.9

由于拉杆内各段伸长是均匀的，杆件内的纵向线应变可表示为

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{2.8}$$

显然，线应变ε在杆件伸长时为正，缩短时为负。

杆件在横向变形量为

$$\Delta b = b_1 - b \tag{2.9}$$

则横向线应变为

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b} \tag{2.10}$$

显然，拉杆的横向线应变为负。受拉(压)杆件的纵向线应变与横向线应变的符号总是相反的。

试验结果表明，当应力不超过一定值(比例极限，后述)时，横向线应变ε'与纵向线应变ε之比的绝对值是一个常数，即

$$\mu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right| \tag{2.11}$$

μ称为横向变形因数或**泊松比**，是一个量纲为 1 的量，其数值与材料相关。通常称泊松比μ为材料弹性常数。

因为纵向线应变与横向线应变的正负号总相反，ε与ε'的关系可表达为

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon \tag{2.12}$$

2.4.2 胡克定律

对于工程上常用材料如低碳钢、合金钢制作的拉杆，通过一系列试验可以发现，当杆内应力不超过材料某一极限值(即比例极限，后述)时，杆的伸长量Δl与其所受外力 F、杆的原长l成正比，而与杆的横截面积A成反比，表达式为

$$\Delta l \propto \frac{Fl}{A}$$

引入比例常数E后，得到胡克定律的表达式为

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \tag{2.13}$$

式中，比例常数 E 称为弹性模量，其标准单位为 Pa，工程单位常用 MPa 或 GPa。E 值大小因材料而不同，通过试验测定，E 与泊松比μ都称为材料弹性常数。表 2.1 列出了几种常用材料的E、μ值。

式(2.13)中的EA称为杆件的**抗拉(或抗压)刚度**，它反映了杆件抵抗变形的能力。

将式(2.13)改写为

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\cdot\frac{F}{A}$$

即可得胡克定律另一形式的表达式为

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad 或 \quad \sigma = E\varepsilon \tag{2.14}$$

胡克定律又可表述为：当应力不超过材料的比例极限时，应力与应变成正比。

表 2.1　几种常用材料的 E 和 μ 的约值

材料名称	E/GPa	μ
碳钢	196～216	0.24～0.28
合金钢	186～206	0.25～0.30
灰铸铁	78.5～157	0.23～0.27
铜及合金	72.6～128	0.31～0.42
铝合金	70	0.33

例 2.4　如图 2.10 所示，一材料为低碳钢的试件受拉伸变形，杆直径 $d=10\text{mm}$，试件拉伸前标注的 A、B 之间长度为 50mm。当拉力 F = 10kN 时仍为弹性变形，且测量得 A、B 之间伸长量为 50.031mm。试求：(1)该试件的应变；(2)杆内的最大正应力和最大切应力；(3)材料的弹性模量。

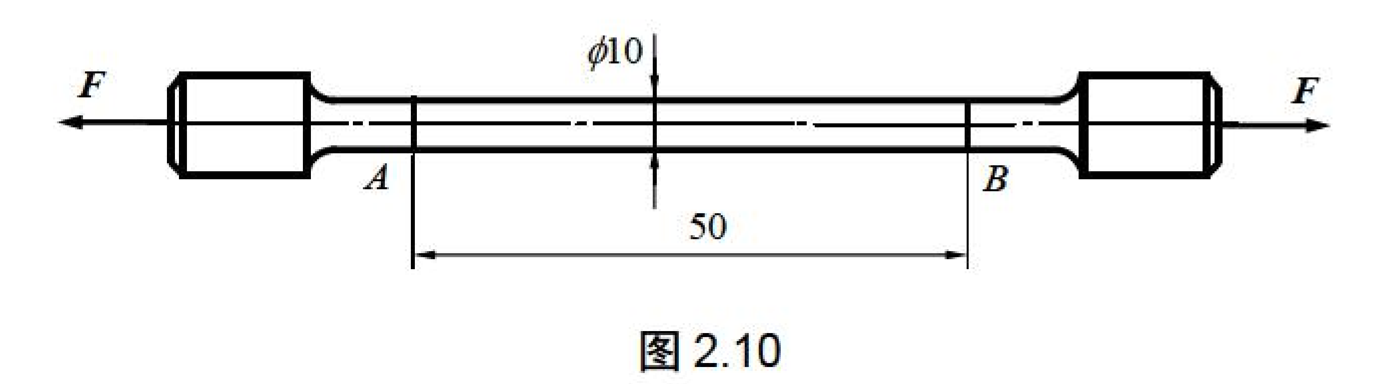


图 2.10

解：(1)　试件的应变。

在 F = 20kN 时，A、B 两点间的伸长量为

$$\Delta l = 50.031\text{mm} - 50\text{mm} = 0.031\text{mm}$$

纵向线应变为

$$\Delta l = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0.031}{50} = 6.24\times10^{-4}$$

(2)　杆内的最大正应力和最大切应力。

最大正应力发生在横截面上，为

$$\sigma_{\max} = \sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi d^2/4} = \frac{4\times10\times10^3}{\pi\times10^2\times10^{-6}} = 127.3\times10^6\text{Pa} = 127.3\text{MPa}$$

最大切应力发生在 45° 截面，为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2} = 63.65\text{MPa}$$

(3)　材料的弹性模量。

由胡克定律，低碳钢弹性模量为

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{127.3\times10^6}{6.24\times10^{-4}} = 2.04\times10^{11}\text{Pa} = 204\text{GPa}$$

例 2.5　图 2.11(a)所示杆系由圆截面钢杆 1、2 组成。已知杆端铰接，两杆与铅垂线均成 $\alpha=30^\circ$ 的夹角，杆长均为 $l=2\text{m}$，直径均为 $d=25\text{mm}$，钢的弹性模量 $E=210\text{GPa}$。当节点 A 处悬挂一重量 P=100kN 的重物时，试求节点 A 的位移。

解：(1)　各杆轴力。

在小变形情况下，轴力引起的 1、2 两杆伸长对 α 角的变化可忽略不计。假定各杆轴

力均为拉力(图 2.11(b))，力系在节点 A 的平衡方程为

$$\sum F_x = 0，\quad F_{N2}\sin\alpha - F_{N1}\sin\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0，\quad F_{N1}\cos\alpha + F_{N2}\cos\alpha - P = 0$$

解得 1、2 杆的轴力为

$$F_{N1} = F_{N2} = \frac{P}{2\cos\alpha}\ (拉力)$$

(2) 各杆变形。

由胡克定律有

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{F_{N1} l_1}{EA} = \frac{Pl}{2EA\cos\alpha}$$

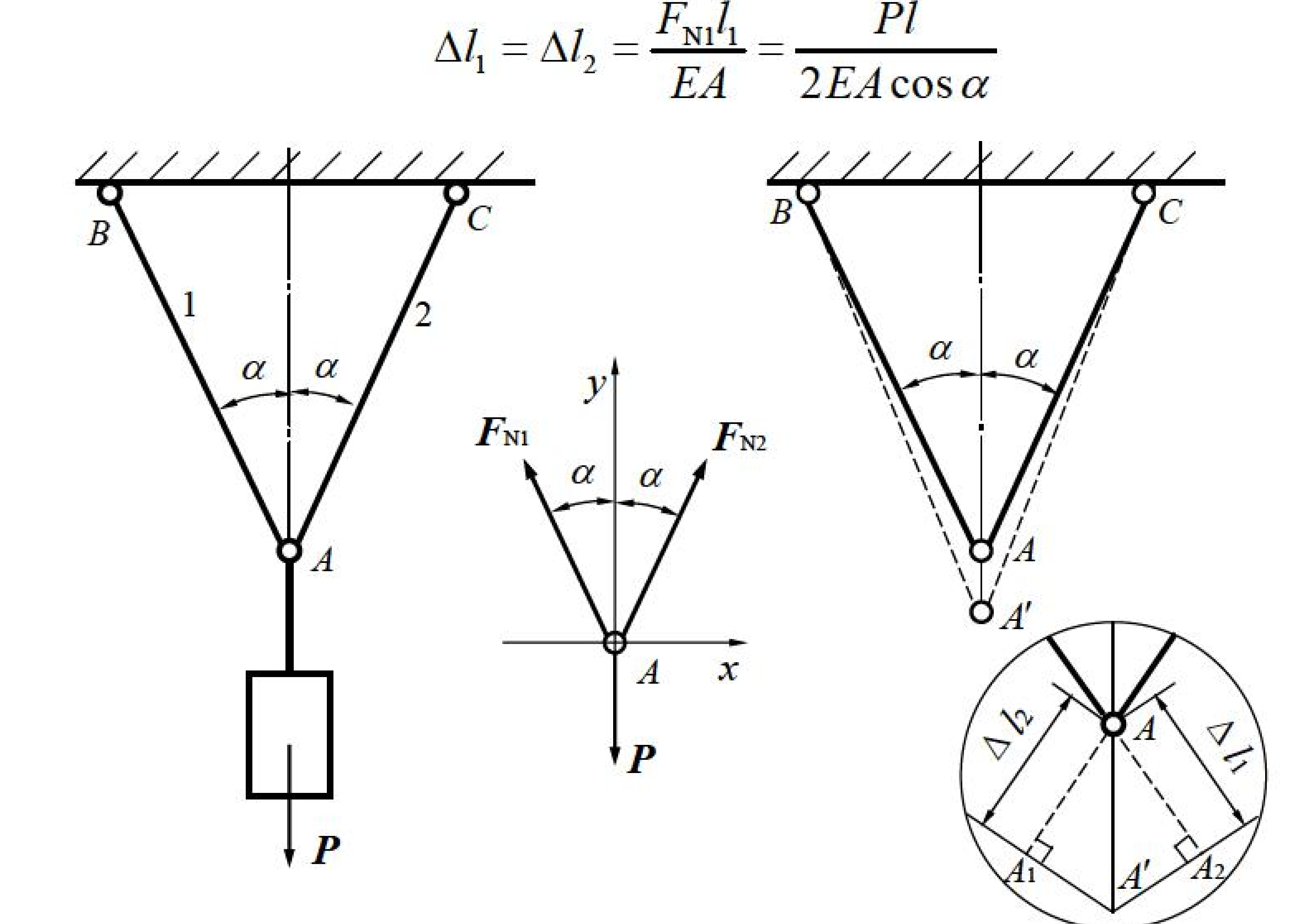


图 2.11

(3) 节点 A 的位移。

如图 2.11(c)所示，杆 1、2 在伸长后仍铰接 A' 点(杆伸长后不会分开)，即满足于后述的几何相容条件。A' 点就是两杆在承重后的新位置。受拉伸长后的杆 BA_2 上 A_2 端的位置只可能在以 B 点为圆心、以 BA_2 长度为半径的圆弧上；同样，杆 CA_1 上 A_1 端的位置只可能在以 C 点为圆心，以 CA_1 长度为半径的圆弧上。因此，A' 的形成就是上述两圆弧的交点。将三角形△ $A'\ A\ A_2$ 看成近似直角三角形，可得

$$\varDelta_A = \overline{AA'} = \frac{\Delta l_1}{\cos\alpha} = \frac{Pl}{2EA\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{100\times10^3\times2}{2\times210\times10^9\times\left(\pi\times25^2\times10^{-6}/4\right)\times\cos^2 30}\text{m} = 0.0013\text{m} = 1.3\text{mm} \qquad (\downarrow)$$

2.5　拉(压)杆内的应变能

弹性物体在受力变形的同时会积蓄能量，变形越大，积蓄的能量越多。当外力消失时，弹性物体会恢复到原来形状，它又将释放出能量而做功。例如，开弓射箭时，箭是靠变形后的弓射出的，要想使箭能射得更远，就要增大弓的变形，从而积蓄更多的能量，弓在释放能量时做更大的功；又如，体育项目跳板跳水，跳水运动员跃到空中是借助跳板的变形，跳板变形越大，积蓄能量越多，运动员能跳得越高，从而保证有更多的时间来完成空中动作。弹性物体在外力作用下，因变形而储存的能量称为应变能。

杆件在轴向拉伸和压缩变形中也会积蓄应变能。积蓄在弹性杆内的应变能V_ε在数值上等于外力所做的功 W，即

$$V_\varepsilon = W \tag{2.15}$$

式(2.15)称为弹性物体的功能原理。

要获得拉(压)杆的应变能，首先要计算外力所做的功 W。如图 2.12(a)所示，设受拉杆件上端固定，作用于下端的拉力 F 由零开始缓慢增大到F_1后，杆的伸长量由零变为Δl_1。拉力 F 从零加载到F_1过程中是随着的Δl 变化不断变化的，因此在杆端产生同样大小位移时(设为$\mathrm{d}(\Delta l)$)，则开始做的功少，越到后来做的功越多。如图 2.12(b)所示，设拉力由某一值F增大到$F+\mathrm{d}F$ 时，杆端位移增量为$\mathrm{d}(\Delta l)$，此刻所做的功为

$$\mathrm{d}W = F \cdot \mathrm{d}(\Delta l) \tag{2.16}$$

当拉力从零加载到F_1的整个过程中，外力所做的功为

$$W = \int_{\Delta l} \mathrm{d}W = \int_0^{\Delta l_1} F \cdot \mathrm{d}(\Delta l) \tag{2.17}$$

式(2.17)表明，外力F所做的功就是$F-\Delta l$ 关系图线下的面积。

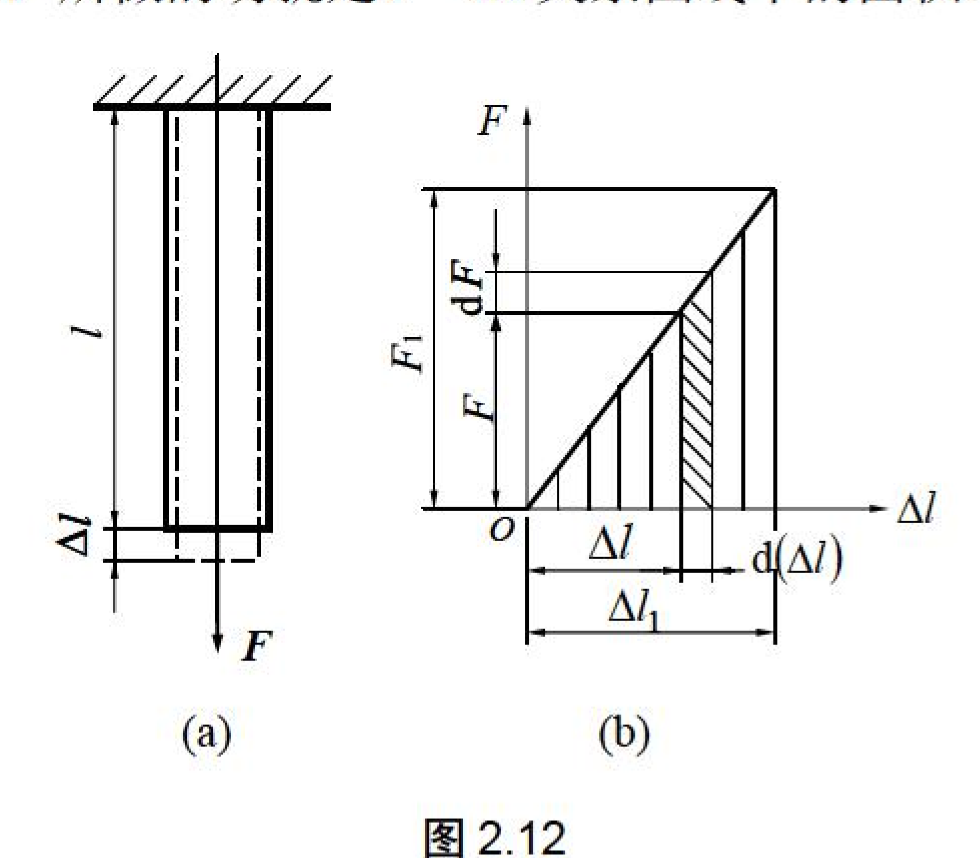


图 2.12

若外力加载到F_1时仍为弹性变形，由胡克定律可知$F-\Delta l$ 关系图线是一条斜直线，斜直线下面的面积是一个三角形面积，故有

$$W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l \tag{2.18}$$

由式(2.15)，可得积蓄在杆内的应变能为

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2}F \cdot \Delta l = \frac{1}{2}F_N \cdot \Delta l \tag{2.19}$$

Δl 以胡克定律形式代入式(2.19)，得

$$V_\varepsilon = \frac{F_N^2 l}{2EA} \tag{2.20}$$

式(2.20)也适应于受压杆件的应变能计算。

单位体积内的应变能称为**应变能密度**，用υ_ε表示，单位为J/m^3。对于纯粹的拉杆或压杆来说，各横截面内的所有点的正应力均相同，应变能密度υ_ε就等于杆的应变能V_ε除以杆的体积 V，即

$$\upsilon_\varepsilon = \frac{V_\varepsilon}{V} = \frac{\frac{1}{2}F\Delta l}{Al} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \tag{2.21}$$

由胡克定律，式(2.21)又可写成

$$\upsilon_\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\varepsilon^2}{2} \tag{2.22}$$

2.6 材料在拉伸和压缩时的力学性能

一个构件的承载能力除了与应力大小有关外，还与构件的材料有关。材料的力学性能是指材料在外力作用下表现出的变形、破坏等方面的性质。不同的材料有不同的力学性能，材料的力学性能是由试验来测定的。测定材料力学性能的试验种类较多，下面介绍的是在室温下以缓慢平稳的加载方式进行的试验，即常温静载试验。

2.6.1 材料在拉伸时的力学性能

在进行拉伸试验时，为了获得较准确的材料性能参数，专门制定了金属拉伸试验的国家标准。标准规定被测材料应做成标准试样，如图 2.13 所示，在试样上取长度为 l 的一段作为试验段(试验前刻上两条横线)，l 称为标距。我国标准采用的试样有圆柱试样和板式试样，对圆柱试样，标距 l 与直径 d 有两种比例，即 $l = 5d$ 和 $l = 10d$。

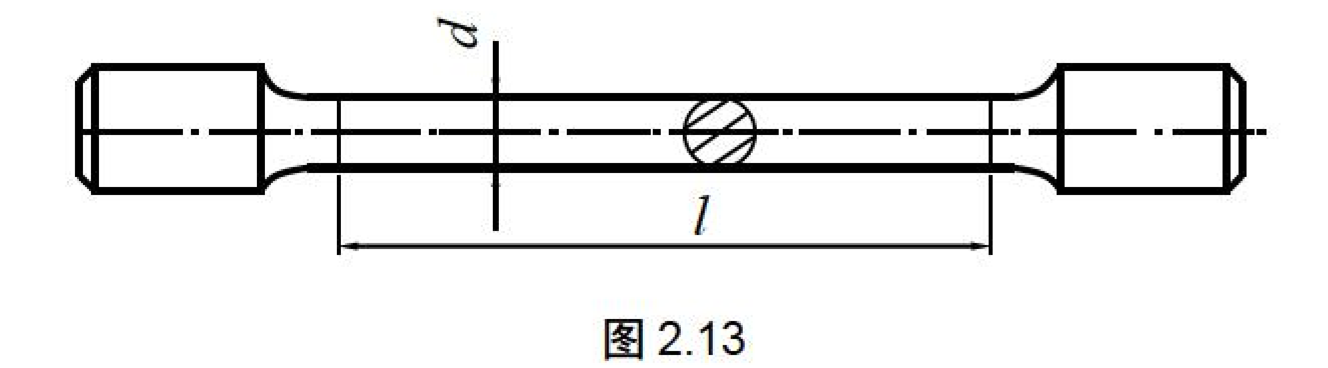


图 2.13

将标准试样在材料试验机上进行单向拉伸试验，试验过程中可自动记录试样所受的载荷及相应的变形，直至试样被拉断，最后得到试验全过程的载荷——变形曲线。

1. 低碳钢拉伸时的力学性能

低碳钢是工程上广泛使用的金属材料，含碳量在 0.3%以下，是一种典型的塑性材料，

这种材料在拉伸试验中表现出的力学性能较为全面和具有代表性。

通过低碳钢拉伸试验，得到如图 2.14 所示的 $F-\Delta l$ 关系曲线，也称拉伸图。若将拉伸图的纵坐标 F 除以试样横截面的原始面积 A，将其横坐标 Δl 除以试样标距的原始长度 l，就得到了一个以 σ 为纵坐标、ε 为横坐标且形状与拉伸图相似的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线，称为应力-应变曲线，如图 2.15 所示。

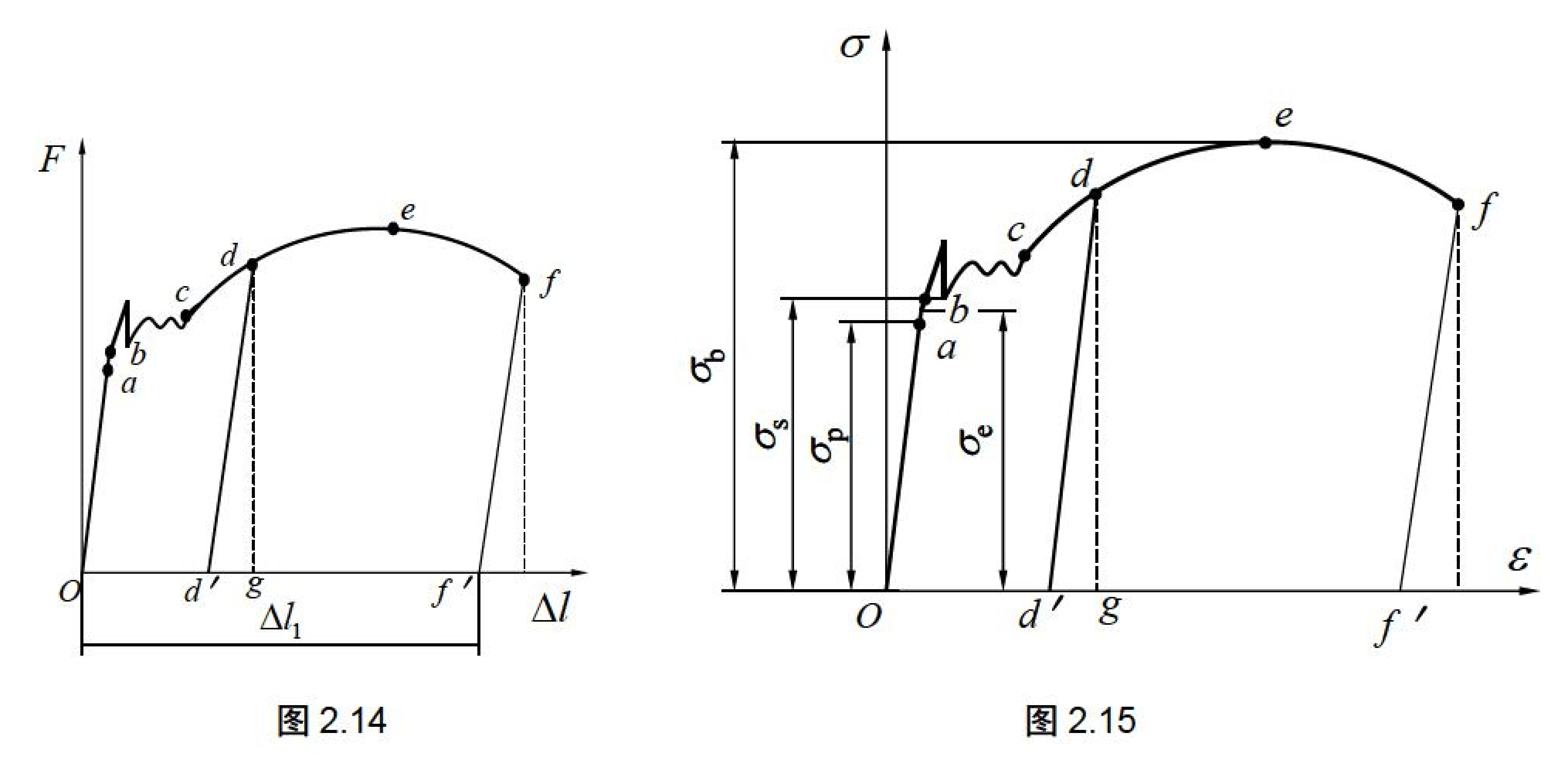


图 2.14　　　　图 2.15

试样的拉伸图直接反映出材料的变形、破坏的全部过程，但其纵坐标和横坐标上的取值与试样的几何尺寸有关。而应力-应变曲线与试样尺寸无关，可表示出材料的力学性能。

根据低碳钢拉伸图和应力-应变曲线图的特征，可将拉伸过程分为 4 个阶段并得到相应的力学性能。

1)　弹性阶段

弹性阶段是指图 2.15 中的 Ob 范围。在拉伸初始阶段的 Oa 段是一条斜直线，σ 与 ε 成线性关系，即胡克定律

$$\sigma = E\varepsilon \tag{2.23}$$

式(2.23)中弹性模量 $E=\dfrac{\sigma}{\varepsilon}$ 正是直线 Oa 的斜率，材料 E 值也是通过拉伸试验获得的。直线部分的最高点 a 所对应的应力称为**比例极限**，用 σ_p 表示。杆件内的应力只有低于比例极限时材料才服从胡克定律，或者说材料是线弹性的。

应力超过比例极限后，从 a 点到 b 点不是直线，之间不再是线性关系，但卸除拉力后变形仍可完全消失，这种变形称为弹性变形。b 点所对应的应力称为材料的弹性极限，用 σ_e 表示。在曲线上，a、b 两点非常接近，工程上对弹性极限和比例极限并不严格区分。

2)　屈服阶段

屈服阶段是指图 2.15 中的 bc 范围。当应力超过弹性极限后，试样的伸长量快速增大，而此时的拉力值只会在一个很小范围内波动，这一阶段内材料似乎失去了抵抗变形的能力。这种应力不增加而应变继续增大的现象称为材料的**屈服**或**流动**。在屈服阶段内最高点应力和最低点应力分别称为上屈服极限和下屈服极限。试验中下屈服强度值相对稳定，

通常将下屈服强度称为材料的**屈服强度**或**屈服极限**，用 σ_s 表示。屈服极限是判别材料是否产生塑性变形的标志参数，构件产生塑性变形后会影响到机器的正常工作，所以屈服极限 σ_s 是衡量材料强度的一个重要指标。

在屈服阶段还可观察到一种现象，若将试样表面抛光，则在试样表面出现大约与轴线成 45° 的条纹(见图 2.16)，这是由材料内部晶粒产生相对滑移而形成的，称为滑移线。材料晶粒的滑移是由切应力引起的，因 45° 斜截面上切应力最大，故滑移线方向与杆轴线成 45° 角。

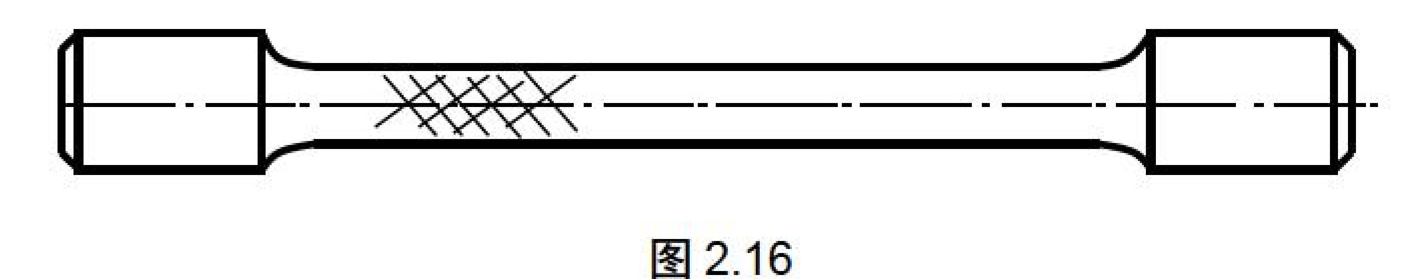


图 2.16

3) 强化阶段

强化阶段是指图 2.15 中的 *ce* 范围。经过屈服阶段的结束点 *c* 点，材料又恢复了抵抗变形的能力，若要使杆继续伸长必须增大拉力。在这一阶段内，材料在继续塑性变形中，其力学性能(如屈服强度)会有所提高，这种现象称为材料的强化。强化阶段的最高点 *e* 点所对应的应力是指材料能承受的最大应力，称为**强度极限**或**抗拉强度**，用 σ_b 表示。强度极限 σ_b 是衡量材料强度的另一个重要指标。试验发现，如在强化阶段内的任一时刻(图 2.15 中的 *d* 点)停止加载并逐渐卸除载荷，应力和应变值将沿斜直线 dd' 变化最终达到 d' 点，斜直线 dd' 与弹性阶段内的直线几乎平行。这表明在卸载时，应力和应变遵循线性关系的规律，这就是材料的卸载规律。由此可知，材料进入强化阶段后，试样的变形包括弹性变形和塑性变形两部分，例如 *d* 点卸载为零后，弹性变形消失，只留下不能消失的 Od' 。

进入强化阶段的材料卸载为零后，如再次加载，则应力和应变关系将沿卸载时的斜直线 dd' 变化，加载到 *d* 点以前材料的变形都是弹性变形，过了 *d* 点后才重新出现塑性变形。这一过程提高了材料的比例极限值 σ_p ，对于以屈服为破坏标志的材料，提高了构件的承载能力，但构件后面能承受的塑性变形减小了，这种现象称为冷作硬化。冷作硬化在工程中有利有弊。例如，建筑用的钢筋常通过冷拔工艺提高强度；机械制造中，使用喷丸工艺让零件表面产生塑性变形来提高零件表面强度。冷作硬化后的材料有时会给切削加工带来困难，往往又要用热处理方法来消除冷作硬化。

4) 局部变形阶段

局部变形阶段是指图 2.15 中 *ef* 范围。过了 *e* 点后，在试件某一局部范围内横向尺寸突然急剧缩小，形成如图 2.17 所示的“缩颈”现象。由于缩颈部分横截面积减小，使试样继续伸长所需的拉力会减小，一直到试样拉断。

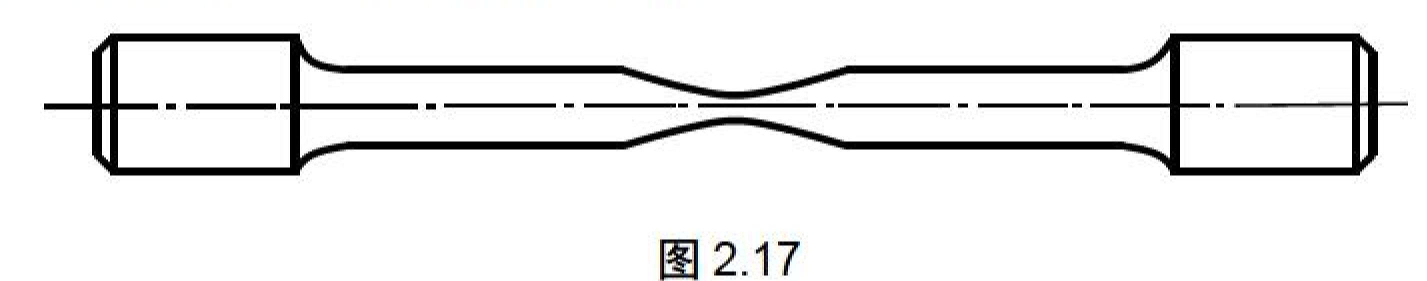


图 2.17

5)　伸长率和断面收缩率

试样拉断后，标距由原始长度 l 变为 l_1，在试样标距段内的伸长量 $(l_1 - l)$ 与原始标距 l 之比的百分数称为材料伸长率，用 δ 表示，即

$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\% \tag{2.24}$$

伸长率是衡量材料塑性的一个重要指标。工程上通常按伸长率的大小将材料分为两大类：δ ＞5%的材料称为塑性材料，如碳钢、铝合金、银、黄铜等；δ ＜5%的材料称为脆性材料，如灰口铸铁、陶瓷、混凝土等。

原始横截面积为 A 的试样，在拉断后的断口面积变为 A_1。将拉断后的试样横截面的面积缩减量 $(A - A_1)$ 与原始横截面积 A 之比的百分数称为断面收缩率，用 ψ 表示，即

$$\psi = \frac{A - A_1}{A} \times 100\% \tag{2.25}$$

断面收缩率也可用来作为衡量材料塑性的指标。

2. 其他金属材料拉伸时的力学性能

图 2.18 所示为几种塑性金属材料拉伸试验得到的曲线。从图中可以看到，有些材料如 16Mn(一种低合金结构钢)，它和低碳钢一样，在拉伸试验中有明显的 4 个阶段；有些材料如黄铜 H62、20Cr(一种合金结构钢)等，没有屈服阶段，但其他 3 个阶段很明显；还有一些材料如 T10A(一种工具钢)，没有屈服变形阶段和局部变形阶段，只存在两个阶段，这些材料的一个共同特点是伸长率 δ 均较大，都属于塑性材料。

对于没有屈服阶段的塑性材料，通常将产生 0.2%塑性应变时应力作为屈服极限，并用 $\sigma_{0.2}$ 表示(见图 2.19)。

3. 铸铁拉伸时的力学性能

灰口铸铁拉伸时的应力-应变曲线如图 2.20 所示，该曲线与低碳钢的应力-应变曲线明显不同，呈现了典型脆性材料在拉伸时的力学性能特征。

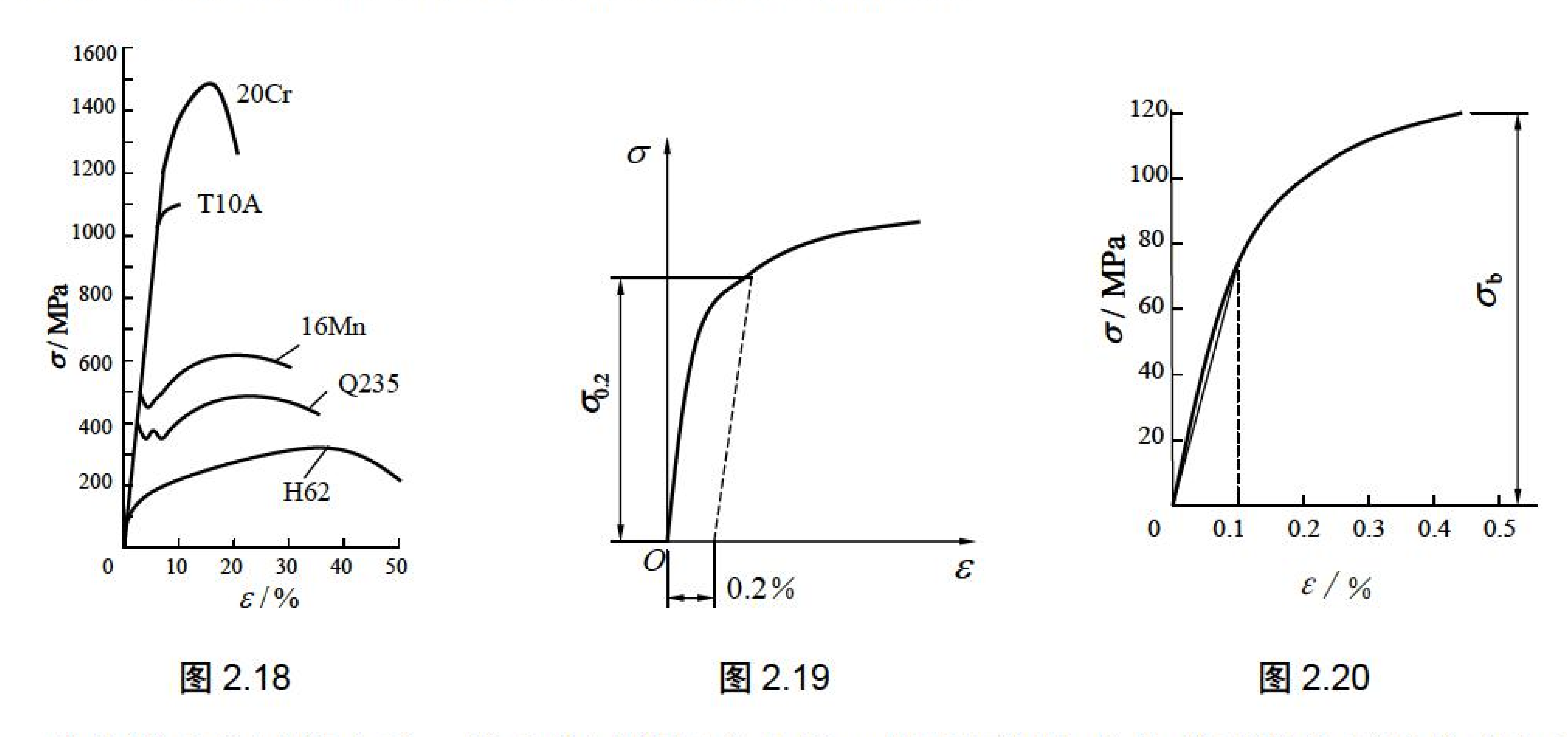
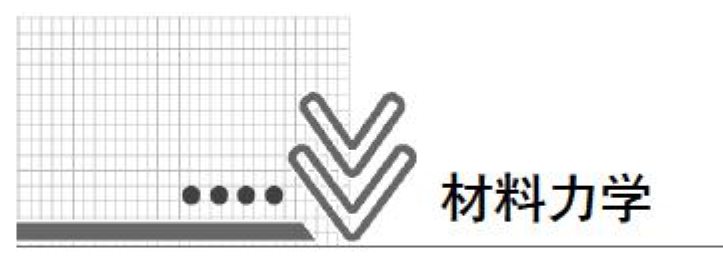


图 2.18　　图 2.19　　图 2.20

从拉断后的试样来看，断后的试样长度和断口横截面积与拉伸前试样的原始长度和原始横截面积相比较几乎没有变化，测出的断后伸长率 δ ＜5%，是典型的脆性材料。



铸铁的拉伸曲线没有明显的直线部分，弹性模量 E 的数值在不断变化，工程计算中采用的弹性模量 E 是割线弹性模量，其值通常取应变为 0.1%时 $\sigma-\varepsilon$ 曲线的割线斜率值。

铸铁拉伸时，在较小的应力下很快被拉断，没有屈服、强化阶段。因此铸铁拉伸试验只能测得拉断时的最大应力即强度极限 σ_b，且强度极限 σ_b 远低于低碳钢的强度极限，所以铸铁等脆性材料不宜作为抗拉构件的材料。

2.6.2 材料在压缩时的力学性能

金属压缩试样通常制成较短的圆柱体(见图 2.21(a))，其高度 h 与横截面直径 d 的比值一般规定在 1～3 范围内，以免试样在试验过程中被压弯。混凝土压缩试样常制成立方体试块(见图 2.21(b))。

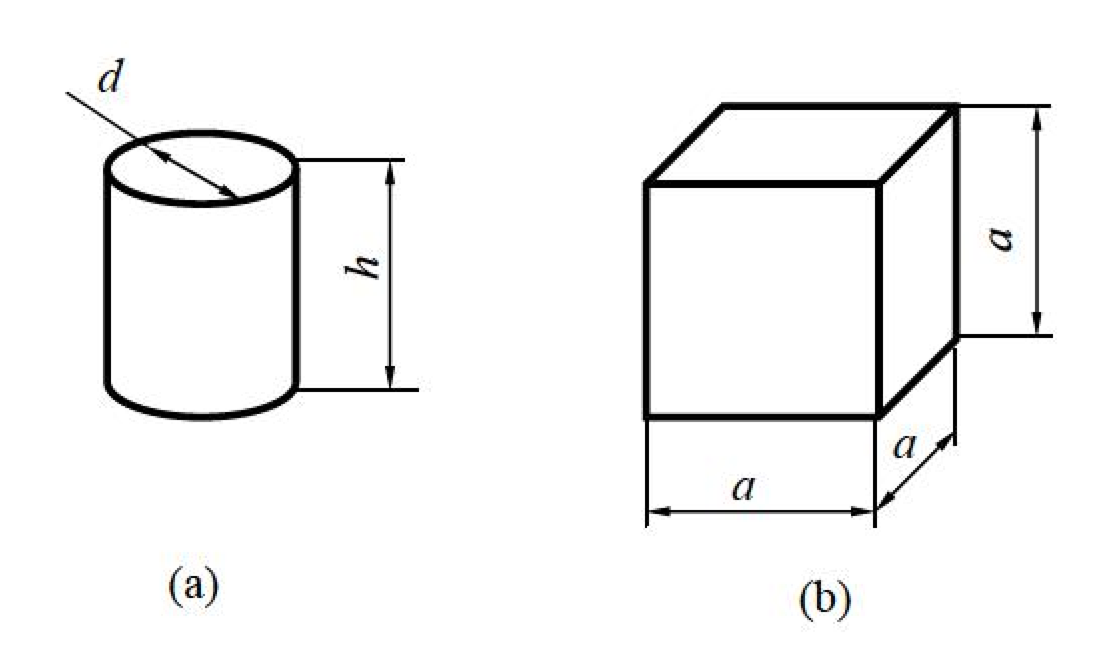


图 2.21

1. 低碳钢压缩时的力学性能

低碳钢压缩试验得到的曲线如图 2.22 所示(图中虚线为低碳钢拉伸的曲线)。从图中可以看出，低碳钢压缩时的弹性阶段和屈服阶段的曲线基本上与低碳钢的拉伸曲线重合。因此，低碳钢压缩时的弹性模量 E、比例极限 σ_p 和屈服极限 σ_s 等力学性能指标与拉伸时大致相同。进入强化阶段后，压缩曲线一直上升，这是由于试样越压越扁，横截面积在不断增大，试样进一步变形缩短所需的压力越来越大。低碳钢是塑性较大的材料，再大的塑性变形下试样也不会产生破裂。因此，试验中无法测出低碳钢压缩时的强度极限 σ_b。由于通过拉伸试验可测出低碳钢压缩时的力学性能，所以工程实际中通常不进行低碳钢压缩试验。

2. 铸铁压缩时的力学性能

脆性材料在压缩和拉伸时的力学性能差别较大，图 2.23 所示是灰口铸铁压缩试验的曲线(图中虚线为灰口铸铁拉伸时的曲线)。比较两条曲线可以看出，铸铁在压缩时的强度极限和伸长率较拉伸时大得多，抗压强度在数值上比抗拉强度高 4～5 倍；对于混凝土等脆性材料甚至高出 10 倍左右。因此，脆性材料宜用作受压构件，如机械制造中铸铁广泛用于铸造机床床身、机座、缸体等受压零部件。

铸铁等脆性材料受压缩时，应力-应变曲线无直线段，应力和应变的关系只是近似符合胡克定律。

铸铁试样受压破坏的情况如图 2.23 所示，试样破坏断面的法线与轴线大致成

50°～55°倾角。

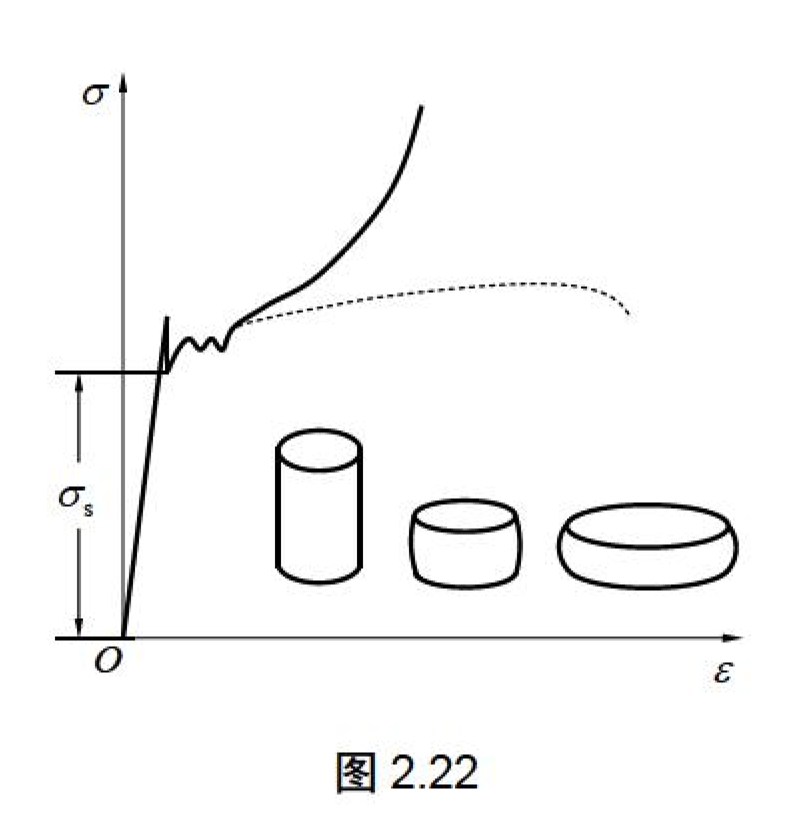


图 2.22

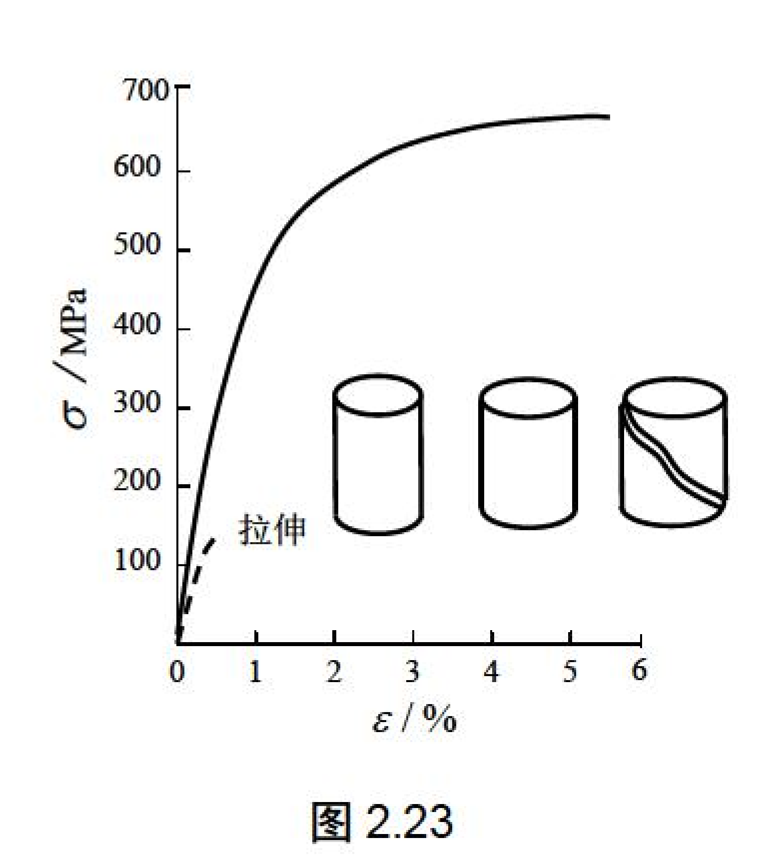


图 2.23

2.7　许用应力与强度条件

2.7.1　安全因数和许用应力

对于用塑性材料制成的拉(压)构件，杆内应力达到屈服极限 σ_s 时，就会产生显著的塑性变形而丧失正常工作能力；而对于脆性材料，杆内应力达到强度极限 σ_b 时，杆件因断裂丧失工作能力。因此，通常将塑性材料的屈服极限 σ_s(或 $\sigma_{0.2}$)、脆性材料的强度极限 σ_b 作为材料破坏的应力值，称为**极限应力**，用 σ_u 表示。

杆件的最大工作应力接近材料的极限应力时，既不可靠也不安全。工程上将材料的极限应力除一个大于 1 的因素 n 作为构件最大应力的上限值，这个应力称为材料的**许用应力**，用 $[\sigma]$ 表示，即

$$[\sigma]=\frac{\sigma_u}{n} \tag{2.26}$$

式中，n 为**安全因素**。安全因素不能太小，也不宜过大。安全因素太小，构件不安全；安全因素太大会造成材料浪费。在一般机械制造中，受静载的情况下，对于塑性材料 n 通常取 1.2～2.5；对于脆性材料 n 取 2.0～3.5 甚至更大。各种材料在不同工作条件下的安全因素与许用应力可从有关规范或设计手册中查到。

2.7.2　强度条件

为了确保拉(压)杆不致因强度不够而破坏，应使最大工作应力 σ_{max} 不超过许用应力 $[\sigma]$，即

$$\sigma_{max} \leqslant [\sigma] \tag{2.27}$$

这一表达式称为轴向拉伸与压缩杆件的强度条件。对于等截面杆，式(2.27)又变为

$$\frac{F_{N\max}}{A} \leqslant [\sigma] \tag{2.28}$$

应用强度条件可以解决以下三类强度问题。

(1) **强度校核**。已知载荷、杆件尺寸及材料的许用应力，根据式(2.27)校核是否满足强度要求。满足强度条件，构件是安全的；否则是不安全的。

(2) **设计截面尺寸**。已知载荷及材料的许用应力，确定杆件所需的最小横截面积，即

$$A \geqslant \frac{F_{\mathrm{N\,max}}}{[\sigma]} \tag{2.29}$$

(3) **确定杆件的许可载荷**。已知杆件的横截面积和材料许用应力，杆件能承受的最大轴力为

$$F_{\mathrm{N\,max}} \leqslant A \cdot [\sigma] \tag{2.30}$$

例 2.6 一气动夹具如图 2.24 所示。已知汽缸内径 D =150mm，缸内气压 p = 0.8MPa，活塞杆材料为 20 钢，$[\sigma]=100\mathrm{MPa}$。试设计活塞杆的直径 d。

解：从图 2.24 中可知，活塞杆左端活塞承受压缩空气的压力，对活塞杆来说左端承受拉力，活塞杆右端承受工件的反作用力，也为拉力。因此，活塞杆可简化为两端受拉的杆件，拉力 F 为气体压强 p 与活塞受压面积的乘积。但在活塞杆直径不知的情况下，受压面积不能准确求得。但考虑到杆件面积比活塞面积小得多，因此计算受压面积时近似取活塞面积，这样处理偏于安全，拉力 F 为

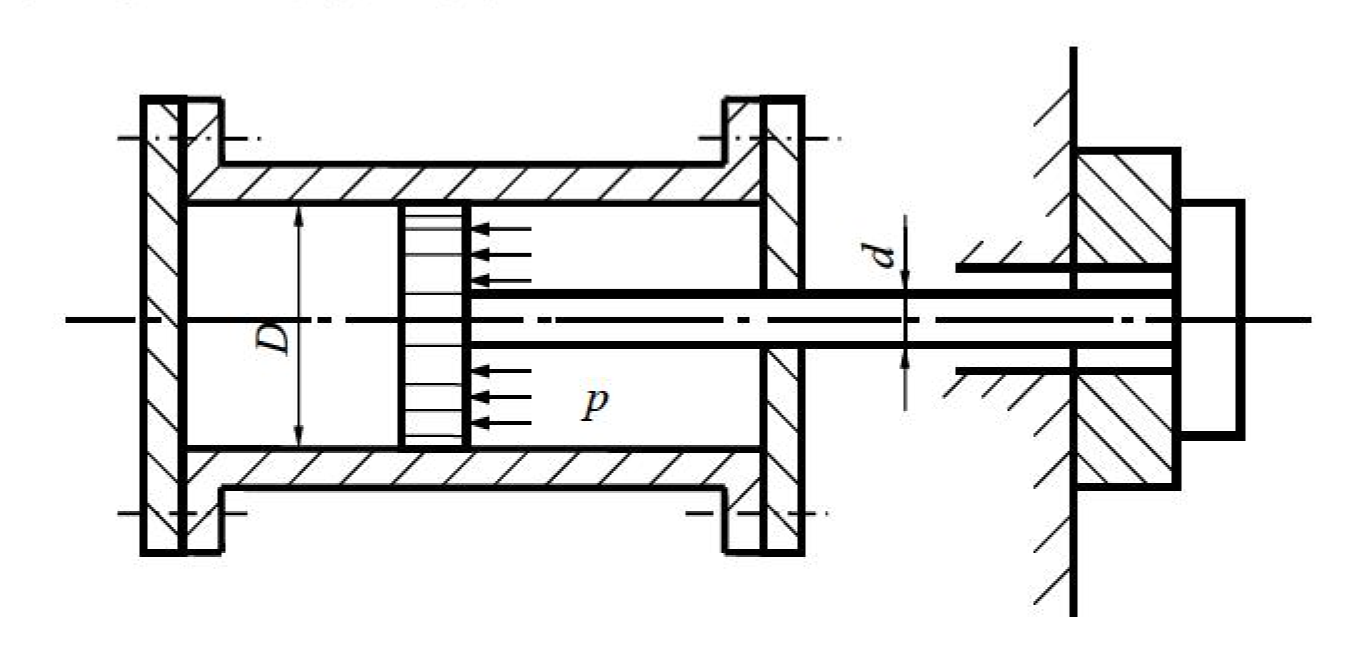


图 2.24

$$F = p \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 0.8\mathrm{MPa} \times \frac{\pi \times (150 \times 10^{-3})^2}{4}\mathrm{m}^2 = 14.14 \times 10^3\,\mathrm{N} = 14.14\mathrm{kN}$$

活塞杆轴力为

$$F_{\mathrm{N}} = F = 14.14\mathrm{kN}$$

根据强度条件中式(2.29)，应满足

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \geqslant \frac{F}{[\sigma]}$$

$$d \geqslant \sqrt{\frac{4F}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \times 14.14 \times 10^3}{\pi \times 100 \times 10^6}}\mathrm{m} = 0.0134\mathrm{m} = 13.4\mathrm{mm}$$

可将活塞杆直径设计为 d =14 mm。

例 2.7 三脚架由 AC、BC 两杆组成，如图 2.25(a)所示。杆 AC 由两根 14a 号槽钢组成，许用应力$[\sigma]=160\mathrm{MPa}$；杆 BC 为一根 22a 号工序钢，许用应力$[\sigma]=100\mathrm{MPa}$；载荷 F=200kN。(1)试校核 AC、BC 杆的强度；(2)求许可载荷。

解：(1)　校核两杆强度。

首先求两杆轴力与 $\boldsymbol{F}$ 的关系，由节点 C 的受力图(图 2.25(b))列出平衡方程为

$$\sum F_x = 0,\quad F_{NBC}\cdot\cos 30^\circ - F_{NAC}\cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_{NBC}\cdot\sin 30^\circ + F_{NAC}\sin 30^\circ - F = 0$$

解得

$$F_{NAC} = F_{NBC} = F = 200\text{kN}$$

由型钢表查得杆 AC 的横截面面积 $A_{AC} = 2\times 18.52\times 10^{-4} = 37.04\times 10^{-4}\,\text{m}^2$，杆 BC 的横截面积 $A_{BC} = 42.13\times 10^{-4}\,\text{m}^2$。

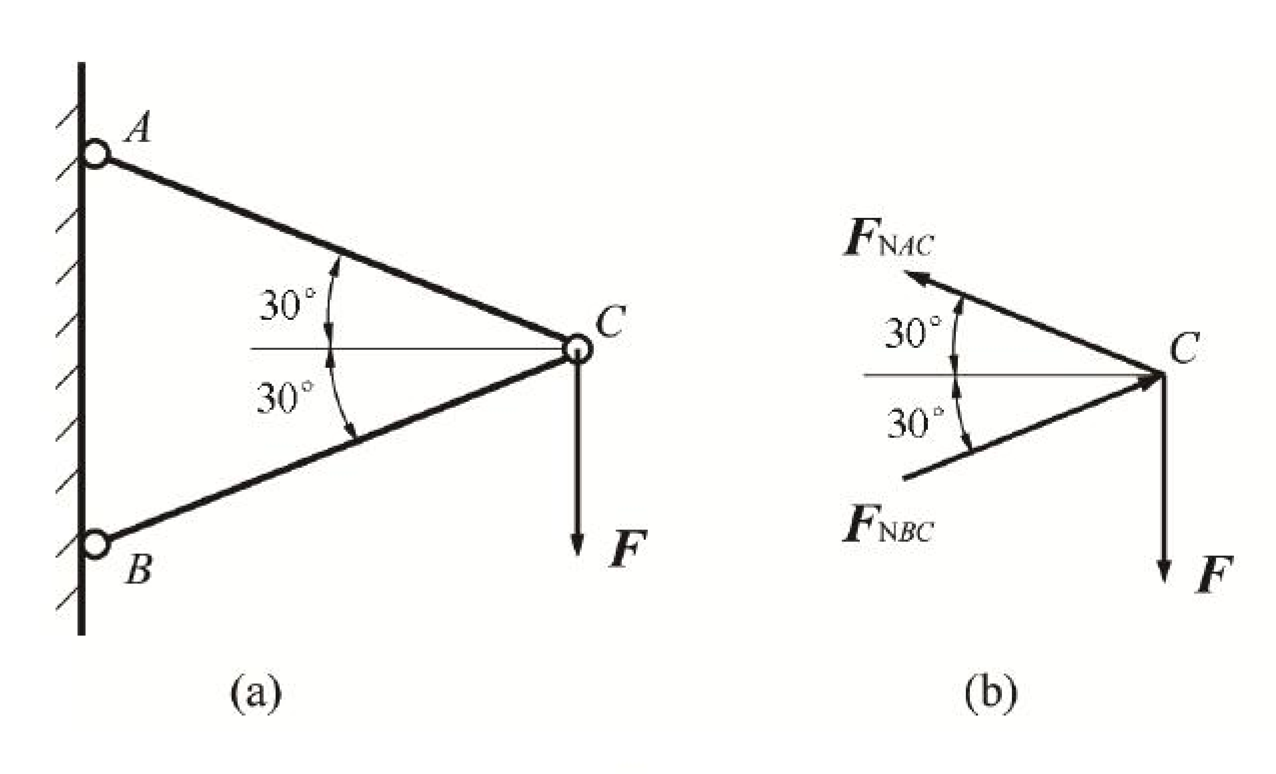


图 2.25

对两杆进行强度校核，即

$$\sigma_{AC} = \frac{F_{NAC}}{A_{AC}} = \frac{200\times 10^3\,\text{N}}{37.04\times 10^{-4}\,\text{m}^2} = 53.0\times 10^6\,\text{Pa} = 53.0\text{MPa} < [\sigma] = 160\text{MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{NBC}}{A_{BC}} = \frac{200\times 10^3\,\text{N}}{42.13\times 10^{-4}\,\text{m}^2} = 47.5\times 10^6\,\text{Pa} = 47.5\text{MPa} < [\sigma] = 100\text{MPa}$$

AC、BC 两杆内的正应力小于材料许用应力，是安全的。

(2)　求许可载荷。

由上述强度校核可以看出，两杆内的正应力远低于材料许用应力，杆件强度没有充分发挥，悬吊的重量 $\boldsymbol{F}$ 还可增加，所能承担的最大重量即为许可载荷。

两杆的许可轴力为

$$[F_{NAC}] = [\sigma]\cdot A_{AC} = 160\times 10^6\,\text{Pa}\times 37.04\times 10^{-4}\,\text{m}^2 = 592.6\times 10^3\,\text{N} = 592.6\text{kN}$$

$$[F_{NBC}] = [\sigma]\cdot A_{BC} = 100\times 10^6\,\text{Pa}\times 42.13\times 10^{-4}\,\text{m}^2 = 421.3\times 10^3\,\text{N} = 421.3\text{kN}$$

因为 $F_{NAC} = F_{NBC} = F$，所以许可荷载分别为

$$[F_1] = [F_{NAC}] = 592.6\text{kN}$$

$$[F_2] = [F_{NBC}] = 421.3\text{kN}$$

三脚架许可载荷应取 $[F] = 421.3\text{kN}$。

2.8 拉伸(压缩)的超静定问题

2.8.1 超静定问题的概念

在此之前所遇到的轴向拉(压)杆或杆系，其约束反力或构件内力都能通过静力学平衡方程求解，这类问题称为静定问题。在工程实际中，有时为了减小构件内的应力或变形，往往采用更多的构件或支座。如图 2.26(a)所示，杆件上、下两端固定，在上、下两端各有一个约束反力。而静力平衡方程只能列出一个轴向合力为零的平衡方程，靠静力学方法无法将两个约束力求出。又如图 2.26(b)所示杆系结构，3 根杆铰接于 *A* 点，外力也作用于 *A* 点，此杆系存在 3 个未知力，而取 *A* 点为研究对象的平面汇交力系只能列出两个平衡方程，三杆轴力无法用静力学方法求得。这类仅靠静力学方程不能求解的问题称为超静定问题。

在超静定问题中，都存在多余维持平衡所必需的支座(如图 2.26(a)中的 *B* 端)或杆件(如图 2.26(b)中的 *AD* 杆)，习惯上称其为“多余”约束。多余约束的存在必然导致未知力数目超过平衡方程数目，称为超静定次数，如图 2.26(a)、(b)中都称为一次超静定。如果在图 2.26(b)中用四杆铰接，则成为二次超静定问题。

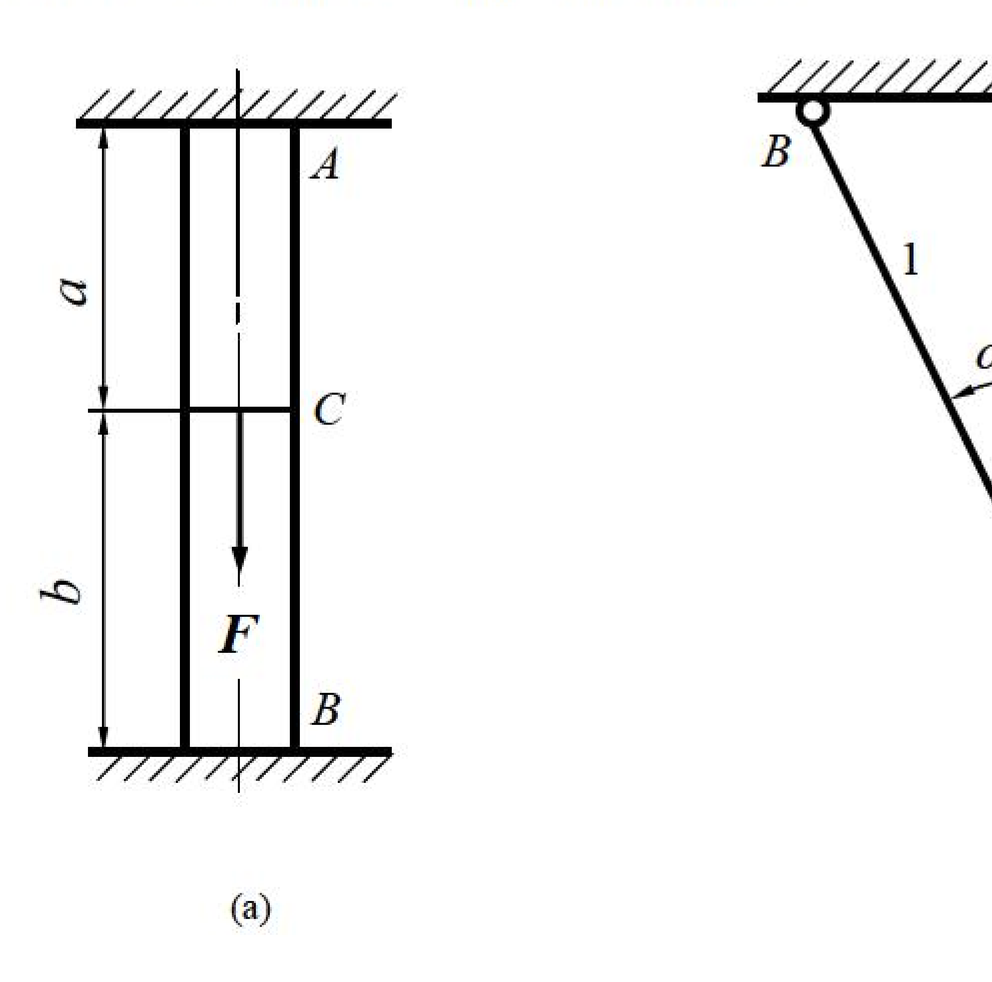


图 2.26

2.8.2 拉(压)杆超静定问题的解法

为了求解超静定问题，必须使建立的独立方程数目与未知力数目相等。因此，除了建立静力学平衡方程外，还必须建立补充方程，且使补充方程的数目等于超静定次数。为此，可通过利用材料力学中杆件的变形规律知识点来建立补充方程。

结构在正常工作时，各部分的变形之间必然存在着一定的几何关系，称为变形协调(或变形几何相容)条件，根据变形协调条件列出的方程称为变形协调方程。而变形与力之间具有一定的物理关系(胡克定律)，将物理关系代入变形协调方程即可得到补充方程。

求解超静定问题的步骤：设想将某一处作为“多余”约束予以解除，用多余约束力代

替，从而得到一个作用有载荷和多余约束(作为未知载荷)的静力平衡方程，再通过变形协调方程获得补充方程。最后求出所有未知力。

下面通过例题来说明拉(压)杆超静定问题的解法。

例 2.8　如图 2.27(a)所示，两端固定的等直杆 AB，在 C 处承受轴向载荷 $\boldsymbol{F}$，杆的拉压刚度为 EA，试求杆端的支反力。

解：(1)　静力学方程。

去掉 B 端约束代之以 $\boldsymbol{F}_{RB}$ (见图 2.27(b))，有

$$\sum F_y = 0，\quad \boldsymbol{F}_{RA} + \boldsymbol{F}_{RB} - \boldsymbol{F} = 0 \tag{a}$$

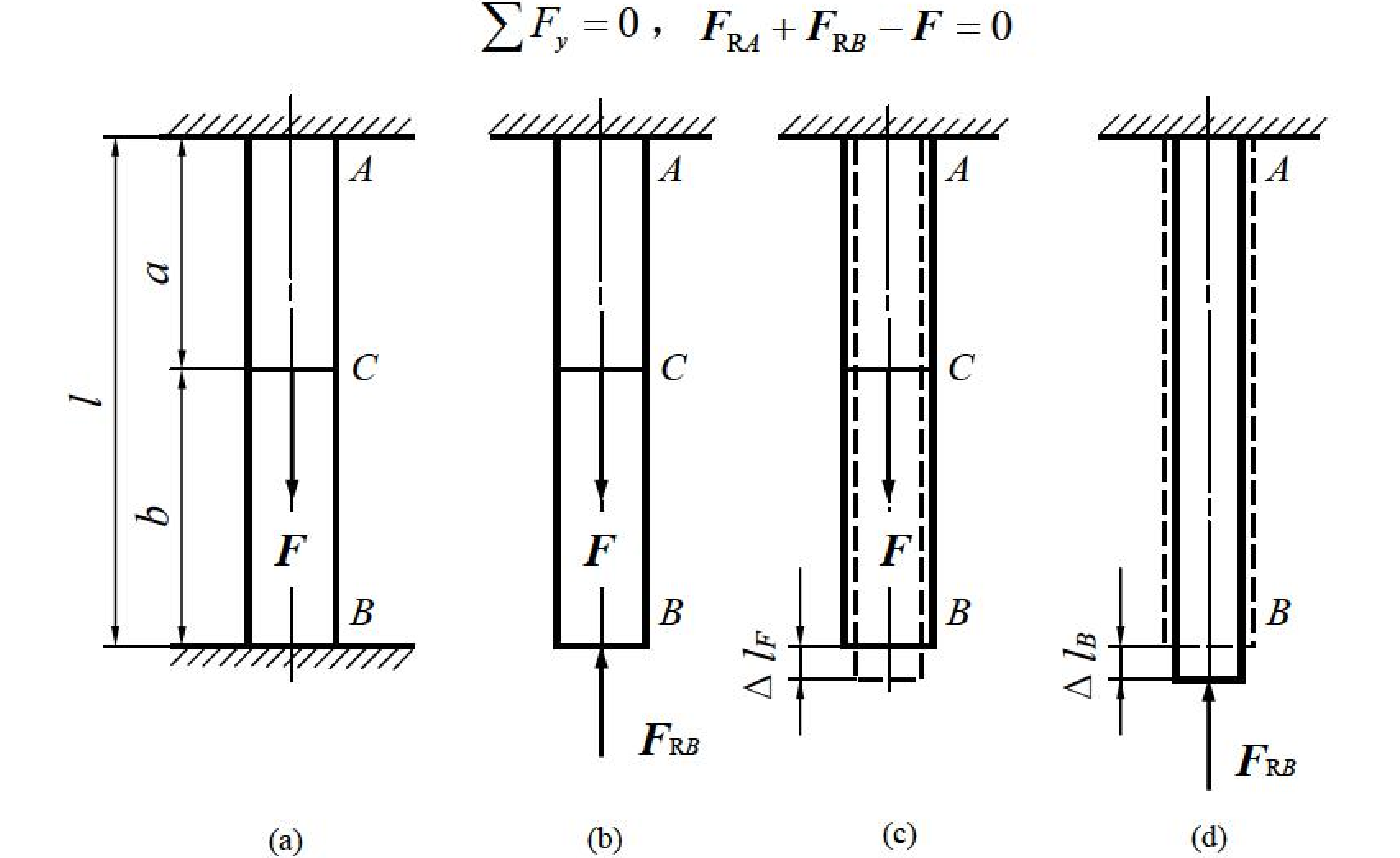


图 2.27

(2)　补充方程。

在载荷 $\boldsymbol{F}$ 和多余约束力 $\boldsymbol{F}_{RB}$ 共同作用下，杆端 B 可能产生位移。在 F 力作用下，杆端 B 下移 Δl_F (见图 2.27(c))；在 $\boldsymbol{F}_{RB}$ 作用下，杆端 B 上移 Δl_B (见图 2.27(d))。因为 B 端是固定端，所以杆端 B 位移为零，变形协调方程为

$$\Delta l_F + \Delta l_B = 0 \tag{b}$$

由物理关系得

$$\Delta l_F = \frac{Fa}{EA} \tag{c}$$

$$\Delta l_B = -\frac{F_{RB} l}{EA} \tag{d}$$

将式(c)、式(d)代入式(b)，得补充方程

$$\frac{Fa}{EA} - \frac{F_{RB} l}{EA} = 0 \tag{e}$$

联立解方程式(a)、式(e)得

$$F_{RA} = \frac{b}{l} F，\qquad F_{RB} = \frac{a}{l} F$$

例 2.9　内燃机的气阀弹簧和车辆的缓冲弹簧常采用图 2.28 所示的双层圆柱压缩弹



簧。若内弹簧的刚度为k_1，外弹簧的刚度为k_2，压力为 F。试求由内、外弹簧各自分担的压力。

解：(1) 静力平衡方程。

设内、外弹簧分担的压为分别为F_1、F_2，平衡方程为

$$F_1+F_2-F=0 \tag{a}$$

(2) 补充方程。

在压力作用下，内、外两个弹簧的压缩变形相等，变形协调方程为

$$\Delta_1=\Delta_2 \tag{b}$$

在F_1作用下，内弹簧变形Δ_1，物理方程为

$$\Delta_1=\frac{F_1}{k_1}$$

在F_2作用下，外弹簧变形Δ_2，物理方程为

$$\Delta_2=\frac{F_2}{k_2}$$

将上面两式代入式(b)，补充方程为

$$\frac{F_1}{k_1}=\frac{F_2}{k_2} \tag{c}$$

(3) 弹簧力计算。

联立解式(a)、式(c)，得

$$F_1=\frac{k_1F}{k_1+k_2}，\quad F_2=\frac{k_2F}{k_1+k_2}$$

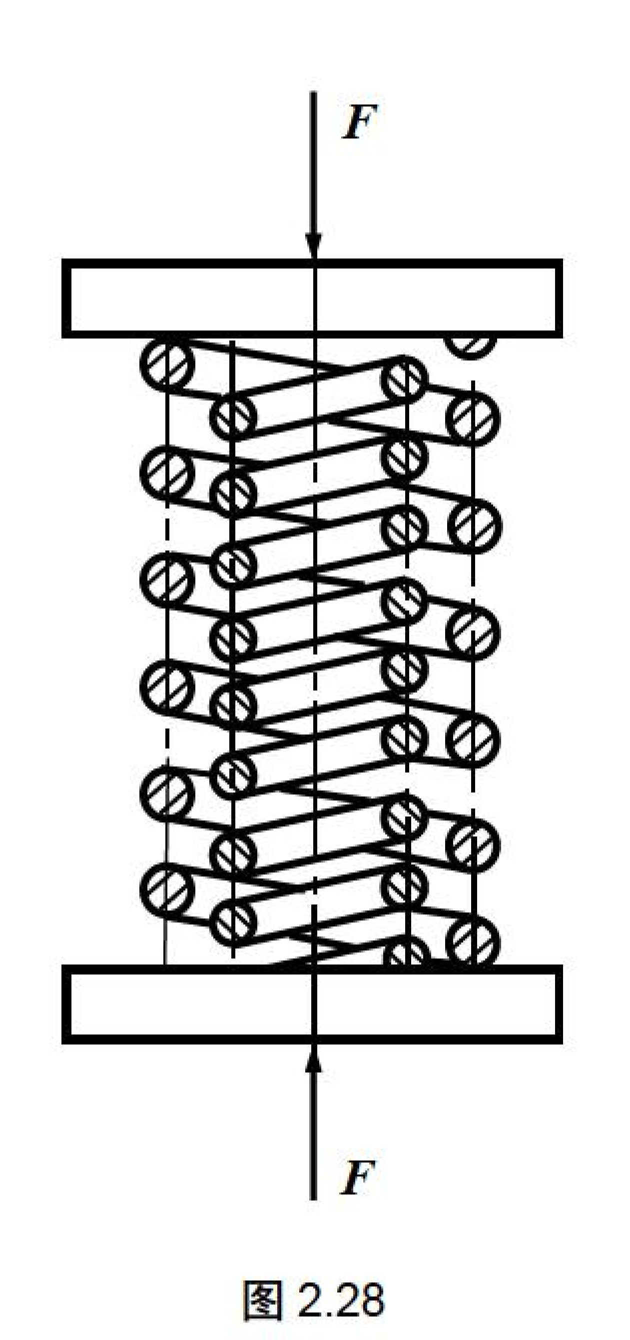


图 2.28

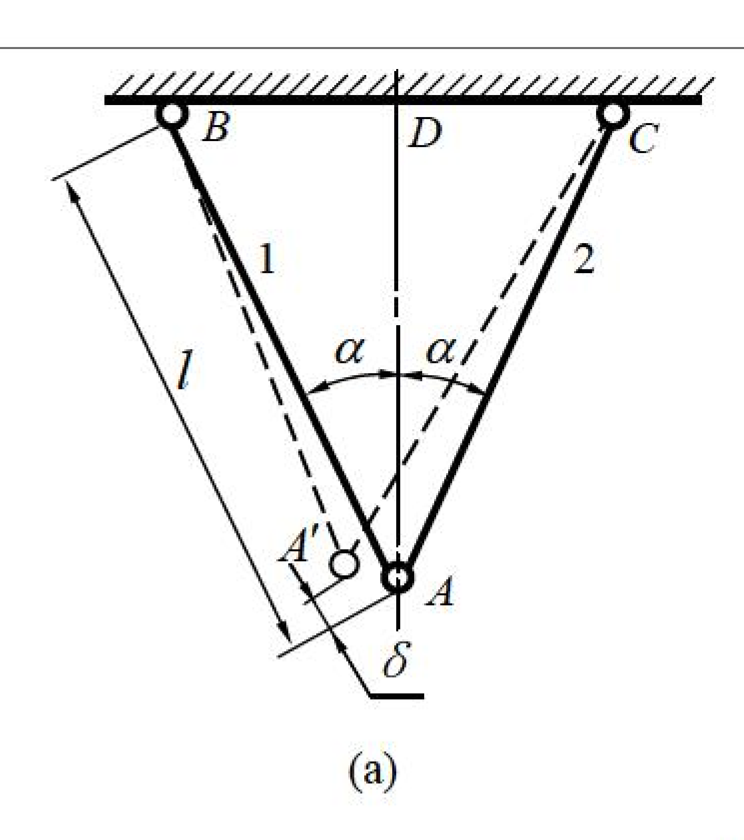
2.8.3 装配应力和温度应力

1. 装配应力

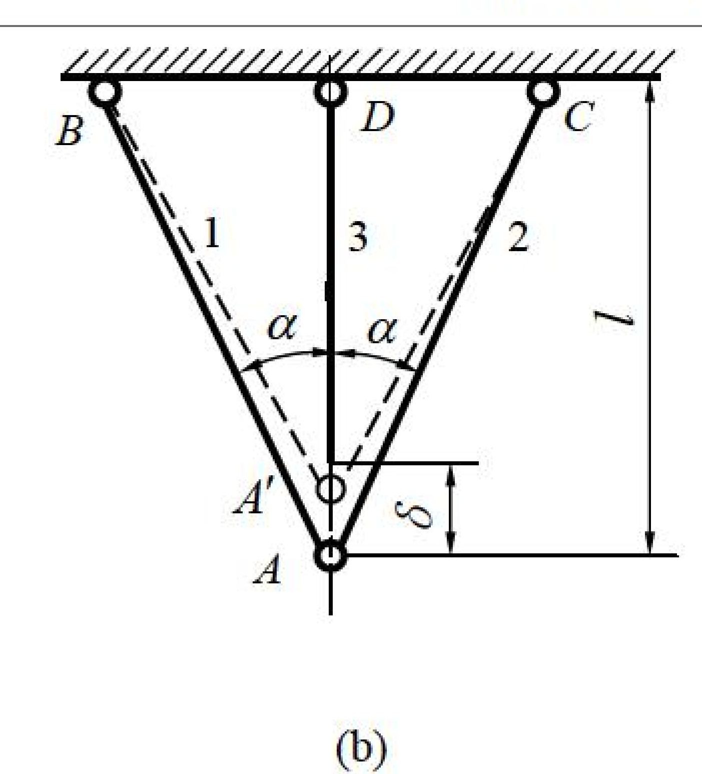
组成结构的杆件通过制造加工后，其尺寸不可避免地存在制造误差。对于静定结构来说，杆件的制造误差只不过造成结构几何形状的轻微变化，但在未受载荷前结构内不会产生内力。如图 2.29(a)所示的两杆构架，杆 1、杆 2 的原设计长度为 l，杆 1 制造出来后比原设计长度短了δ，构架装配后的铰接点A'相对理想点A会产生一定的位移，但不会引起杆 1、杆 2 内产生应力。而对于超静定结构，杆件的制造误差往往会使结构在未受荷载时其内部产生了内力。在图 2.29(b)所示的超静定结构中，若杆 3 比原设计长度 l 短了δ，当杆 1、杆 2 和杆 3 装配到一起(如图中虚线所示)时，则杆 3 必须拉长，同时杆 1、杆 2 必须压短后才能实现。这样，结构在未受载荷时，杆件就已存在内力。这种由于杆件的制造误差造成杆件在装配时产生的附加应力，称为装配应力。

装配应力的问题可用解超静定问题的方法求解。

例 2.10 如图 2.30(b)所示的三杆架构，杆 3 的实际长度比设计长度稍短，制造误差为δ。已知杆 1、杆 2 的抗拉刚度为E_1A_1，杆 3 的抗拉刚度为E_3A_3，试求装配后各杆的轴力。



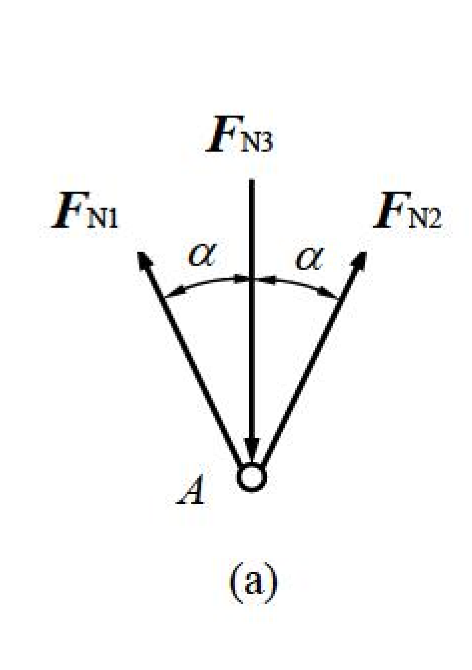
(a)



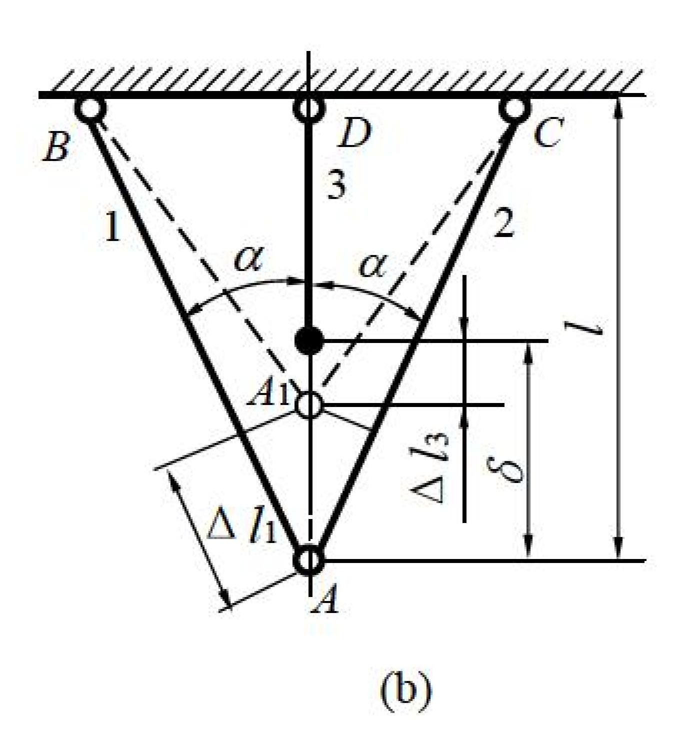
(b)

图 2.29

解：(1)　建立平衡方程。



(a)



(b)

图 2.30

如图 2.30(a)所示，设装配后杆 3 伸长受拉，杆 1 和杆 2 缩短受压，其平衡方程为

$$\sum F_x = 0\text{，}\quad F_{N1}\sin\alpha - F_{N2}\sin\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0\text{，}\quad F_{N1}\cos\alpha + F_{N2}\cos\alpha - F_{N3} = 0$$

联立求解方程，得

$$\left.\begin{aligned} &F_{N1} = F_{N2} \\ &2F_{N1}\cos\alpha - F_{N3} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

(2)　建立补充方程。

由图 2.30(b)可以得到变形协调方程，即

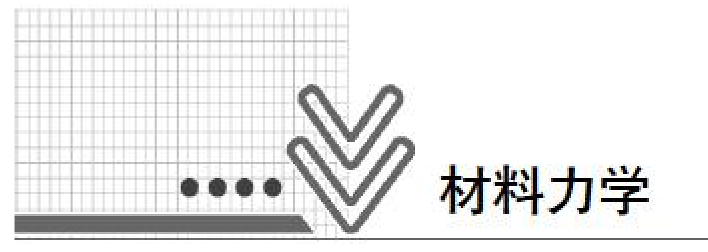
$$\Delta l_3 + \frac{\Delta l_1}{\cos\alpha} = \delta \tag{b}$$

由胡克定律，有

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{F_{N1} l}{E_1 A_1 \cos\alpha} \tag{c}$$

$$\Delta l_3 = \frac{F_{N3} l}{E_3 A_3} \tag{d}$$

将式(c)、式(d)代入式(b)，得补充方程为



$$\frac{F_{N3}l}{E_3A_3}+\frac{F_{N1}l}{E_1A_1\cos^2\alpha}=\delta \tag{e}$$

(3) 各杆轴力。

联立求解式(a)、式(e)，得各杆轴力为

$$F_{N1}=F_{N2}=\frac{\delta E_1A_1E_3A_3\cos\alpha}{l(E_3A_3+2E_1A_1\cos^3\alpha)}$$

$$F_{N3}=\frac{2\delta E_1A_1E_3A_3\cos^3\alpha}{l(E_3A_3+2E_1A_1\cos^3\alpha)}$$

装配应力是杆在载荷作用之前就具备的应力，又称其为初应力。工程中装配应力的存在常常是不利的，设计中要尽量避免产生装配应力。但有时也利用装配应力，如轴承内孔与轴的配合就是利用过盈配合产生的装配应力，保证轴和轴承连接牢固。

2. 温度应力

工程实际中，结构中的杆件往往会遇到温度的变化(工作环境或季节更替引起的)，而温度变化会引起杆件的热胀冷缩，导致杆件的伸长或缩短。对于静定结构，杆件长度的变化不会引起构件的内力，图 2.31(a)所示为一端固定、一端自由的等直杆，温度改变使杆的自由端产生位移，杆内不会有内力。对于超静定结构，如图 2.31(b)所示的两端固定的杆件，在温度升高时，杆件会热胀伸长，但因固定端约束，杆件两端不会产生位移，导致杆内产生压缩应力。这种因为温度变化而引起杆件内产生的应力称为温度应力或热应力。

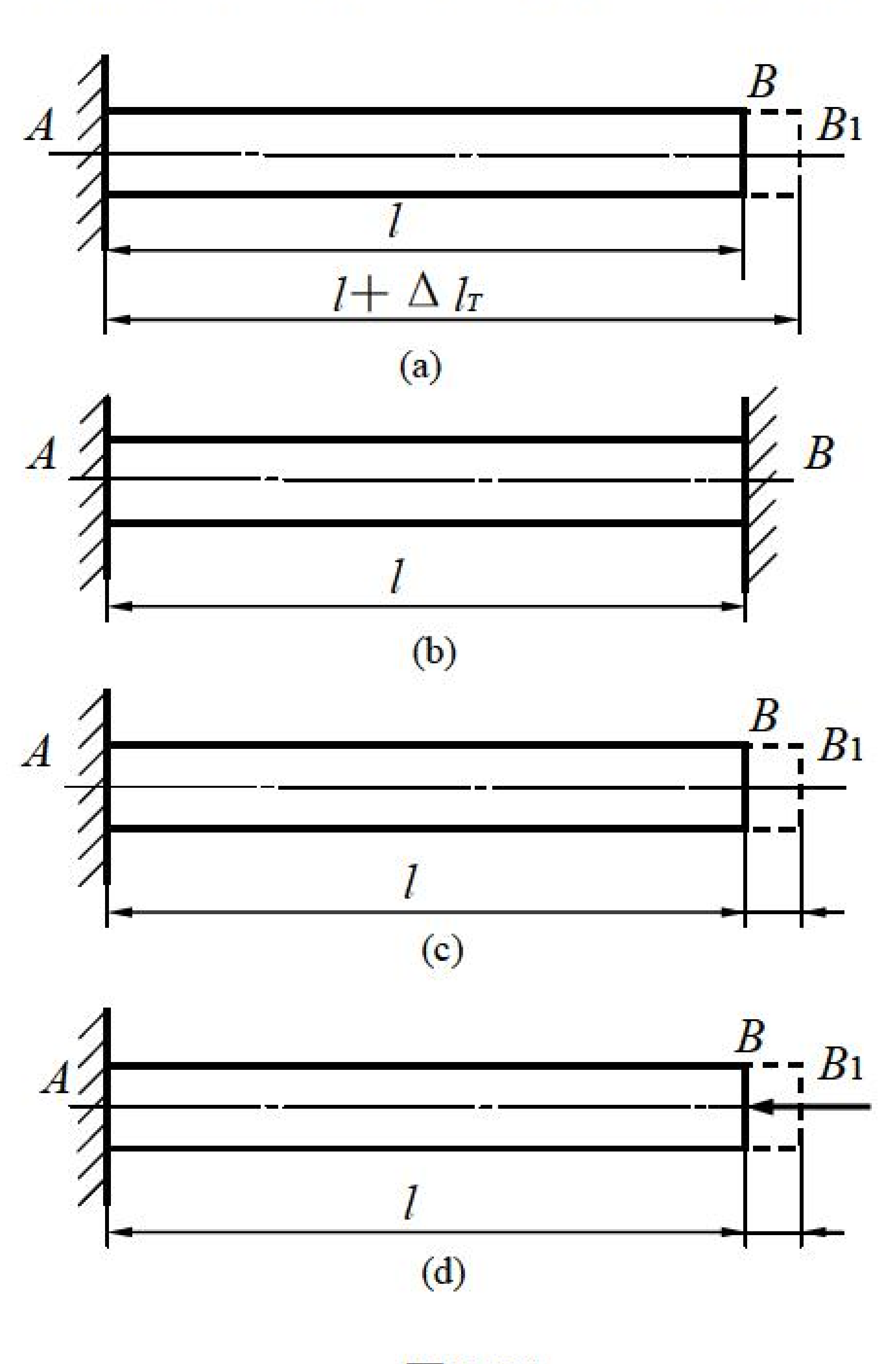


图 2.31

温度应力的问题也可用解超静定问题的方法求解。

例 2.11 如图 2.31(b)所示的等直杆 AB，两端分别与刚性支承连接，设两固定端之间的距离为 l，杆的拉压刚度为 EA，材料线胀系数为 α。试求温度升高 ΔT 度时，杆内的温度应力。

解：(1) 杆 AB 两端约束反力 F_{RA}、F_{RB}，即为轴力，有

$$F_{RA} = F_{RB}$$

(2) 建立补充方程。

假设去掉右端约束，允许自由膨胀，当温度升高 ΔT 时，杆 AB 伸长量为

$$\Delta l_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot l \tag{a}$$

在去掉的右端约束用一个作用 F_{RB} 代替，使杆缩短，缩短量为

$$\Delta l_F = \frac{F_{RB} l}{EA} \tag{b}$$

实际上，由于杆两端固定，杆长没有变化，则变形协调方程为

$$\Delta l_T = \Delta l_F \tag{c}$$

式(a)、式(b)代入式(c)，得

$$F_{RB} = EA\alpha \cdot \Delta T$$

(3) 温度应力。

杆件横截面上正应力为

$$\sigma = \frac{F_{RB}}{A} = E\alpha \cdot \Delta T \tag{d}$$

若杆件材料为碳钢，其 $\alpha = 1.2 \times 10^{-3}$/℃，$E = 210\text{GPa}$，当温度升高 $\Delta T = 40$ ℃时，杆内的温度应力由式(d)计算可得

$$\sigma = E \cdot \alpha \cdot \Delta T = 1.2 \times 10^{-3} \times 210 \times 10^9 \times 40\text{Pa} = 100 \times 10^6\text{Pa} = 100\text{MPa}$$

上式计算表明，在超静定结构中，温度应力是一个不容忽视的因素。如在一些高温管道中每隔一段距离要设计一个弯道(见图 2.32)；普通铁路钢轨接头处通常留有一定空隙；高铁的钢轨是无缝钢轨，为不使温度应力引起钢轨扭曲变形，必须用许多扣件来锁定扣住。

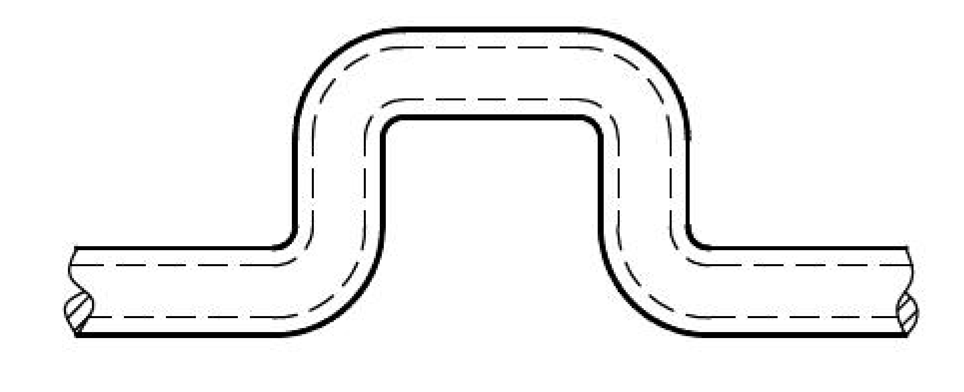


图 2.32

2.9 应力集中的概念

正应力计算公式(即式(2.1))仅适应于等截面直杆，对于一些直径变化缓慢的拉(压)杆如锥形杆，也可用其公式近似计算应力。但在工程实际中，由于结构设计需要，常常会遇到一些横截面沿轴线骤然改变的杆件，如具有螺栓孔的钢板，带有螺纹的拉杆、台阶轴等构

件。试验结果和理论分析表明，在构件尺寸骤然改变处的横截面上应力并不是均匀分布的。图 2.33(a)所示为开有圆孔的板条承受轴向载荷时，通过孔中心的横截面上的应力分布；图 2.33(b)所示为变宽度矩形板条受轴向载荷时，在宽度骤变处横截面上的应力分布。从图中可以看出，在圆孔或转角附近的局部区域内应力会急剧增加，而在离孔口或转角较远处应力会逐渐变小并趋于均布。这种因杆件截面骤然变化而引起的局部应力急剧增大的现象，称为**应力**集中。

设发生应力集中截面上的最大应力为$\sigma_{\max}$，同一截面上视作均匀分布的名义应力为σ，则比值称为理论应力集中因数，其值大于 1，它反映了应力集中程度。试验结果表明，截面尺寸改变越急剧，如转角处越尖，过渡半径越小，K 值越大，应力集中程度越严重。因此，设计构件时应尽量避免横截面的急剧改变，在横截面变化处采取过渡圆，且尽量使过渡圆半径大一些(图 2.33(b)中的 r 值)。

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma}$$

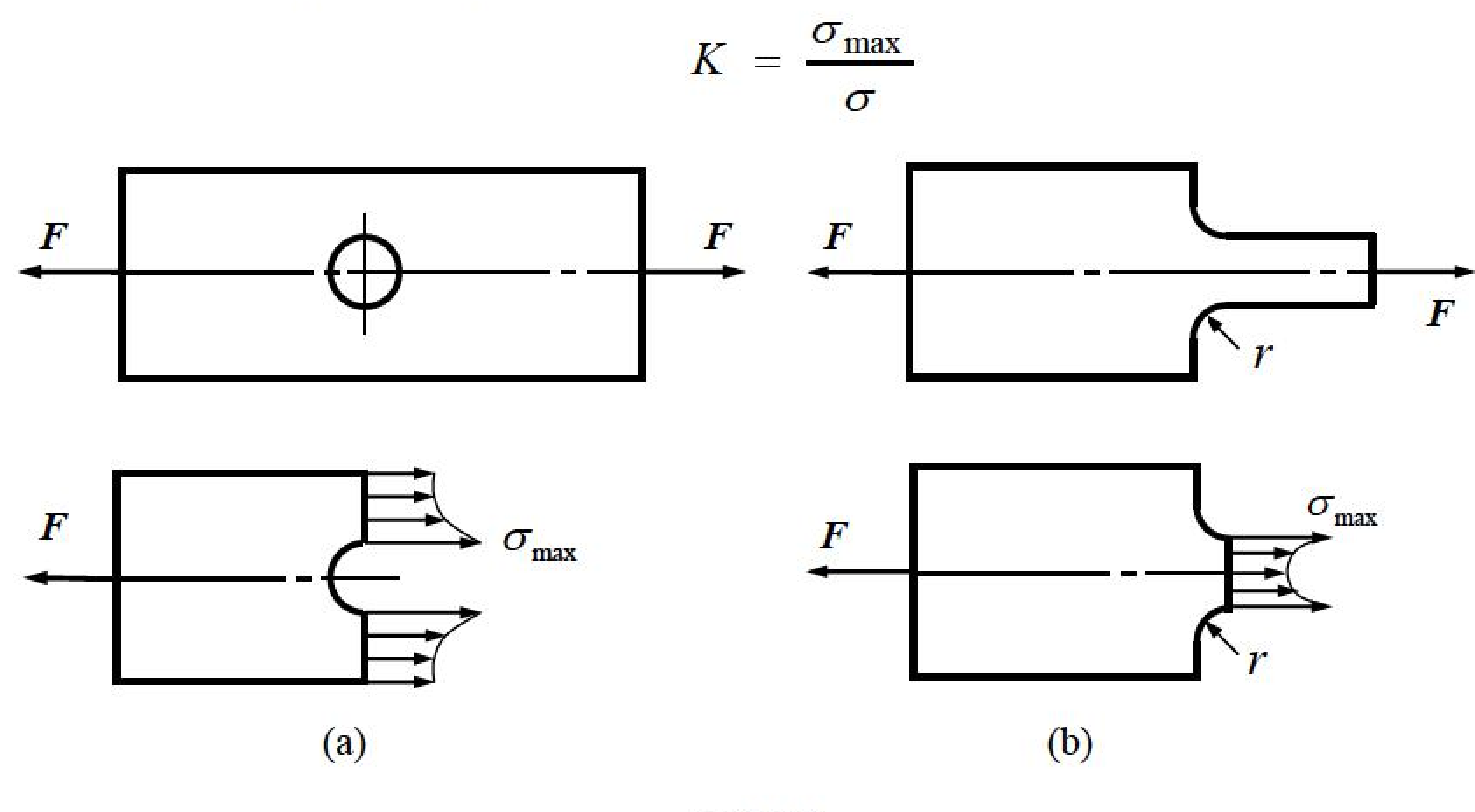


图 2.33

应力集中对构件承载力的影响程度取决于构件材料和载荷类型。

(1) 对于静载作用下的塑性材料杆件，应力集中影响不大。因为塑性材料有屈服阶段，当局部最大应力$\sigma_{\max}$达到材料屈服极限σ_s时，变形增大，而应力基本不变。如载荷继续增加，载荷增量主要由未屈服的材料承担，使截面上其他点的应力相继增大到屈服极限，此时，杆件才会丧失正常工作能力。因此，对于塑性材料制成的杆件，在静载荷作用下，通常不考虑应力集中的影响。

(2) 对于静载荷作用下的脆性材料杆件，因为材料没有屈服阶段，局部最大应力$\sigma_{\max}$始终为最大值。当$\sigma_{\max}$到达材料强度极限σ_b时，就引起杆件开裂和断裂破坏。因此，脆性材料必须按局部最大应力值进行强度计算。但对于灰口铸铁，应力集中的影响并不明显，也可不考虑应力集中问题。

(3) 当构件受冲击载荷或交变载荷作用时，不管是塑性材料还是脆性材料，应力集中对构件的强度都有严重影响，往往应力集中处是构件疲劳破坏的根源。

本 章 小 结

轴向拉伸和压缩杆件的受力特征是在杆的两端受一对大小相等、方向相反、作用线与杆轴线重合的集中力。其变形特征是杆将发生轴线方向的伸长或缩短。

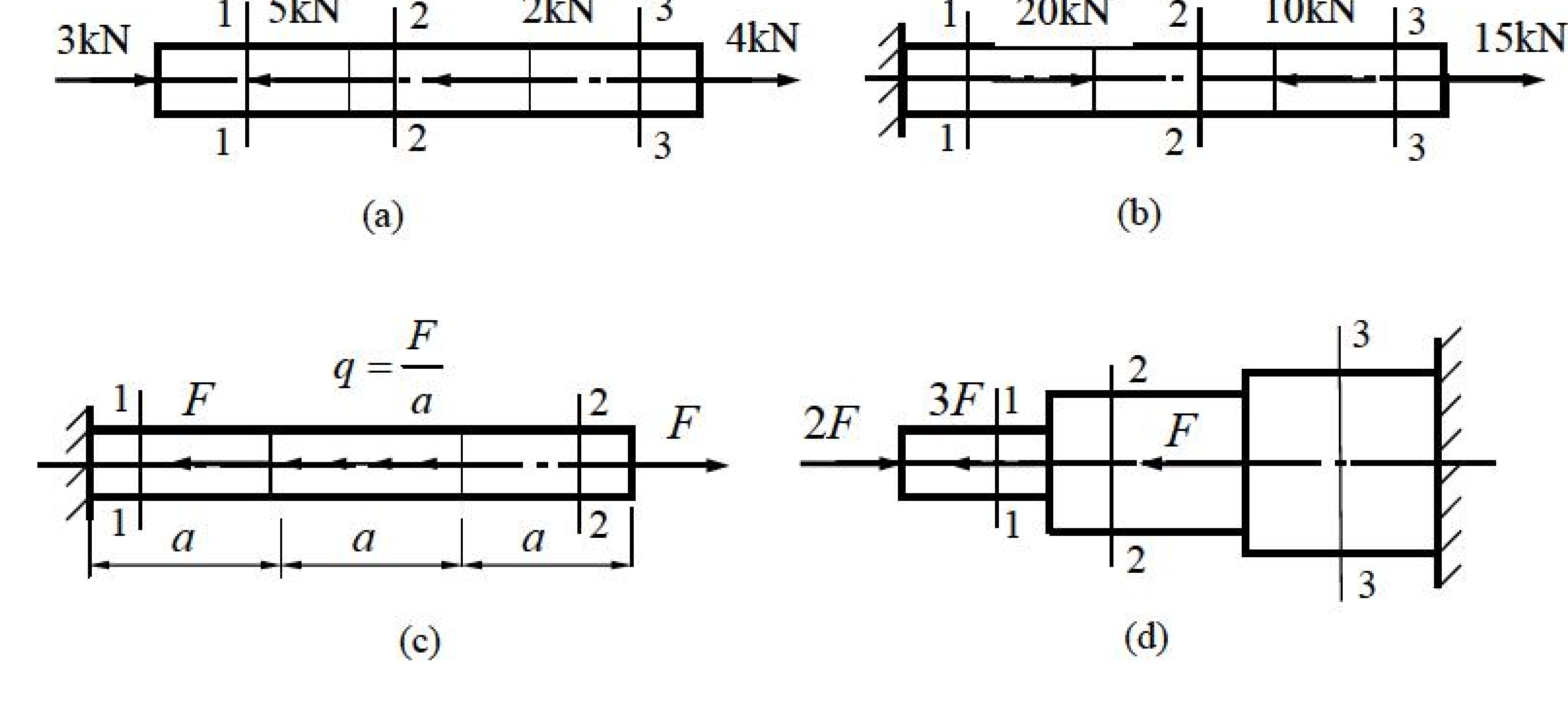
等直杆在轴向拉伸时，会引起杆轴向尺寸的伸长和横向尺寸的缩小，即产生纵向变形和横向变形。在轴向压缩时，杆轴向尺寸会缩短，横向尺寸会增大，杆件在轴向拉伸和压缩变形中会积蓄应变能。

材料的力学性能是指材料在外力作用下表现出的变形、破坏等方面的性质。不同的材料有不同的力学性能，材料的力学性能是由试验来测定的。低碳钢材料是一种典型的塑性材料，根据低碳钢拉伸图和应力-应变曲线图的特征，可将拉伸过程分为四个阶段并得到相应的力学性能：①弹性阶段，②屈服阶段，③强化阶段，④局部变形阶段。灰口铸铁是一种典型的脆性材料。灰口铸铁拉伸时，其应力-应变曲线没有明显的直线部分，所以铸铁等脆性材料不宜作为抗拉构件的材料。低碳钢压缩试验的应力-应变曲线与低碳钢拉伸时的曲线大致重合，其力学性能指标与拉伸时大致相同。脆性材料在压缩和拉伸时的力学性能差别较大，铸铁在压缩时的强度极限和伸长率较拉伸时大得多，抗压强度在数值上是抗拉强度高 4～5 倍。脆性材料宜用作受压构件。

只靠静力学方程不能求解的问题称为超静定问题。拉(压)杆或杆系中超静定问题通过变形协调方程获得补充方程的方法求解。装配应力、温度应力等问题也可用解超静定问题的方法求解。杆件截面骤然变化而引起的局部应力急剧增大的现象，称为应力集中。当构件受冲击载荷或交变载荷作用时，应力集中对构件的强度都有严重影响。

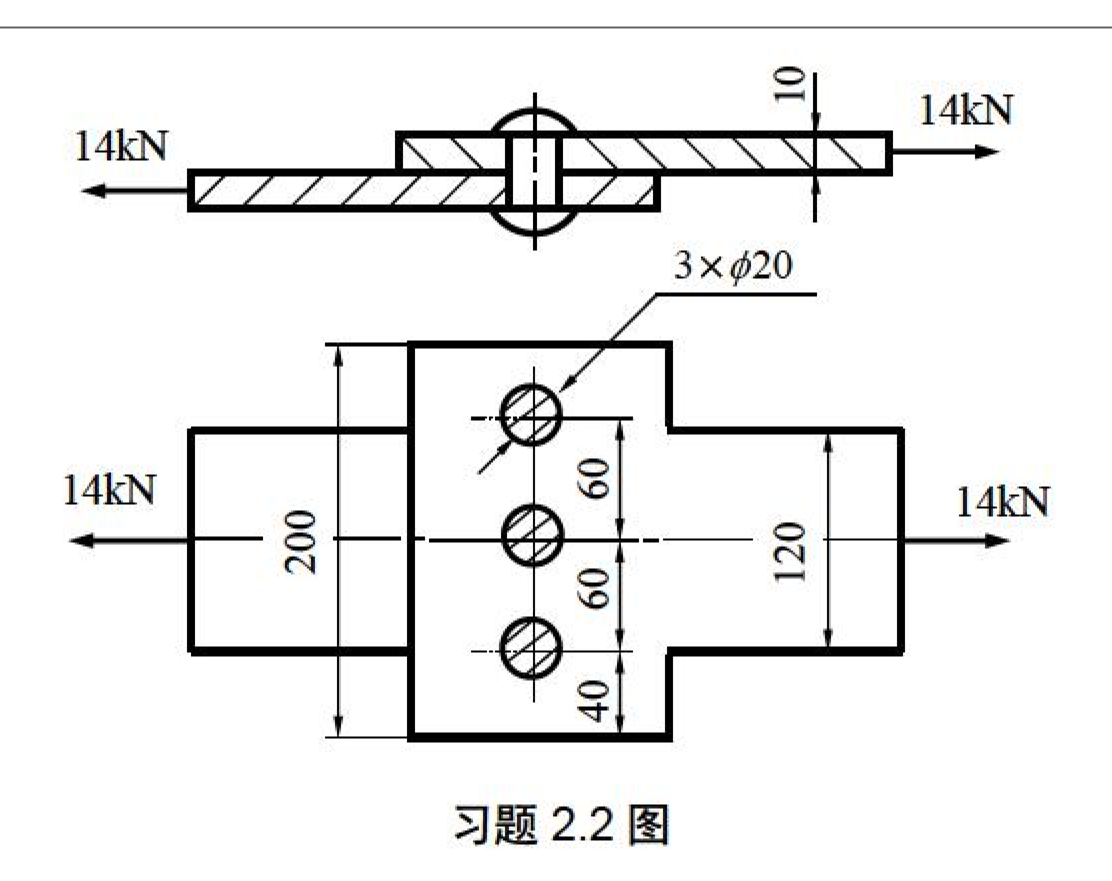
习　　题

2.1　试求习题 2.1 图所示杆件各段的轴力，并作出轴力图。



习题 2.1 图

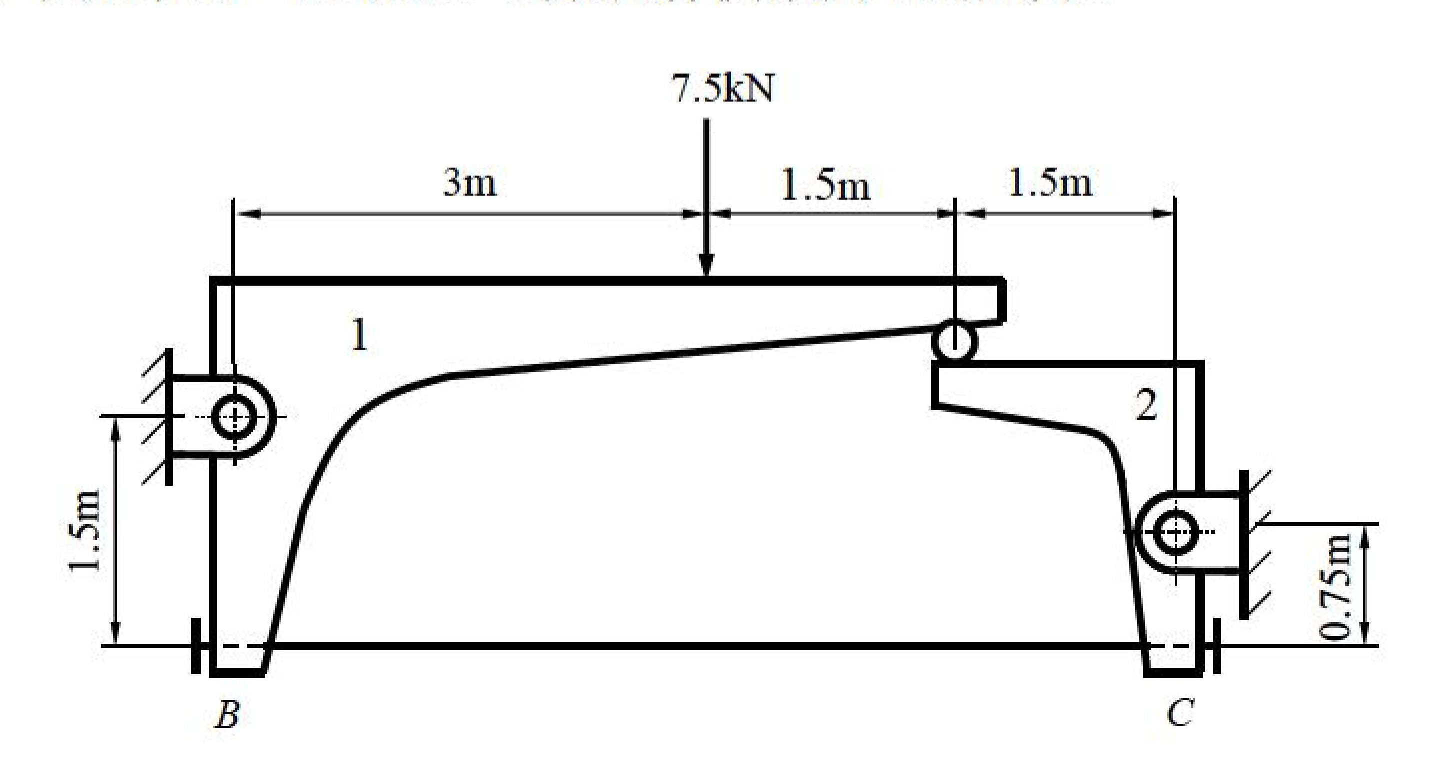
2.2　两钢板用 3 个铆钉连接，受 14kN 的纵向拉力作用，板及铆孔尺寸如习题 2.2 图所示，试求危险截面上的平均应力。



习题 2.2 图

2.3 在习题 2.1(d)图所示的阶梯状圆截面直杆中，杆横截面直径从左至右分别为 $d_1 = 15\text{mm}$，$d_2 = 20\text{mm}$，$d_3 = 24\text{mm}$，F=10kN。试计算各段杆内的应力。

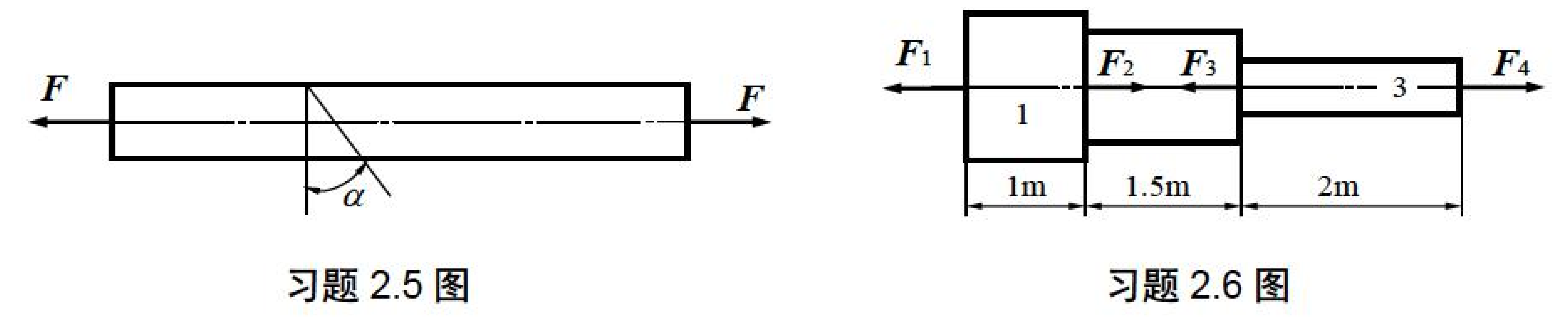
2.4 在习题 2.4 图所示结构中，与 BC 杆连接的 1、2 两部分均为刚体，若钢拉杆 BC 的横截面为圆，其直径 $d = 12$ mm。试求拉杆横截面上的应力。



习题 2.4 图

2.5 习题 2.5 图所示拉杆由两根木杆黏结而成，承受轴向拉力 F 的作用，若要使黏结面上的正应力为切应力的 2 倍，则黏结面的方位角 α 应为何值？

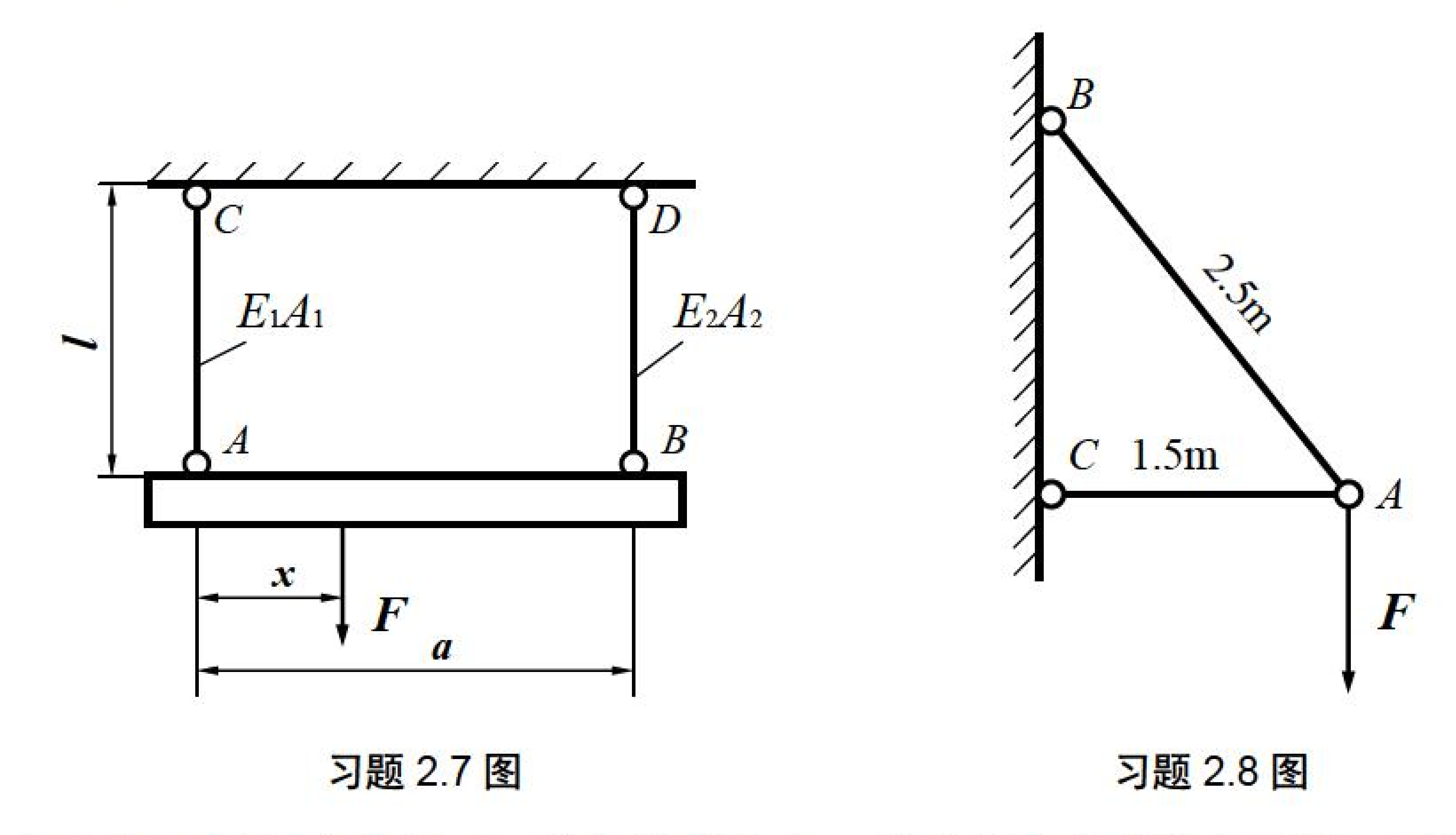
2.6 习题 2.6 图所示一阶梯轴杆件，钢杆弹性模量 E = 200GPa，横截面面积 $A_1 = 400\text{mm}^2$，$A_2 = 250\text{mm}^2$，$A_3 = 200\text{mm}^2$，作用力 $F_1 = 30\text{kN}$，$F_2 = 15\text{kN}$，$F_3 = 10\text{kN}$，$F_4 = 25\text{kN}$。试求每段杆的内力、应力、应变、伸长及全杆的总伸长。



习题 2.5 图　　习题 2.6 图

2.7 习题 2.7 图所示一刚性杆 AB，由两根杆长为 l 的拉杆 AC、BD 悬挂，两杆拉伸刚度分别为 E_1A_1、E_2A_2，受载荷 F 的作用。已知两杆作用点 A、B 距离为 a。试求横杆 AB 保持水平时载荷作用点至 A 点的距离 x 为多少？

2.8　习题 2.8 图所示为一三脚架，在节点 A 受铅垂力 $F = 20\text{kN}$ 的作用，设 AB 杆为圆截面钢杆，直径 d=8mm，杆 AC 为空心圆钢杆，面积 $A = 40\text{mm}^2$，两杆的弹性模量 E=200GPa，试求节点 A 的位移。

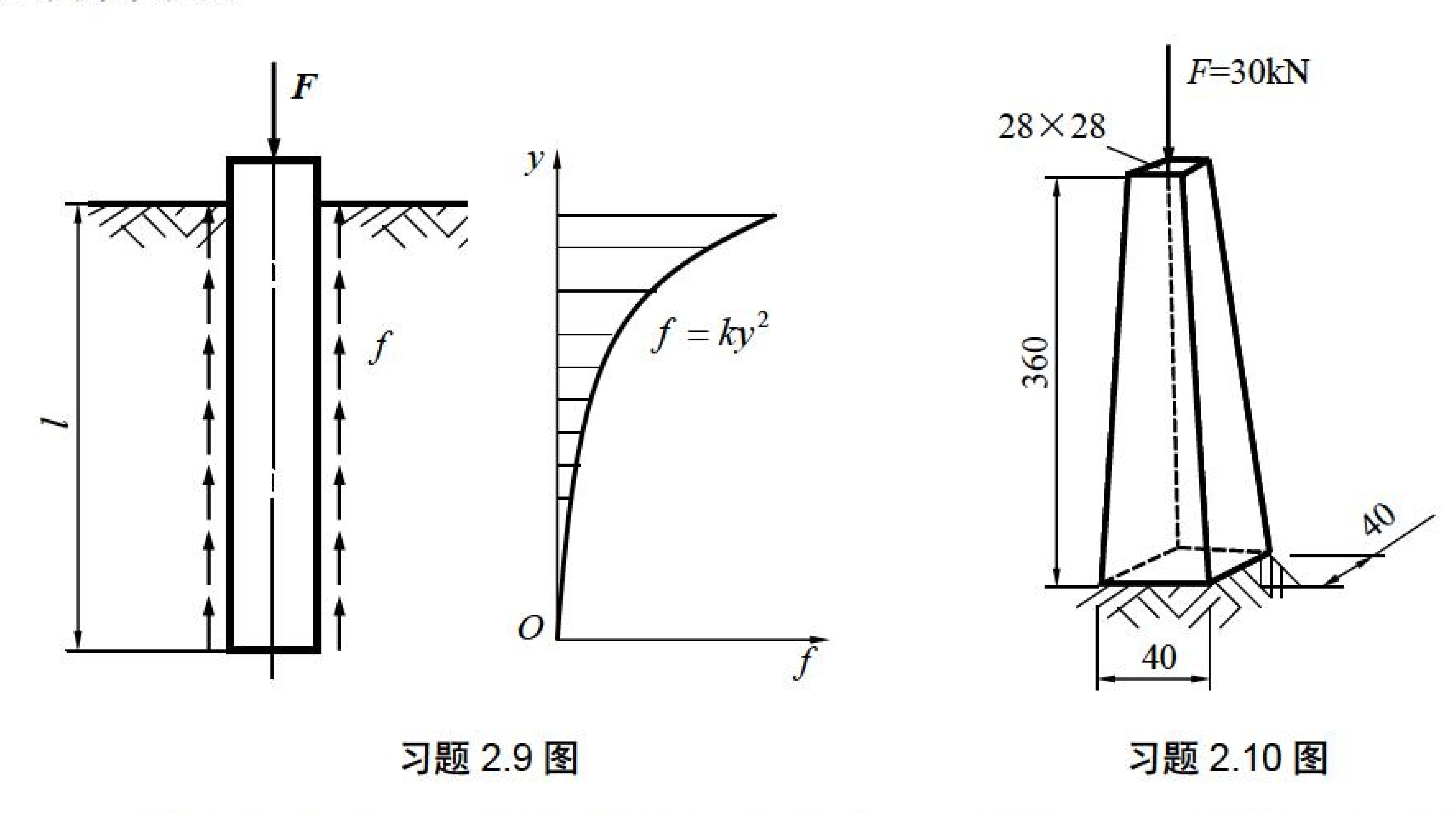


习题 2.7 图　　　　习题 2.8 图

2.9　打入黏土的木桩长为 l，顶上载荷为 F。设载荷全由摩擦力承担，且沿木桩单位长度摩擦力 f 按抛物线 $f = ky^2$ 变化，其中 k 为常数。若 $F = 420\text{kN}$，$l = 12\text{m}$，$A = 640\text{cm}^2$，$E = 10\text{GPa}$，试确定常数 k 并求木桩的缩短量。

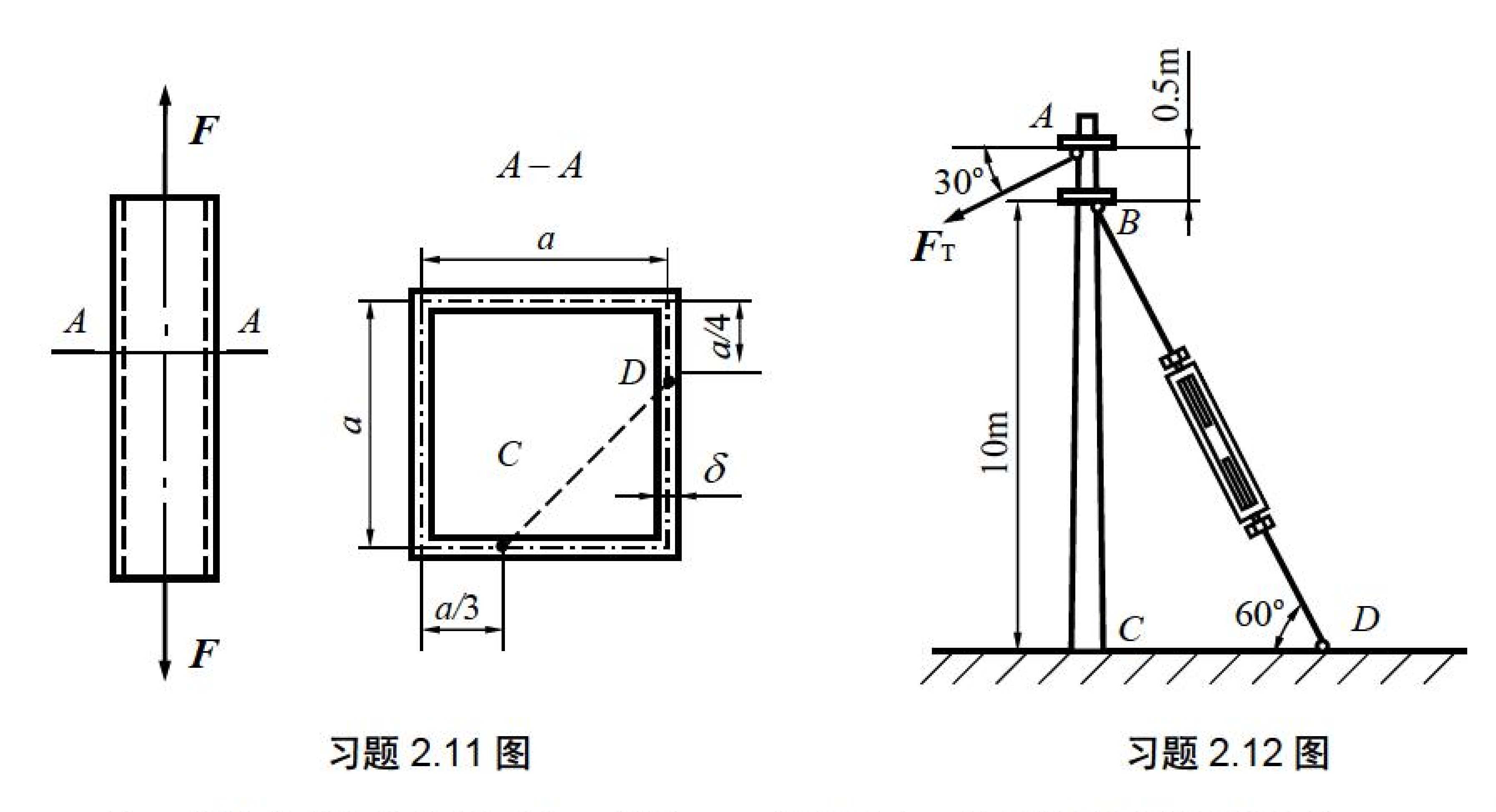
2.10　铸铁尺寸如习题 2.10 图所示，轴向压力 $F = 30\text{kN}$，若不计自重，设弹性模量 E=120GPa，试求柱的变形。

2.11　受轴向拉力 F 作用的薄壁拉杆如习题 2.11 图所示，已知该杆材料的弹性模量 E，泊松比 μ，杆件尺寸如习题 2.11 图所示，试求在载荷拉力 F 作用下，截面内 C、D 两点间的距离改变量。



习题 2.9 图　　　　习题 2.10 图

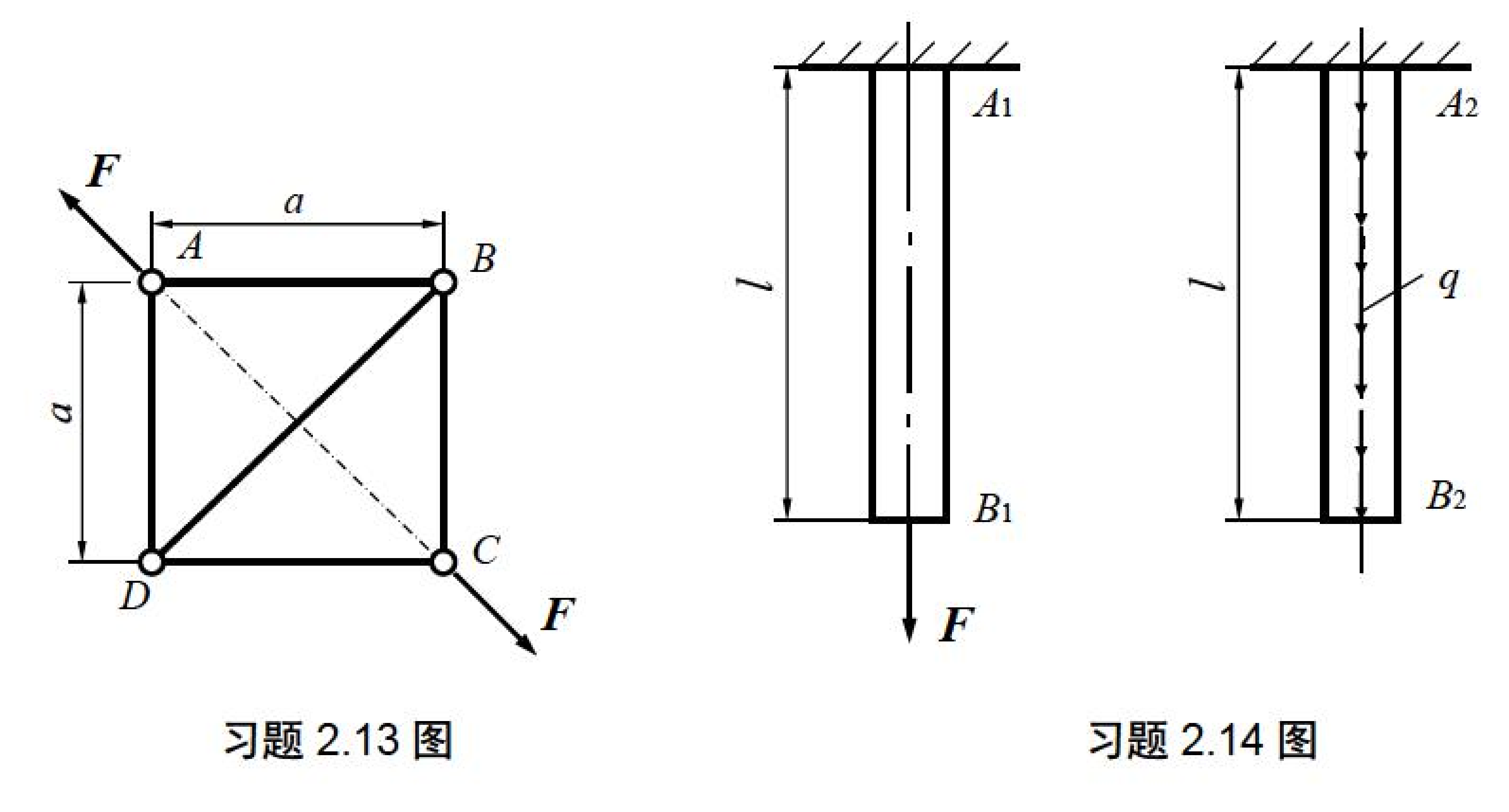
2.12　电线杆由钢缆通过张紧器施加拉力使之稳固，已知钢缆的横截面积为 1000mm^2，$E = 200\text{GPa}$，$[\sigma] = 170\text{MPa}$，输电导线张紧力 $F_T = 10\text{kN}$。欲使电线杆对基础的铅垂作用力为 100kN，张紧器的螺杆需相对移动多少？并校核此时钢缆强度是否安全。



习题 2.11 图　　　　习题 2.12 图

2.13　由 5 根钢杆组成的杆系如习题 2.13 图所示，各杆的横截面积均为 500mm^2，$E = 200\text{GPa}$，设沿对角线方向作用一对 20kN 的力，试用能量法求 A、C 两点的距离改变。

2.14　习题 2.14 图所示两根杆 A_1B_1 和 A_2B_2 的材料相同，其长度和横截面积也相同。杆 A_1B_1 承受作用在端点的集中载荷 $\boldsymbol{F}$，杆 A_2B_2 承受沿杆长均匀分布的载荷，其集度 $q = \dfrac{\boldsymbol{F}}{l}$，试比较两杆内积蓄的应变能。



习题 2.13 图　　　　习题 2.14 图

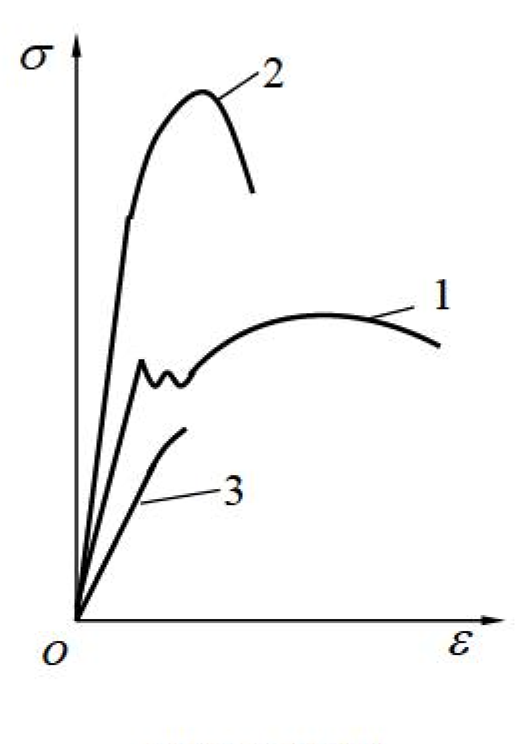
2.15　习题 2.15 图所示为 3 种材料拉伸时的应力-应变曲线，试对 3 种材料的强度极限、弹性模量、伸长率按由大到小的顺序排序。

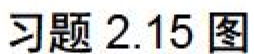
2.16　某拉伸试验机的结构示意图如习题 2.16 图所示。设试验机的 CD 杆与试样 AB 的材料同为低碳钢，其 $\sigma_p = 200\text{MPa}$，$\sigma_s = 240\text{MPa}$，$\sigma_b = 400\text{MPa}$，试验机最大拉力为 100kN。

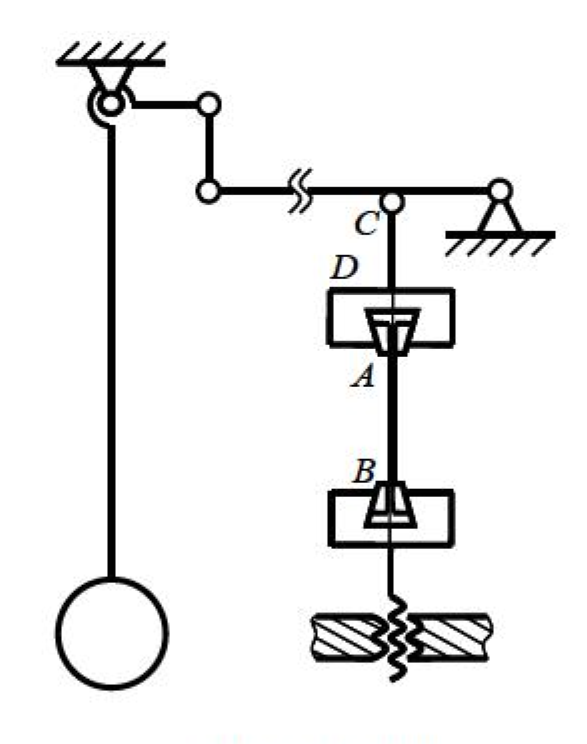
(1)　用这一试验机做拉断实验时，试样最大直径可达何值？

(2)　若设计时取试验机的安全数 $n = 2$，试确定 CD 杆的直径。

(3)　若试样直径 d =10mm，今欲测弹性模量 E，求所加载荷的最大限定值。




习题 2.15 图



习题 2.16 图

2.17　一根材料为 Q235 钢的拉伸试样，其直径 d = 10mm，标注长度 l = 100mm，其比例极限 $\sigma_p = 200\text{MPa}$ 。当试验机上载荷数达到 $F = 10\text{kN}$ 时，通过专用仪器量得标距内伸长量 $\Delta l = 0.0607\text{mm}$，直径缩小量 $\Delta d = 0.0017\text{mm}$ 。试求此时试样横截面上的正应力 σ，并求出材料的弹性模量 E 和泊松比 μ 。

2.18　已知拉伸试样直径 $d = 10\text{mm}$，标距长度 $l = 50\text{mm}$，拉伸试验到屈服阶段测得载荷 F 与伸长 Δl 的记录如习题 2.18 表所示。试样拉断后，断口标距 $l_1 = 58.3\text{mm}$，断口截面直径 $d_1 = 6.2\text{mm}$，试求

习题 2.18 表

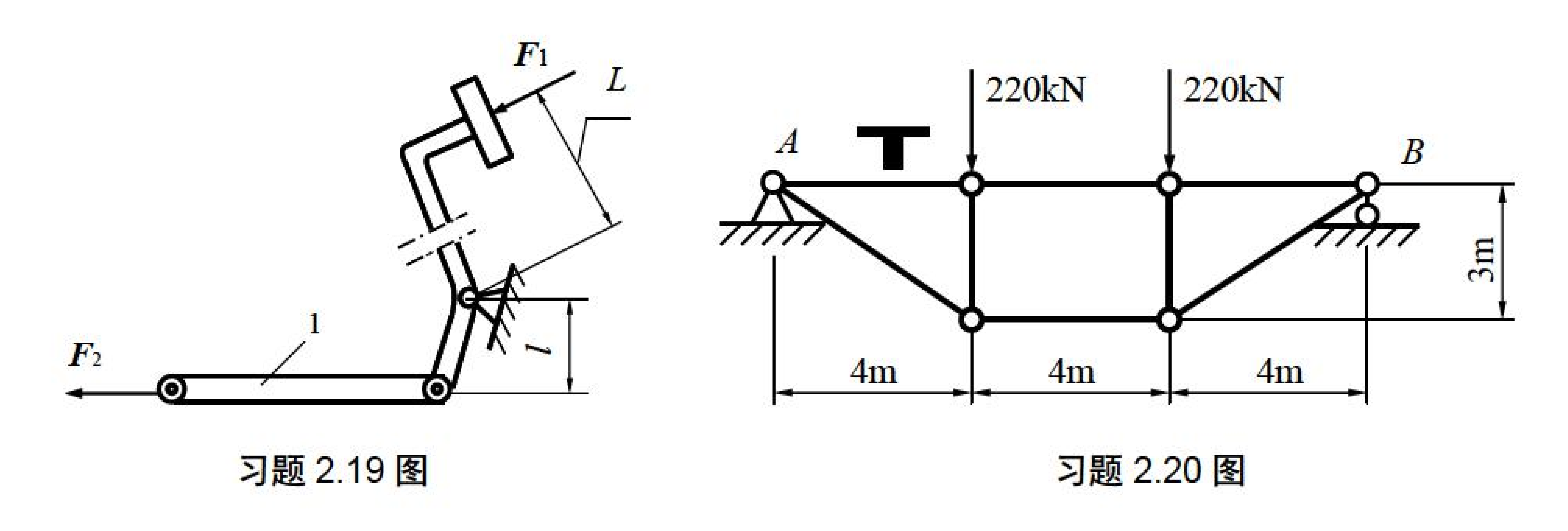
F/kN	0	4.07	9.5	17.6	25.7	29.8	32.5	35.2	36.6	37.9	39.3	39.5
Δl / 10^{-6}mm	0	7.5	25.0	50.0	75.0	90.0	108	128	150	183	220	295

(1)　试作出试件在屈服阶段前的 $\sigma - \varepsilon$ 曲线，并在图中标出材料的比例极限 σ_p 、屈服极限 σ_s 和弹性模量 E。

(2)　材料的伸长率和断面收缩率。

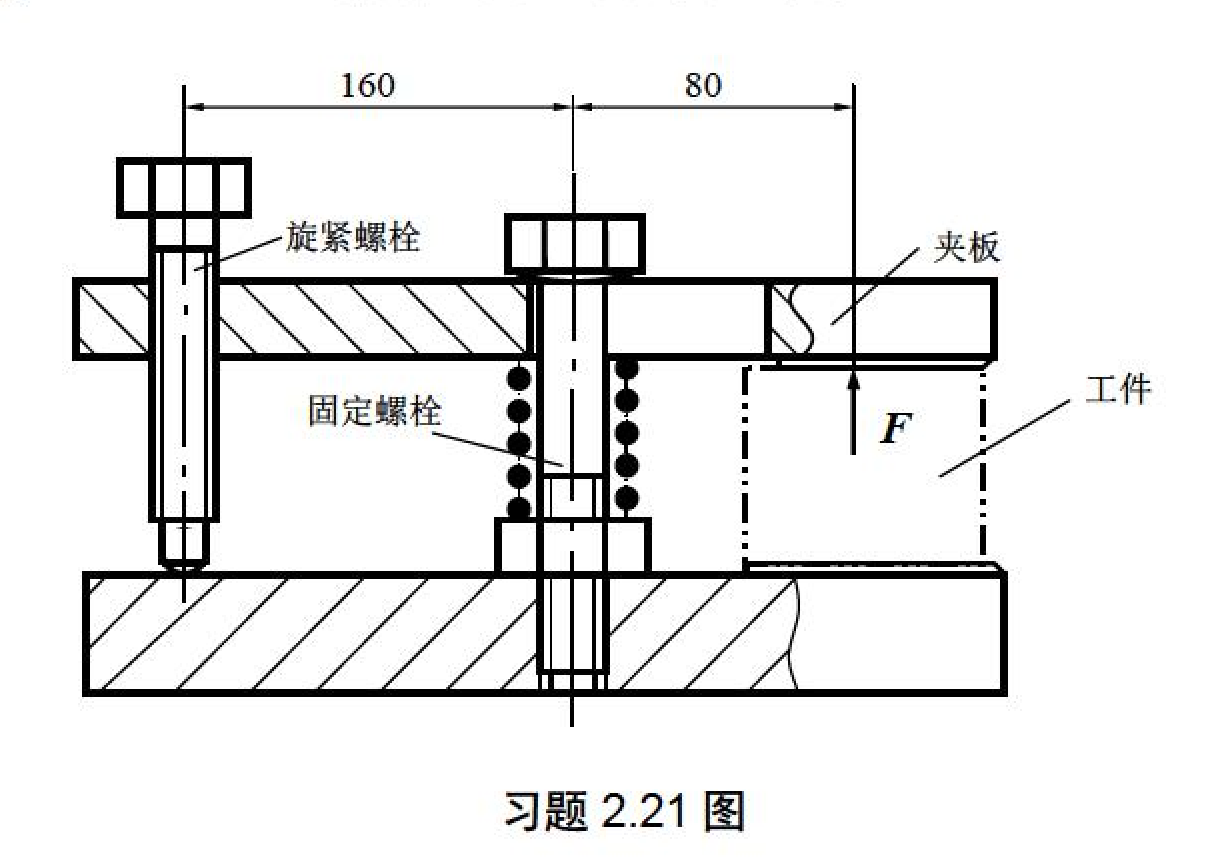
2.19　汽车离合器踏板如习题 2.19 图所示。已知踏板受到压力 $F_1 = 400\text{N}$ 的作用，拉杆 1 的直径 D = 10mm，杠杆臂长 L = 330mm，l = 56mm，拉杆 1 的许用应力 $[\sigma] = 100\text{MPa}$ 。试校核拉杆 1 的强度。

2.20　一桁架受力如习题 2.20 图所示，各杆件由两等边角钢组成。已知材料的许用应力 $[\sigma] = 170\text{MPa}$，试选择杆 AC 和杆 CD 的角钢型号。



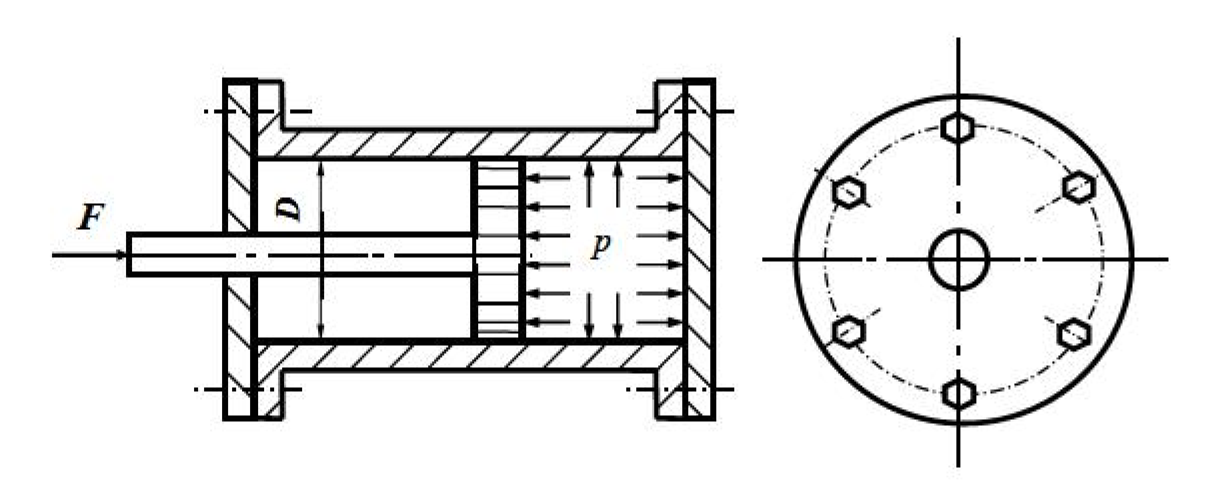
习题 2.19 图　　习题 2.20 图

2.21 螺旋压紧装置如习题 2.21 图所示。现已知工件所受压紧力为 F=4kN，装置中旋紧螺栓的螺纹内径 $d_1=13.8\text{mm}$，固定螺栓的螺纹内径 $d_2=17.3\text{mm}$。两根螺栓材料相同，其许用应力$[\sigma]=100\text{MPa}$。试校核螺栓的强度是否安全。



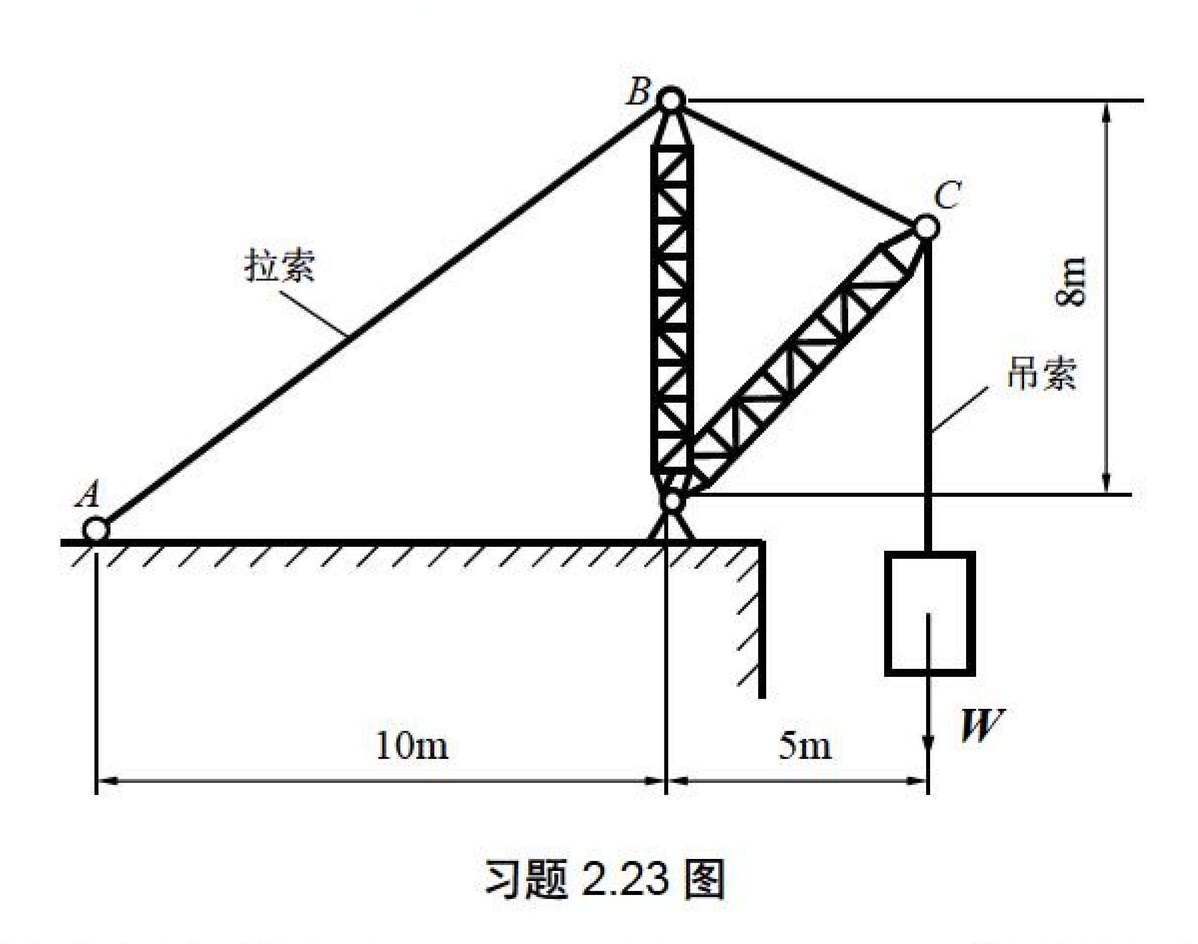
习题 2.21 图

2.22 如习题 2.22 图所示，油缸盖与缸体采用 6 个螺栓连接。已知油缸内径 $D=360\text{mm}$，油压 $p=1\text{MPa}$，螺栓材料的许用应力$[\sigma]=40\text{MPa}$，试确定螺栓的内径。



习题 2.22 图

2.23 习题 2.23 图所示为一起重机设备简图。设拉索 AB 的直径$d_1=20\text{mm}$，吊索直径$d_2=25\text{mm}$，钢索许用应力均为$[\sigma]=120\text{MPa}$，试确定起重机能起吊的最大重量 W。

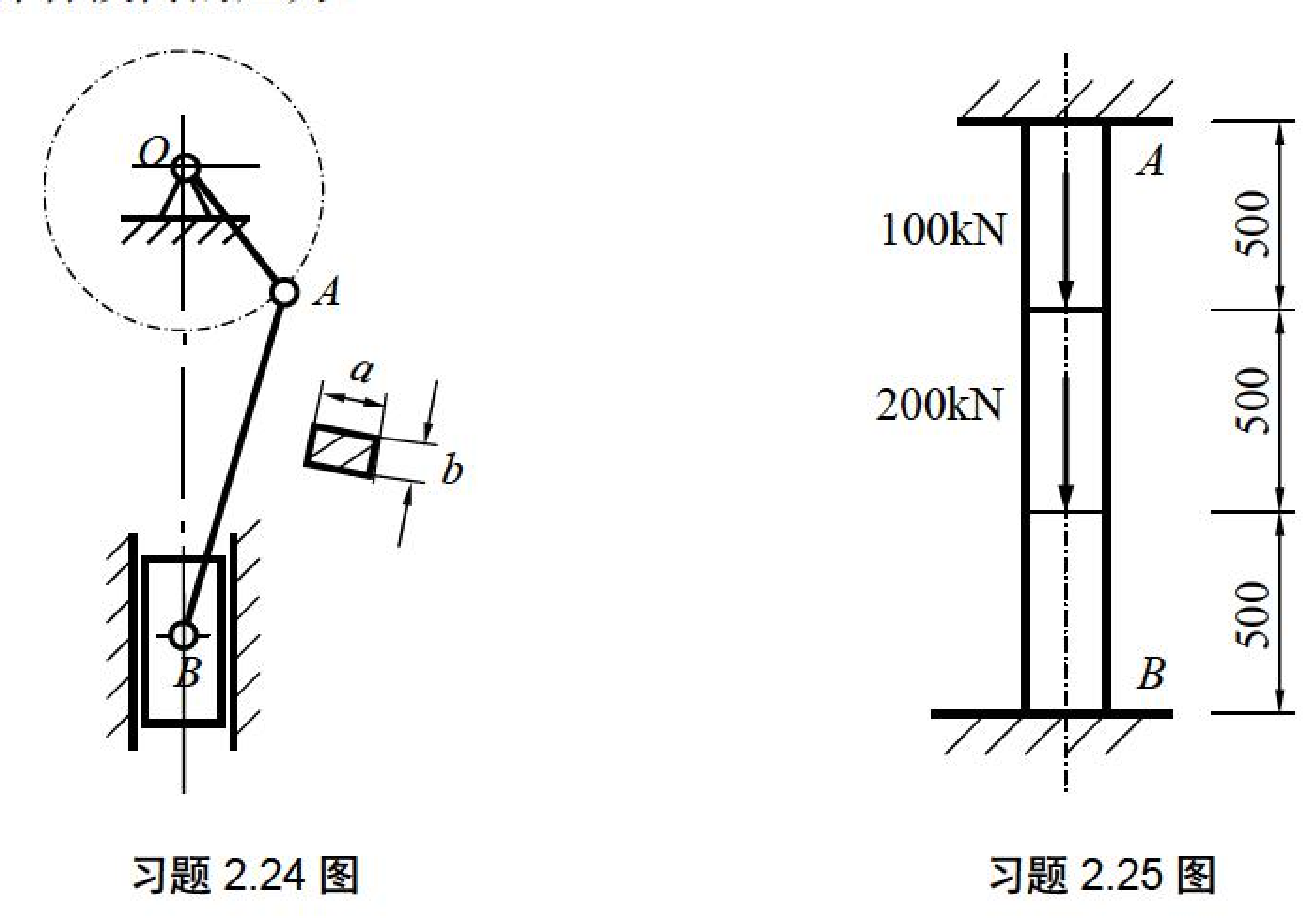


习题 2.23 图

2.24 冷镦机曲柄滑块机构如习题 2.24 图所示。镦压工件时连杆按竖起位置，承受的

镦压力 F = 1200kN。连杆为矩形截面，长 a 与宽 b 之比 $\dfrac{a}{b}=1.4$。材料为 45 钢，许用应力 $[\sigma]=58\text{MPa}$。试确定截面尺寸 a、b。

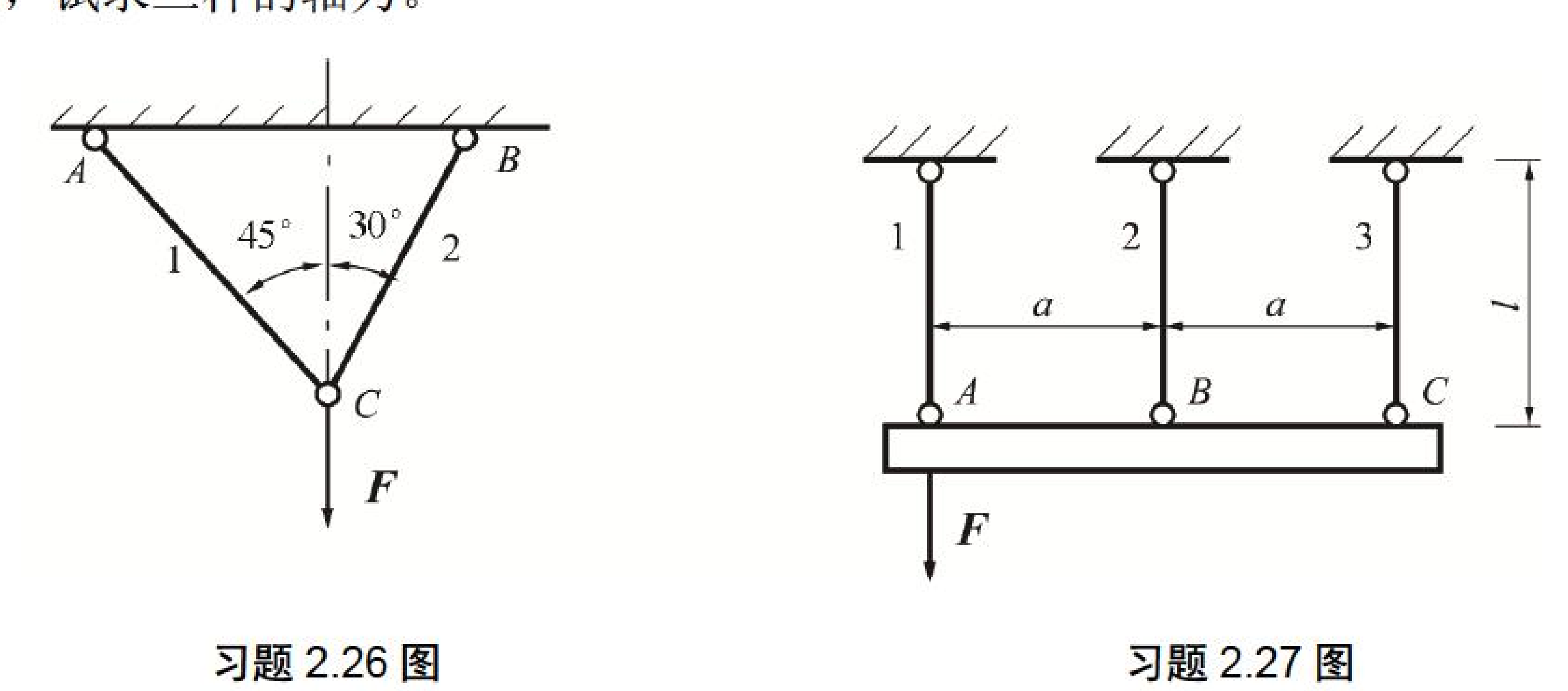
2.25　横截面面积 $A=1\times10^4\,\text{mm}^2$ 的钢杆，其两端固定，载荷和尺寸如习题 2.25 图所示，试求钢杆各段内的应力。



习题 2.24 图　　　　习题 2.25 图

2.26　习题 2.26 图所示结构中 BC、AC 都是圆截面直杆，直径均为 d = 20mm，材料都是 Q235 钢，其许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$，试求该结构的许可载荷。

2.27　在习题 2.27 图所示结构中，假设 AC 梁为刚杆，杆 1、2、3 的横截面积相等，材料相同，试求三杆的轴力。

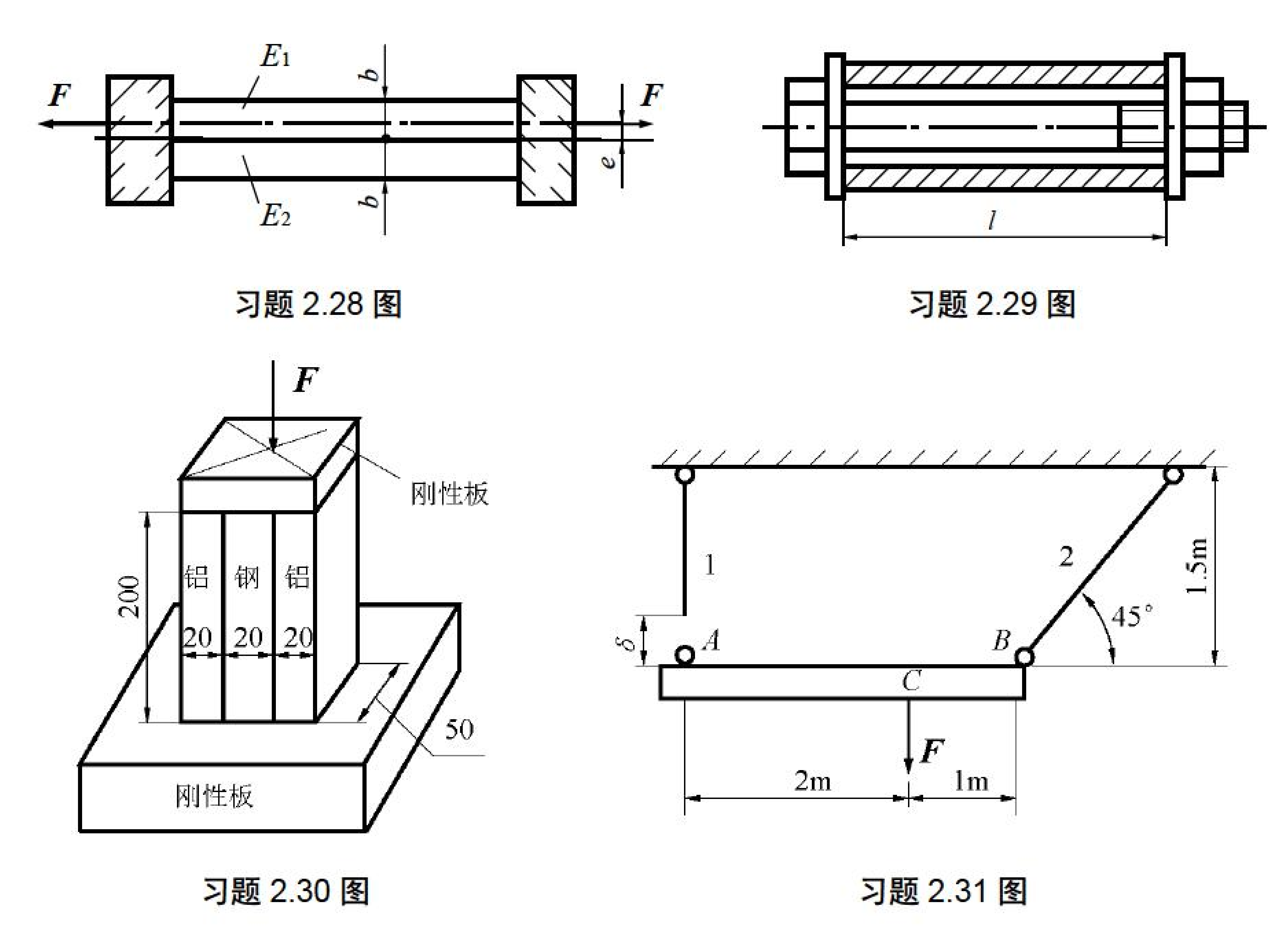


习题 2.26 图　　　　习题 2.27 图

2.28　如习题 2.28 图所示，两根材料不同但截面尺寸相同的杆件，同时固定连接于两端的刚性板上，且 $E_1>E_2$。要使两杆伸长量相等，试求拉力 F 的偏心距 e。

2.29　习题 2.29 图所示为一螺栓紧固一套筒，螺栓杆的横截面积为 A_1，弹性模量为 E_1，螺距为 h，套筒横截面面积为 A_2，弹性模量为 E_2，若螺栓在贴住垫片后再旋进 1/4 圈，求螺栓对套筒的预紧力。

2.30　如习题 2.30 图所示，由铝板和钢板组成的复合柱，通过刚性板承受纵向载荷 F = 385kN，其作用线沿复合板的轴线方向。已知钢板的弹性模量 $E_1=200\text{GPa}$，铝板的弹性模量 $E_2=70\text{GPa}$。试求铝板和钢板横截面上的正应力。

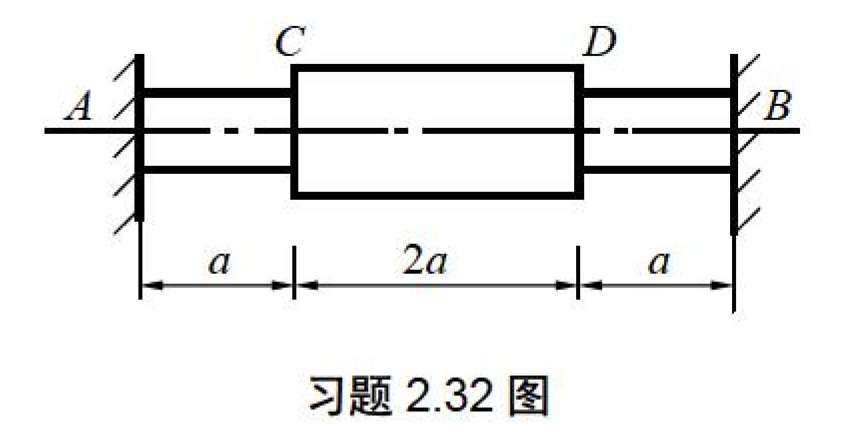


习题 2.28 图　　习题 2.29 图

习题 2.30 图　　习题 2.31 图

2.31　一结构如习题 2.31 图所示，水平刚性横梁 *AB* 上部由杆 1、杆 2 悬挂，下部由铰支座 *C* 支承。由于制造误差，杆 1 的长度短了 $\delta = 1.5\text{mm}$。已知两杆的材料和横截面面积均相同，且 $E_1 = E_2 = 200\text{GPa}$，$A_1 = A_2 = A$。试求装配后两杆的应力。

2.32　两端固定的阶梯杆如习题 2.32 图所示。已知 *AC* 段和 *BC* 段的横截面面积为 *A*，*CD* 段的横截面面积为 2*A*。杆材料的弹性模量 *E* = 210GPa，线胀系数 $\alpha = 12\times10^{-6}/℃$。试求当温度升高 30℃ 后，该杆各段横截面上的应力。



习题 2.32 图

第 3 章　扭转与剪切

【本章学习重点】

本章主要分析杆件在扭转时的内力，即扭矩、圆轴横截面上的切应力和相邻两横截面的相对扭转角，研究圆轴扭转时的强度和刚度设计方法；通过对连接件的受力分析，学习如何进行剪切和挤压强度的计算。

【本章学习目标】

- 能熟练计算传动轴的外力偶矩和任意横截面内的扭矩，正确绘制扭矩图。
- 掌握剪切胡克定律、切应力互等定律和圆轴扭转时的切应力分布规律。熟记实心轴的空心轴的极惯性矩和扭转截面系数，会计算横截面内任意点的切应力。
- 掌握相对扭转角、扭转刚度等概念，能正确计算圆截面等直杆受扭时的变形量。
- 能对扭转杆进行强度和刚度计算。
- 能求解简单的扭转超静定问题。
- 会对各种连接件进行受力分析，熟练剪切与挤压的实用计算强度条件进行剪切与挤压的强度计算。

3.1　扭转的概念

工程实际中，以扭转为主要变形的杆件较为常见。例如，汽车方向盘的操纵杆，两端分别受到驾驶员作用于方向盘上的外力偶和转向器的反力偶的作用(见图 3.1(a))；钻孔时，电机将力偶作用于钻头的一端，其另一端受到工件的阻抗力偶作用(见图 3.1(b))；设备中的传动轴受到主动力偶和反力偶的作用，使传动轴发生扭转变形(见图 3.1(c))。类似还有很多构件，如车床的光杆、搅拌机轴、汽车驱动轴等都是受扭构件。

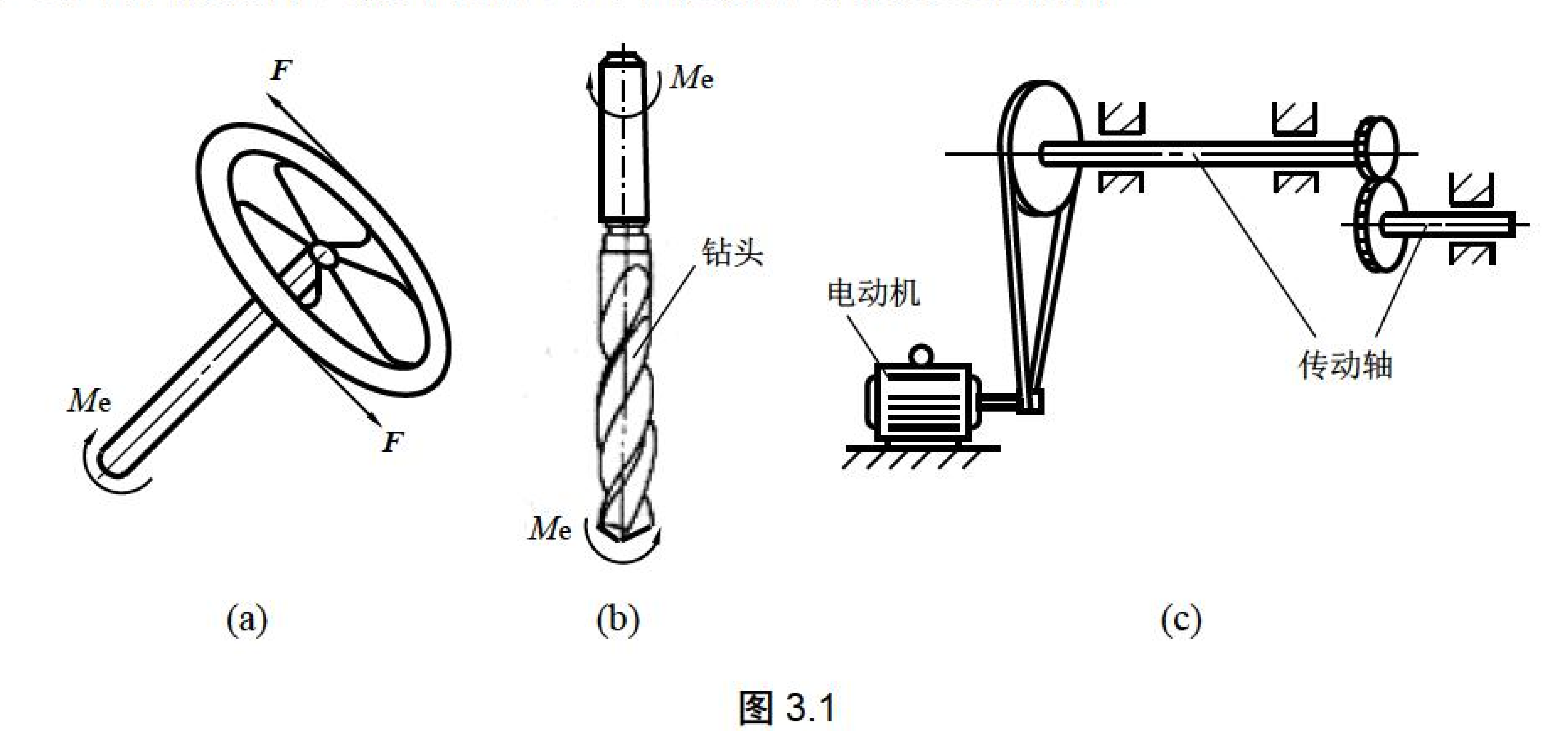


图 3.1

上述情况的杆件尽管在外形、材料及加载方式方面各有不同，但这些构件具有共同特

点：杆件两端存在两个大小相等、方向相反且作用平面与杆件轴线垂直的外力偶，使杆件的任意两个截面都发生绕轴线的相对转动。这种形式的变形称为扭转变形，如图 3.2 所示。使杆产生扭转变形的外力称为外力偶矩。以扭转变形为主的直杆称为轴；若杆件截面为圆形，则称为圆轴。圆轴的变形是以横截面绕轴线的相对角位移，即扭转角。

本章主要研究圆截面等直杆的扭转，这是扭转中最简单的情况，也是工程中最常见的问题。对于非截面杆的扭转，则只作简单介绍。

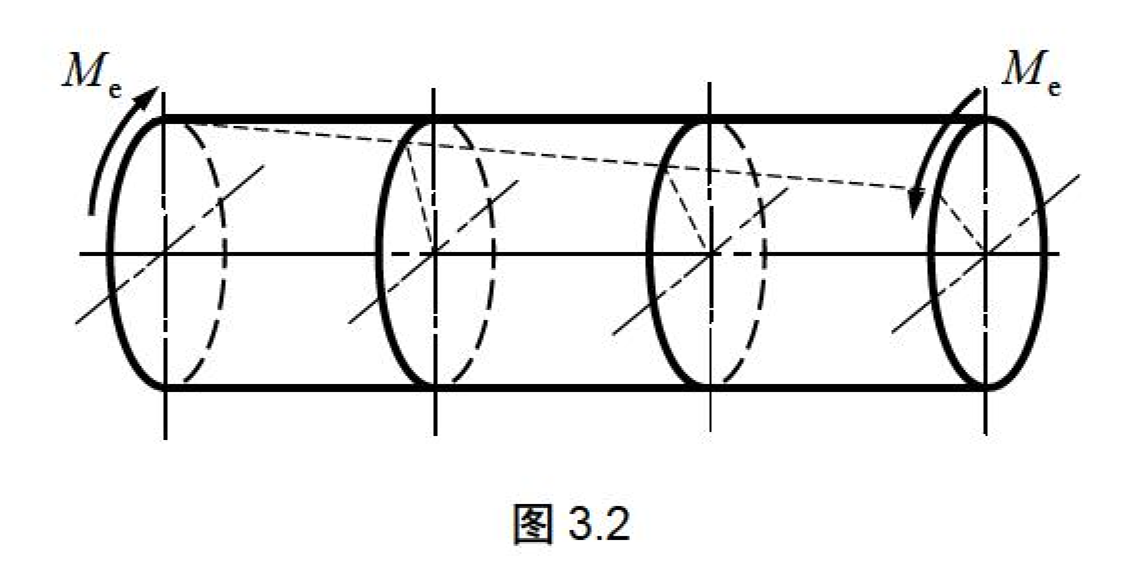


图 3.2

3.2　扭矩和扭矩图

3.2.1　外力偶矩的计算

作用于轴上的外力偶矩通常不直接给出，在多数情况下，通过轴所传递的功率及其转速计算得到。如图 3.3 所示的传动轴所传递的功率为 P(kW)、转速为 n(r/min)时，其外力偶矩 M_e 的计算公式为

$$M_e = 9550 \times \frac{P}{n} \tag{3.1}$$

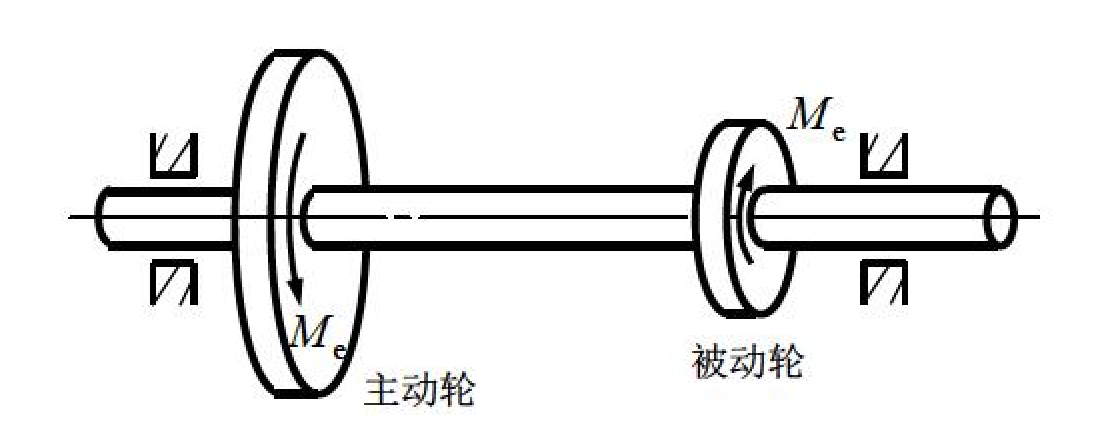


图 3.3

3.2.2　扭矩及扭矩图

受扭圆轴上所有外力偶矩求得以后，可通过截面法计算该轴横截面上的内力分布。如图 3.4(a)所示，在该轴的两端存在一对外力偶矩 M_e。首先，用假想一任意截面 $m—m$ 将轴切分为两部分；其次，采用分布内力的合力偶 T 替代舍弃的右端部分；再次，取左端部分 Ⅰ(见图 3.4(b))作为研究对象，根据平衡条件 $\sum M_x = 0$ 求出 T，即

$$T = M_e \tag{3.2}$$

T 表示圆轴左右两部分 Ⅰ 在 $m—m$ 截面上相互作用的分布内力系的合力偶矩，也可称

为该截面上的扭矩。

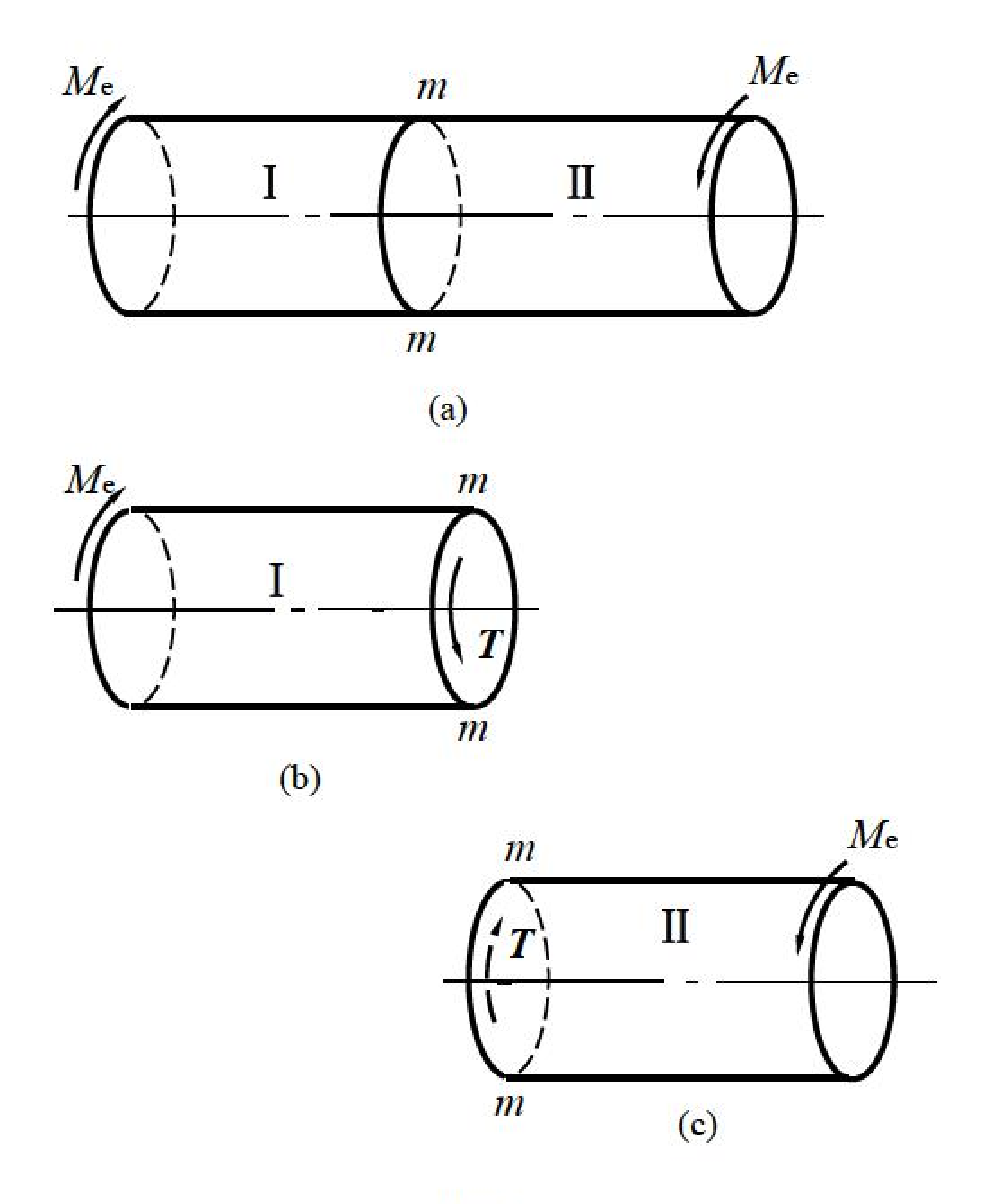


图 3.4

需要指出，如取右端部分Ⅱ(见图 3.4(c))作为研究对象，也可得到如式(3.2)的扭矩结果；但其转向与用左端部分Ⅱ得到的扭矩方向相反。采用截面法分析内力时并不限制取左端还是右端作为研究对象，为了使两种求解情况下得到的扭矩不仅具有相等数值且正负号一致，如图 3.5 所示，对扭矩 $\boldsymbol{T}$ 的符号规定如下：若按右手螺旋法将扭矩 $\boldsymbol{T}$ 表示为矢量，即用右手四指表示 $\boldsymbol{T}$ 的旋转方向，则右手的大拇指所表示的方向为 $\boldsymbol{T}$ 的矢量方向；如果 $\boldsymbol{T}$ 的矢量方向与截面外向法线的方向相同，则 $\boldsymbol{T}$ 的符号为正；否则为负。

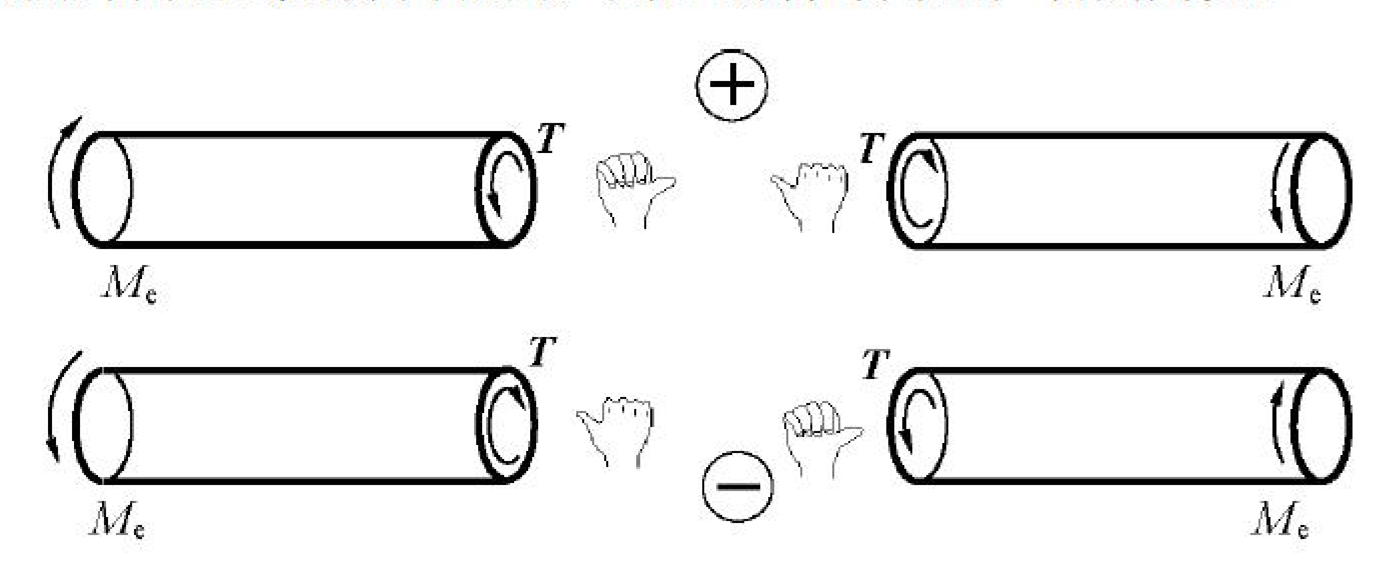
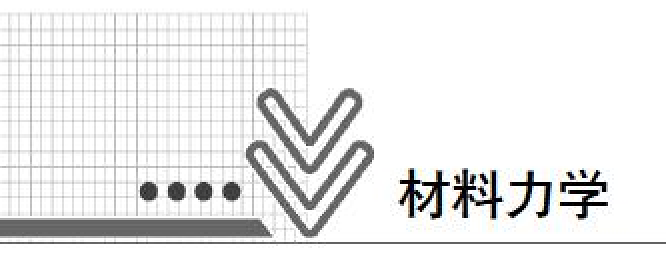


图 3.5

采用截面法求扭矩时，一般预设截面上扭矩为正；若计算结果为负则说明实际扭转转向与所设方向相反。

如果作用于圆轴上的外力偶矩存在 3 个或 3 个以上，需分段应用截面法计算各横截面的扭矩。为了更直观地表示轴沿轴线方向所受扭矩的变化情况，可把扭矩随截面位置的变化绘制成图形，即扭矩图。其具体规定如下。



(1) 平行于轴线的横坐标表示轴横截面的位置，垂直于轴线的纵坐标表示轴横截面上扭矩的数值，即建立 T-x 坐标系。

(2) 用截面法求出轴各段横截面上的扭矩，并绘制于坐标系中。

(3) 对各段扭矩标注数值和符号，扭矩为正时标注“+”号；否则标注“-”号。

(4) 对各分段区域填充与 T 轴平行的线。

例 3.1 如图 3.6(a)所示，已知主动轮的输入功率 $P_1 = 20\text{kW}$，3 个从动轮的输出功率分别为 $P_2 = 5\text{kW}$、$P_3 = 5\text{kW}$、$P_4 = 5\text{kW}$，轴的转速 $n = 200\text{r/min}$。绘制轴的扭矩图。

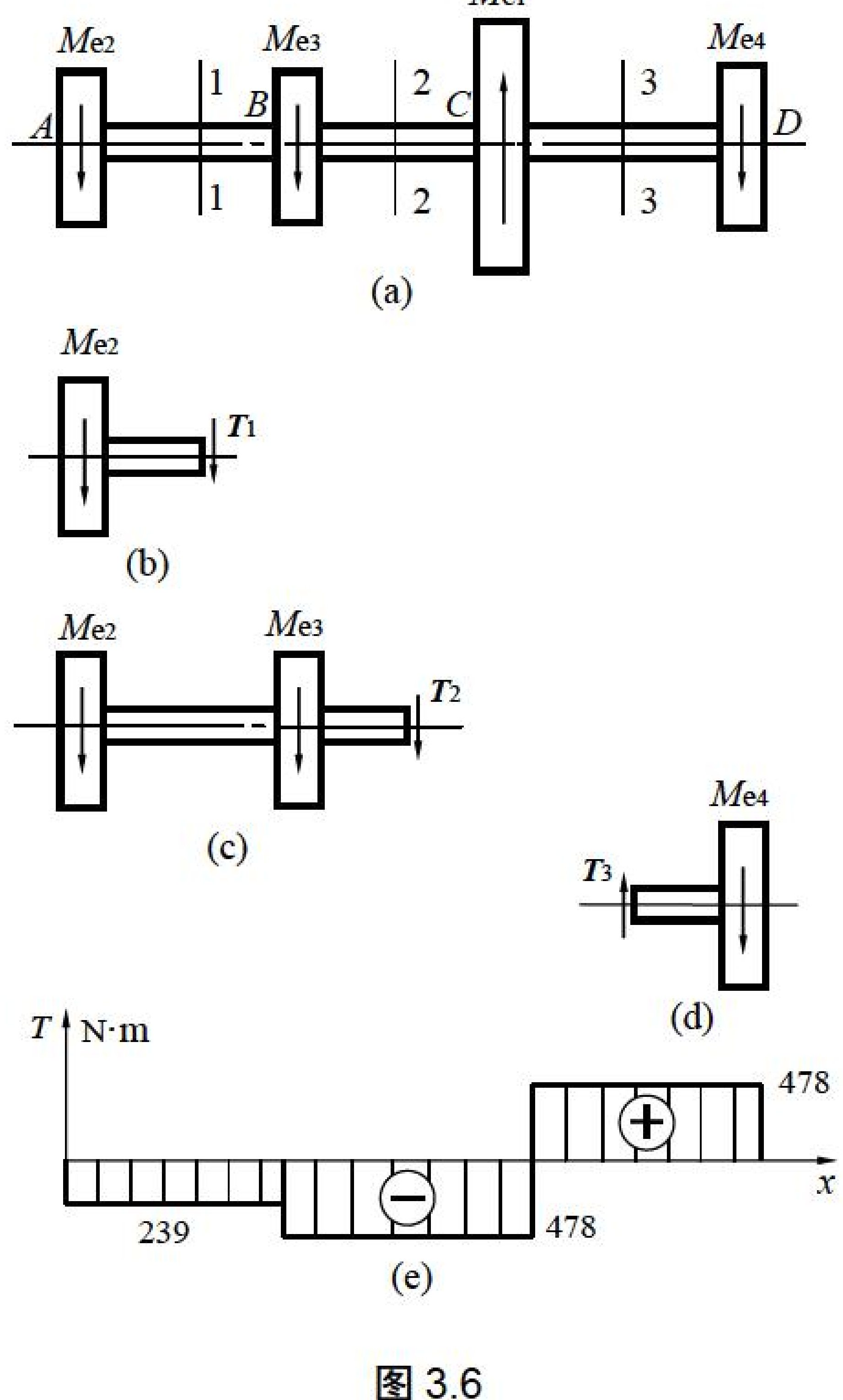


图 3.6

解：(1) 计算作用在主动轮上的外力偶矩和从动轮上的外力偶矩 M_{e1}、M_{e2}、M_{e3}、M_{e4}。

$$M_{e1} = 9550 \times \frac{P_1}{n} = 9550 \times \frac{20}{200}\text{N}\cdot\text{m} = 955\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_{e2} = 9550 \times \frac{P_2}{n} = 9550 \times \frac{5}{200}\text{N}\cdot\text{m} = 239\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_{e3} = 9550 \times \frac{P_3}{n} = 9550 \times \frac{5}{200}\text{N}\cdot\text{m} = 239\text{N}\cdot\text{m}$$

$$M_{e4} = 9550 \times \frac{P_4}{n} = 9550 \times \frac{10}{200}\text{N}\cdot\text{m} = 478\text{N}\cdot\text{m}$$

(2) 计算各段截面的扭矩。

如图 3.6(b)所示，在 AB 段内，沿 1—1 截面截开后取左段杆为研究对象，假定扭矩为 M_1，由平衡方程可求得扭矩为

$$T_1 + M_{e2} = 0$$

$$T_1 = -M_{e2} = -239\text{N}\cdot\text{m}$$

同理，如图 3.6(c)所示，可求得 BC 段内任一横截面的扭矩为

$$T_2 + M_{e2} + M_{e3} = 0$$

$$T_2 = -M_{e2} - M_{e3} = -478\text{N}\cdot\text{m}$$

求 CD 段内的扭矩时，可取外力偶较少的右段作为研究对象，如 3.6(d)所示，则有

$$M_{e4} - T_3 = 0$$

$$T_3 = M_{e4} = 478\text{N}\cdot\text{m}$$

(3) 画扭矩图。

按扭矩图的作图规则，画出杆的扭矩图如图 3.6(e)所示。从扭矩图中可以看出最大扭矩发生在 BC 段和 CD 段，且方向相反。从作扭矩图可知，外力作用点就是扭矩突变的横截面。如轴上作用有 n 个外力偶，扭矩图分段数为 n−1。

3.3　剪切胡克定律与切应力互等定理

3.3.1　薄壁圆筒扭转时的切应力

在讨论圆轴在扭转时应力和变形之前，通过分析薄壁圆筒的扭转，以研究切应力和切应变的规律及二者之间的关系。图 3.7(a)所示的薄壁圆筒的定义为：其壁厚δ与半径 r 的比值应小于 1/10。

设计一个薄壁圆筒扭转试验。试验前，在薄壁圆筒的表面用圆周线和纵向线画出方格(见图 3.7(a))；在薄壁圆筒的两端施加一对外力偶矩M_e。试验后可以发现(见图 3.7(b))：首先，圆筒表面各圆周线的形状、大小和间距均未改变，只是绕轴线做了相对转动；其次，所有矩形网格均歪斜成同样大小的平行四边形，各纵向线均倾斜了同一微小角度。由于管壁很薄，圆筒内变形与表面变形相同。由此上述现象可表明，圆筒无轴向正应变，仅相邻截面发生了相对错动，即产生切应力和切应变；切应力方向与圆周相切，且圆周上各点切应力大小相同。

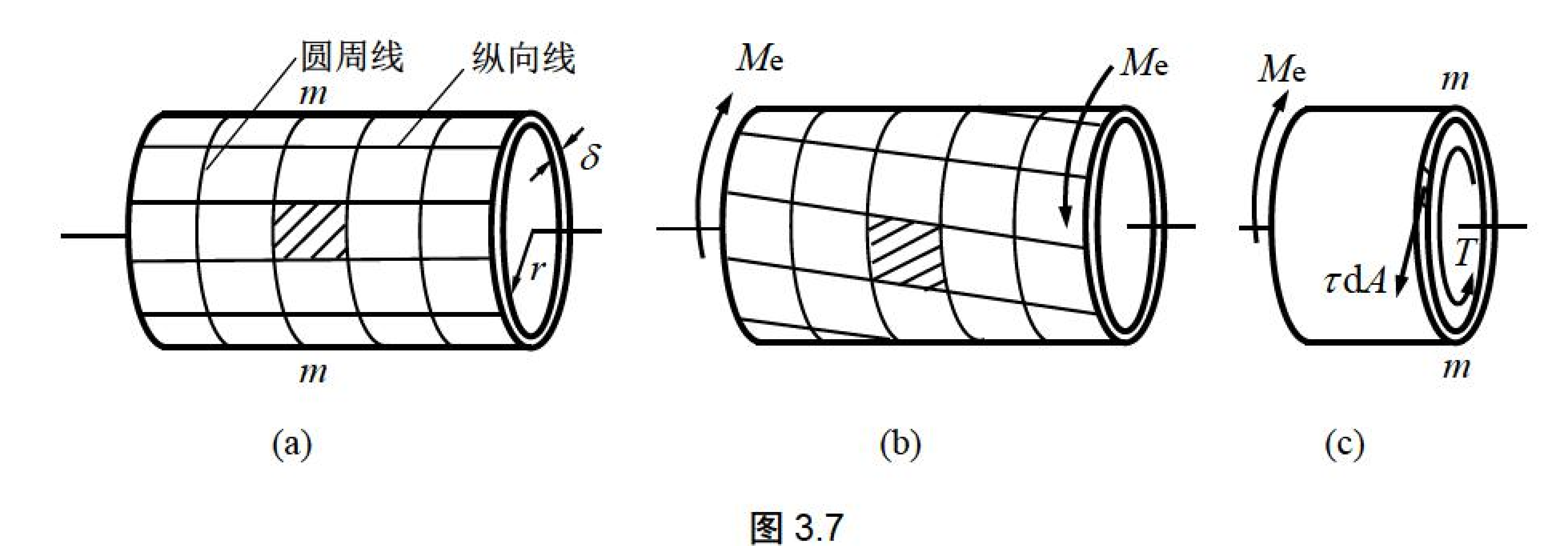


图 3.7

下面推导横截面上切应力的表达式。切应力τ 的合力矩 T 与外力偶矩M_e实现平衡关系，可表示为

$$T = M_e$$

因为薄壁圆筒的壁厚δ远小于其半径 r，可以认为切应力τ 沿壁厚方向均匀分布。如图 3.7(c)所示，合力矩 T 可写成

$$T = \int_A \tau \mathrm{d}A \cdot r = \tau A r \tag{3.3}$$

$$A = 2\pi r\delta \tag{3.4}$$

式中，A 为圆筒横截面面积。整理后，可得薄壁圆筒横截面切应力与内力之间的关系为

$$\tau = \frac{T}{2\pi r^2 \delta} \tag{3.5}$$

与理论分析得到的精确解对比表明，当$\dfrac{\delta}{r} \leqslant 0.1$时，该式最大误差不超过 5%。

3.3.2 剪切胡克定律

取一长度 l 的薄壁圆筒，在受扭后两端截面产生的相对扭转角为φ，其横截面切应变可写成

$$\gamma = \frac{r\varphi}{l} \tag{3.6}$$

通过薄壁圆筒的扭转试验发现，当外力偶M_e在某一范围内时，相对扭转角与外力偶矩M_e(或扭矩 T)之间成正比，如图 3.8(a)所示。由式(3.6)可知，切应变γ与扭转角φ存在正比例关系；而式(3.5)表明，切应力与外力偶(数值上等于扭矩)成正比。故可推断，当切应力不超过材料的剪切比例极限时，切应变γ与切应力τ成正比(图 3.8(b))，即剪切胡可定律

$$\tau = G\gamma \tag{3.7}$$

式中，G 为比例常数，称为剪切弹性模量，其量纲与τ相同。通过试验可以测定常见材料的剪切弹性模量。例如，钢的剪切弹性模量约为 75～80GPa，铝合金的剪切弹性模量为 26～30GPa。

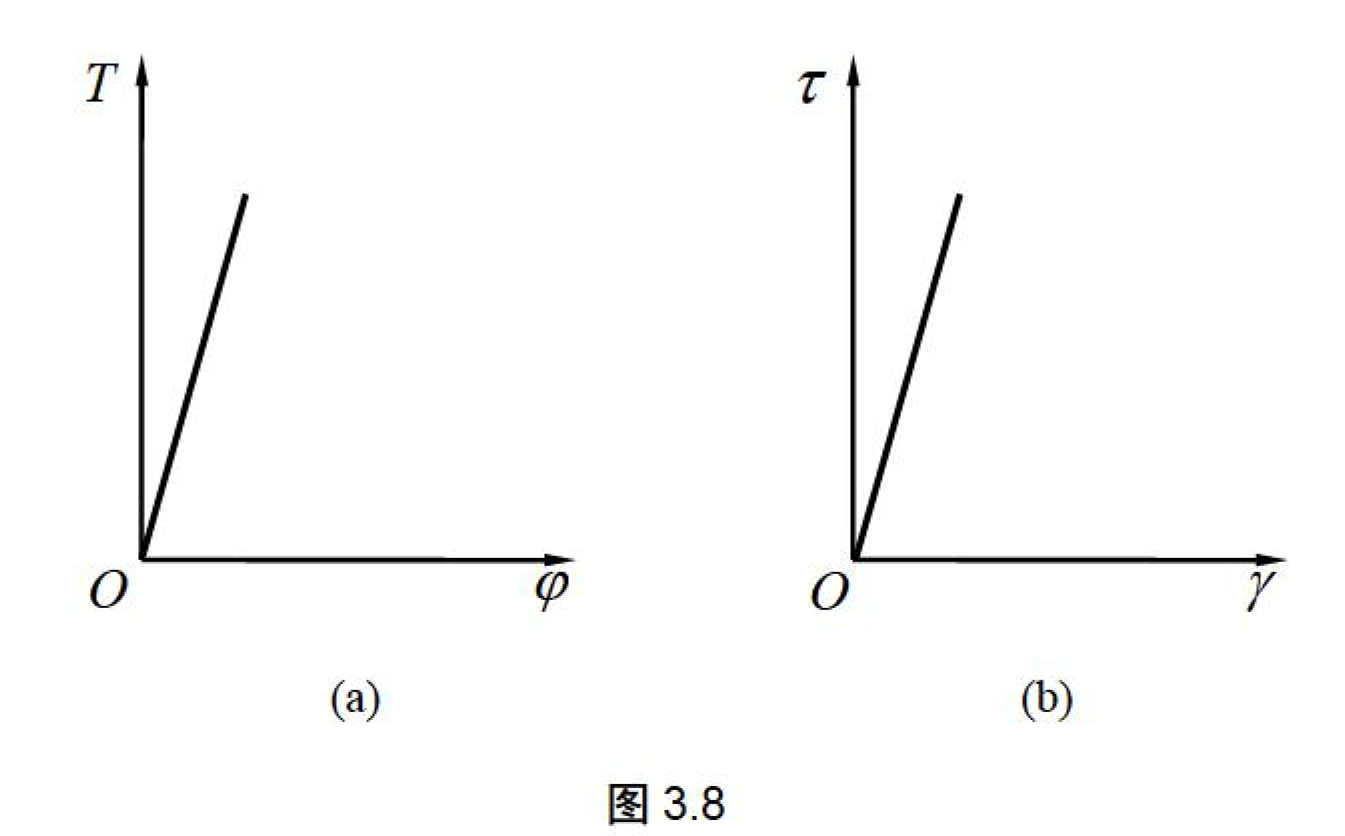


图 3.8

理论和试验研究还表明，对于各向同性材料，剪切弹性模量 G 与前章介绍的弹性模量 E、泊松比μ的关系为

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{3.8}$$

例 3.2 一薄壁圆管在受扭后两端面的夹角角度为 0.1°。该圆筒的内径和外径分别为 30mm、32mm，长度为 1m，其材料的弹性模量为 200GPa，泊松比为 0.25。试求该圆筒承受的外力偶矩。

解：(1) 计算圆管材料的剪切弹性模量。

根据已知材料的弹性模量 E 和泊松比μ，由式(3.8)得

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{200\text{GPa}}{2(1+0.25)} = 80\text{GPa}$$

(2) 根据剪切胡克定律计算切应力，由式(3.6)、式(3.7)得

$$\tau = G\gamma = G\frac{r\varphi}{l} = \frac{80\times10^9\times16\times10^{-3}\times0.1\times\pi}{180\times1}\text{Pa} = 2.23\times10^6\text{Pa} = 2.23\text{MPa}$$

(3) 根据切应力计算外力偶矩，由式(3.5)得



$$T = 2\pi r^2 \delta\tau = 2\pi(16\times10^3)^2\times\left(\frac{32-30}{2}\times10^{-3}\right)\times2.23\times10^6\,\mathrm{N\cdot m} = 3.59\,\mathrm{N\cdot m}$$

3.3.3　切应力互等定理

现进一步研究图 3.7(a)中薄壁圆筒的应力情况。用相邻两个横截面和两个过轴线的纵向面，从薄壁圆筒中取出一个单元体，边长为 $\mathrm{d}x$ 、 $\mathrm{d}y$ 、 δ ，如图 3.9 所示。单元体的左、右两侧面是圆筒横截面的一部分，所以并无正应力，仅存在切应力。两侧面的切应力 τ 方向相反，数值可通过式(3.5)求得。

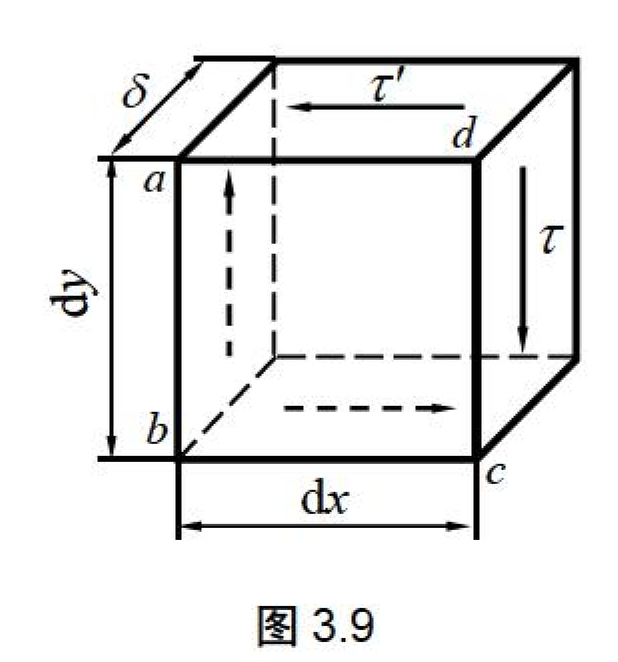


图 3.9

单元体左、右两侧面上有一对大小相等、方向相反的力 $\tau\cdot\mathrm{d}y\cdot\delta$ ，并形成一个顺时针的力偶 $\tau\cdot\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}x\cdot\delta$ ；则在上下平面必同样存在一对切应力 $\tau'\cdot\mathrm{d}x\cdot\delta$ ，并形成逆时针的力偶 $\tau'\cdot\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}x\cdot\delta$ ，以实现平衡。

由此可推论，切应力互等定理如下。

(1) 在单元体相互垂直的两个平面上，切应力必然成对存在，且数值相等，即

$$\tau = \tau' \tag{3.9}$$

(2) 两者都垂直于两个平面的交线，方向则共同指向或共同背离这一交线。

上述分析还可表明，在单元体的 4 个侧面上，仅存在切应力而无正应力，此种应力状态称为纯剪切。

3.4　圆轴扭转时的应力与强度条件

本节首先通过研究受扭圆轴在几何、物理和静力等 3 个方面的关系，分析其横截面上的应力分布规律，即确定横截面上各点的应力。

3.4.1　圆轴扭转时横截面上的应力

通过扭转试验观察圆轴在受扭时的变形情况。试验表明，在扭转力矩的作用下，圆轴的表面变形与薄壁圆管的情况类似，但切应力在横截面内不再认为是均匀分布。

1. 几何方面

为了分析圆轴扭转时的应力，首先观察其变形。如图 3.10(a)所示，在等直圆杆的表面作出圆周线和纵向线。在杆的两端施加一对力矩为 M_e 的外力偶，可以看出圆轴表面的各圆周线的形状、大小和间距均未改变，只是绕轴线做了相对转动。在小变形的情况下，各纵向线均倾斜了同一微小角度，所有矩形网格均成为平行四边形(见图 3.10(b))。

根据上述现象，对圆轴变形做以下假设。

(1) 变形后的横截面仍为平面，且形状、大小均不改变，即圆轴扭转的平面假设。

(2) 变形后两相邻横截面之间的距离保持不变。

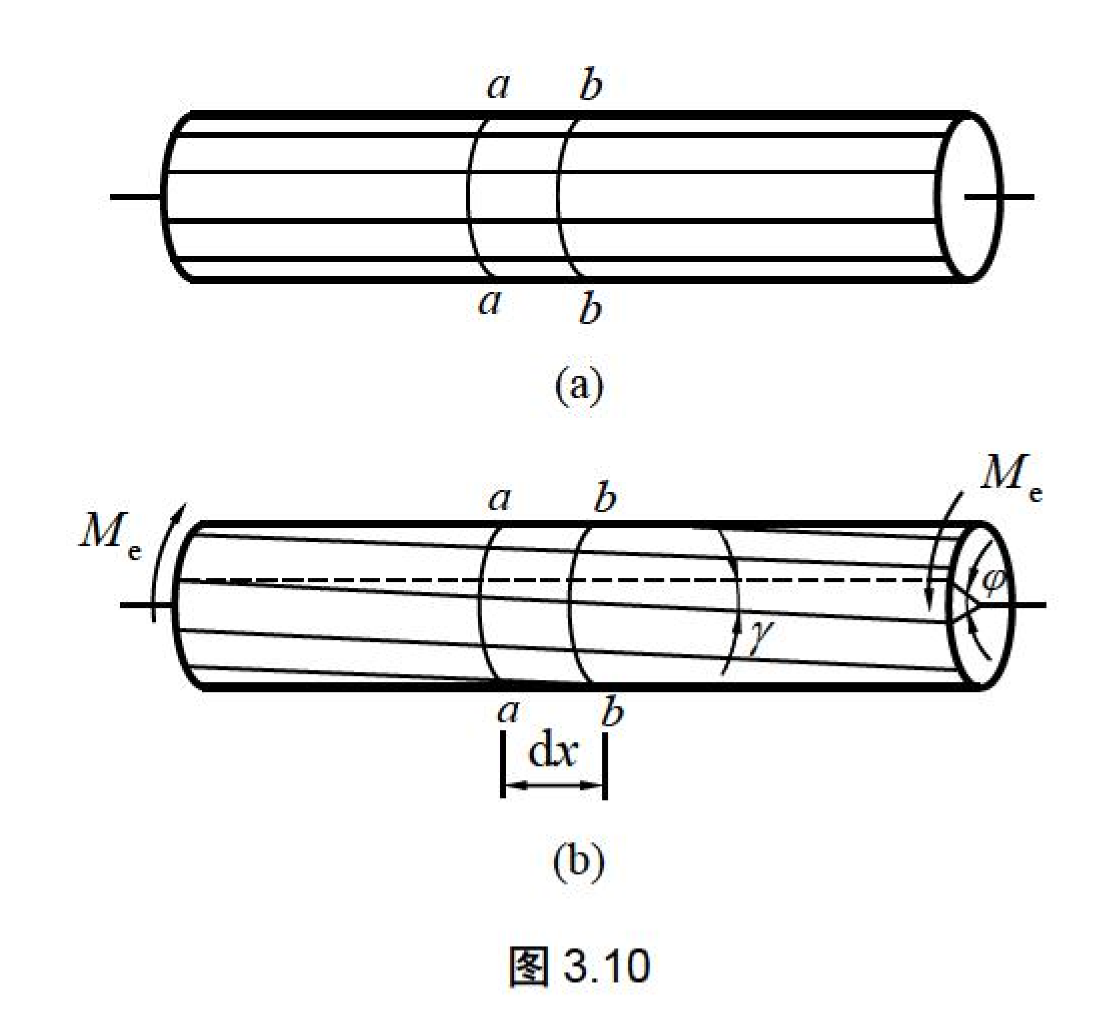


图 3.10

按照此一假设，圆轴扭转时各横截面如同刚性平面，绕轴线旋转了一个角度。此假设得到了理论和试验的证实。

为确定轴内各点处切应变的变化规律，假想地截取长为 dx 的杆段进行分析。由平面假设可知，杆段变形后的情况如图 3.11(a)所示，截面 b—b 相对于截面 a—a 绕轴线旋转了角度 dφ，杆表面上的纵向线段 AD 倾斜了一个角度 γ（γ 就是横截面周边上任一点处的切应变)。同时可观察到，在半径 O_2D 上距轴线 ρ 处的 G 点的纵向线 EG 随圆杆变形倾斜了角度 γ_ρ，γ_ρ 为横截面半径上任意点处的切应变。由图 3.11(a)所示的几何关系可得

$$\gamma_\rho \approx \tan\gamma_\rho = \frac{\overline{GG'}}{\overline{EG}} = \frac{\rho\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

即

$$\gamma_\rho = \rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{3.10}$$

式中，$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ 为扭转角沿杆长的变化率，对于等截面圆轴，$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{\varphi}{l}$ 为常数。因此，式(3.10)表明等直圆杆横截面上任意点的切应变 γ_ρ 与该点半径 ρ 成正比。

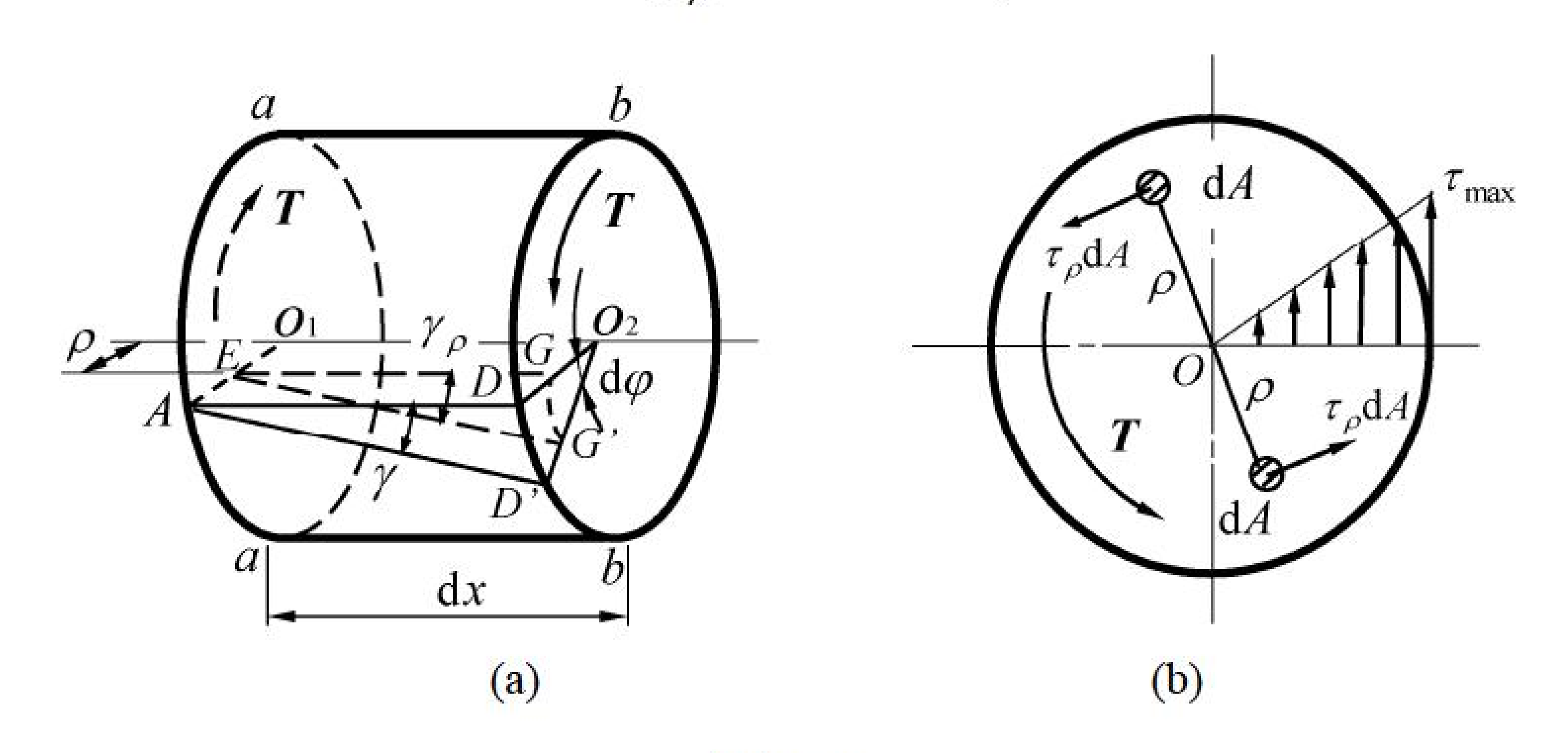


图 3.11

2. 物理方面

由剪切胡克定律可知，在线弹性范围内，切应力与切应变存在正比例关系。式(3.10)代入式(3.9)，横截面上距轴线 ρ 处的切应力为

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \tag{3.11}$$

式(3.11)表明，在离圆心等距的各点切应力相同，且横截面上任意点的切应力 τ_ρ 与该点到轴线的距离 ρ 成正比。τ_ρ 的方向垂直于该点的半径。圆截面杆扭转切应力沿任一半径的变化规律如图 3.11(b)所示。

3. 静力学方面

如图 3.11(b)所示，在横截面内任一直径上距圆心等距的两点处，其微剪力 $\tau_\rho \mathrm{d}A$ 等值且反向，因此整个截面上微剪力 $\tau_\rho \mathrm{d}A$ 的合力必等于零，而形成一个合力偶，即为横截面上的扭矩 T。由静力学中的合力矩定理可得

$$\int_A \rho\tau_\rho \mathrm{d}A = T \tag{3.12}$$

式(3.11)代入式(3.12)，经整理后得

$$G\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\int_A \rho^2 \mathrm{d}A = T \tag{3.13}$$

式(3.13)中积分 $\int_A \rho^2 \mathrm{d}A$ 仅与截面尺寸有关，称为横截面对圆心的**极惯性矩**，并用 I_p 表示，其单位为 m^4。将 $I_\mathrm{p} = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A$ 代入式(3.13)，得扭转角沿杆长的变化率 $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ 为

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{T}{GI_\mathrm{p}} \tag{3.14}$$

式(3.14)为圆轴扭转变形的基本公式，将其代入式(3.11)，即得

$$\tau_\rho = \frac{T}{I_\mathrm{p}}\rho \tag{3.15}$$

式(3.15)为圆轴扭转时横截面上任一点的切应力计算公式。

由式(3.15)可知，在圆截面的边缘各处有 $\rho = r$，切应力最大，其值为

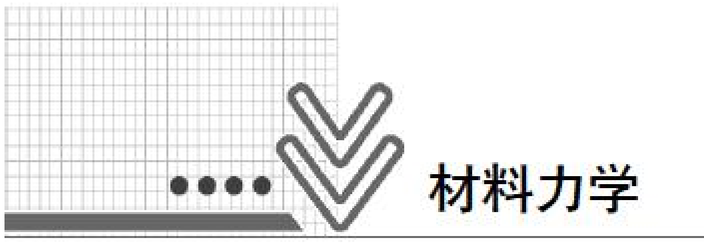
$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_\mathrm{p}}r = \frac{T}{I_\mathrm{p}/r} \tag{3.16}$$

式中，I_p/r 为一个仅与截面尺寸相关的量，用 W_p 表示，称为**扭转截面系数**，单位为 m^3。式(3.16)又可写成

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_\mathrm{p}} \tag{3.17}$$

需指出的是，以上各式基于平面假设，而仅有横截面不变的圆杆，平面假设才成立。所以，这些公式仅适用于等直圆杆。而且，横截面上最大切应力不得超过材料的线弹性范围。

下面进一步给出极惯性矩 I_p 以及抗扭截面系数 W_p 的计算公式。如图 3.12(a)所示，对于直径为 d 的圆截面，取一其厚度为 $\mathrm{d}\rho$ 的环形区域作为微元，其面积为 $\mathrm{d}A = 2\pi\rho\mathrm{d}\rho$，由



圆截面极惯性矩定义有

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho^3 \mathrm{d}\rho = \frac{\pi d^4}{32} \tag{3.18}$$

圆截面扭转截面系数为

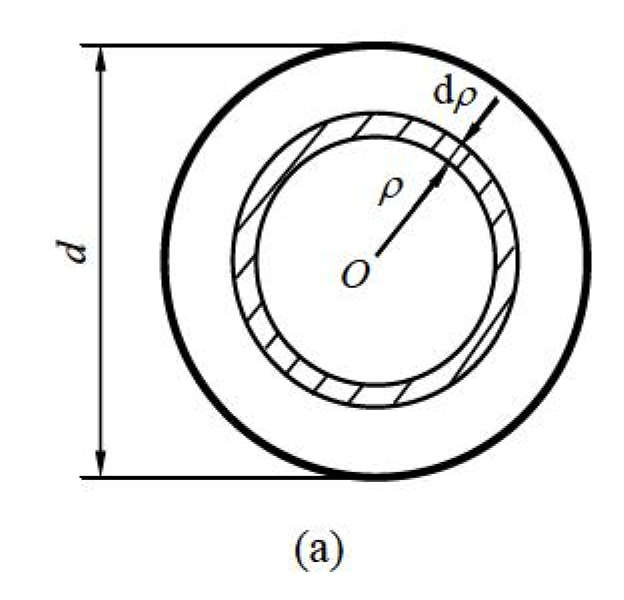
$$W_p = \frac{I_p}{r} = \frac{I_p}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16} \tag{3.19}$$

对于空心圆截面，由于截面的空心部分没有内力，所以不对空心部分进行积分。如图 3.12(b)所示，设空心圆截面的内、外直径分别为 d、D，比值 $\alpha = d/D$ ，则空心圆截面的极惯性矩为

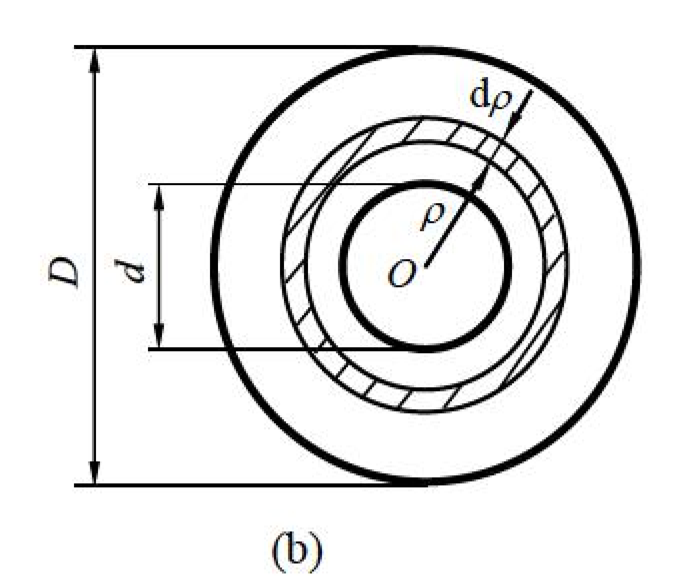
$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} 2\pi\rho^3 \mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4) \tag{3.20}$$

空心圆截面扭转截面系数为

$$W_p = \frac{I_p}{D/2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4) \tag{3.21}$$



(a)



(b)

图 3.12

3.4.2 圆轴扭转的强度条件

圆轴横截面的应力分布被确定以后，由此可建立轴的强度条件。为保证轴工作时不致因强度不够而破坏，最大扭转切应力 τ_{max} 不得超过材料的许用切应力$[\tau]$，即

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_p} \leqslant [\tau] \tag{3.22}$$

式中，T_{max} 为轴的各横截面承受的最大扭矩，可根据轴的受力情况或由扭矩图得到。

例 3.3 某传动轴，横截面上的最大扭矩为$T = 1.5\ \mathrm{kN \cdot m}$ ，其材料的许用切应力$[\tau] = 60\mathrm{MPa}$ 。该轴的横截面为一空心圆，外径和内径分别为$D = 80\ \mathrm{mm}$ 、$d = 64\ \mathrm{mm}$ 。

(1) 试校核该轴的扭转强度。

(2) 如将传动轴的横截面设计成实心圆，并要求与原来空心圆截面设计保持相同的扭转强度，试确定其直径，并比较两种设计下传动轴的重量。

解：(1) 由该轴的结构尺寸计算抗扭截面系数，即

$$\alpha = \frac{d}{D} = \frac{64 \times 10^{-3}}{80 \times 10^{-3}} = 0.8$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4) = \frac{\pi \times (80\times10^{-3})^3}{16}(1-0.8^4)\text{m}^3 = 5.935\times10^{-5}\text{m}^3$$

校核轴的最大切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{1.5\times10^3}{5.935\times10^{-5}} = 25.3\times10^6\text{Pa} = 25.3\text{MPa} < [\tau] = 60\text{MPa}$$

所以，满足扭转强度条件。

(2)　当实心轴与空心轴的最大应力同为$[\tau]$时，两轴的许可扭矩分别为

$$T_1 = W_{p1}[\tau] = \frac{\pi d_s^3}{16}[\tau]$$

$$T_2 = W_{p2}[\tau] = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)[\tau] = \frac{\pi\times(80\times10^{-3})^3}{16}(1-0.8^4)[\tau]$$

其中，d_s 为待求的实心轴直径。若两轴的强度相同，则应有$T_1 = T_2$，可得

$$\frac{\pi d_s^3}{16}[\tau] = \frac{\pi\times(80\times10^{-3})^3}{16}(1-0.8^4)[\tau]$$

$$d_s = (80\times10^{-3})\times(1-0.8^4)^{1/3}\text{m} = 0.067\text{m}$$

实心轴横截面面积为

$$A_s = \frac{\pi d_s^2}{4}$$

空心轴横截面面积为

$$A = \frac{\pi(D^2-d^2)}{4}$$

在长度相等、材料相同的情况下，两种截面设计下的传动轴重量比即横截面面积比为

$$\frac{A}{A_s} = \frac{D^2-d^2}{d_s^2} = \frac{0.08^2-0.064^2}{0.067^2} = 51.3\%$$

可见在载荷相同的条件下，空心轴的重量仅为实心轴的 51.3%，其在减轻重量、节约材料方面效果是非常明显的。这是因为横截面上的切应力沿半径按线性规律分布，圆心附近的应力很小，材料没有充分发挥作用。因此，为了合理利用材料，宜将材料放置在远离圆心的部位，即设计成空心轴，从而增大轴的抗扭截面系数、提高轴的强度。

3.5　圆轴扭转变形与刚度条件

轴类零件除应满足强度要求外，一般还不应有过大的扭转变形。本节主要讨论圆轴在扭转时的变形，并以此建立刚度条件。

3.5.1　圆轴扭转时的变形

扭转变形的特征是两个横截面间产生绕轴线的相对转角，即扭转角φ。由式(3.14)可得相距 dx 的两横截面间的扭转角为

$$d\varphi = \frac{T}{GI_p}dx \tag{3.23}$$

沿轴线 x 积分，即可得到距离为 l 的两个横截面之间的相对转角为

$$\varphi=\int_l d\varphi = \int_l \frac{T}{GI_p}dx \tag{3.24}$$

对于如长度为 l、扭矩 T 为常数的等直杆，由上述公式得两端横截面间的扭转角为

$$\varphi=\frac{Tl}{GI_p} \tag{3.25}$$

式(3.25)表明，扭转角 φ 与扭矩 T、轴长 l 成正比，与剪切弹性模量 G、极惯性矩 I_p 成反比。乘积 GI_p 称为圆截面轴的截面**扭转刚度**。

有些情况下，轴在各段内的 T 并不相同或者各段的极惯性矩 I_p 不同。此时应分段计算各段的扭转角，然后求代数和，以得到两端面的相对扭转角为

$$\varphi=\frac{T_i l_i}{GI_{pi}} \tag{3.26}$$

3.5.2　圆轴扭转的刚度条件

对于很多轴的设计，常常需要考虑其变形情况，即应满足刚度要求。例如，发动机的凸轮轴扭转角过大，会影响气阀开关时间；又如，车床丝杆扭转角过大，会影响车刀进给，降低加工精度。

因式(3.25)表示的扭转角与轴的长度 l 有关，为消除长度的影响，在工程实际中通常用 φ 对 x 的变化率 $d\varphi/dx$ 来表示扭转变形的程度，称为单位长度扭转角，用 φ' 表示。由式(3.25)有

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{T}{GI_p} \tag{3.27}$$

所以，圆轴扭转的**刚度条件**建立以下公式，即

$$\frac{T_{max}}{GI_p} \leqslant [\varphi'] \tag{3.28}$$

式中，$[\varphi']$ 为许可单位长度扭转角，其常用单位是 $(°)/m$。

由于按式(3.27)计算所得结果的单位为 rad/m，故需将式(3.28)左边单位换算为 $(°)/m$，于是有

$$\frac{T_{max}}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} \leqslant [\varphi'] \tag{3.29}$$

对于一般传动轴，$[\varphi']$ 为 0.5°/m～1.0°/m。更多轴类零件的 $[\varphi']$ 值可从有关规范或手册中查到。

例 3.4　如图 3.13 所示，圆截面轴 AC，承受扭力矩 M_A、M_B 与 M_C 的作用。已知 $M_A = 200\ N\cdot m$，$M_B = 500\ N\cdot m$，$M_C = 300\ N\cdot m$，$l_1 = l_2 = 2\ m$，$l_1 = l_2 = 2\ m$，$d = 40\ mm$，$G = 80\ GPa$。

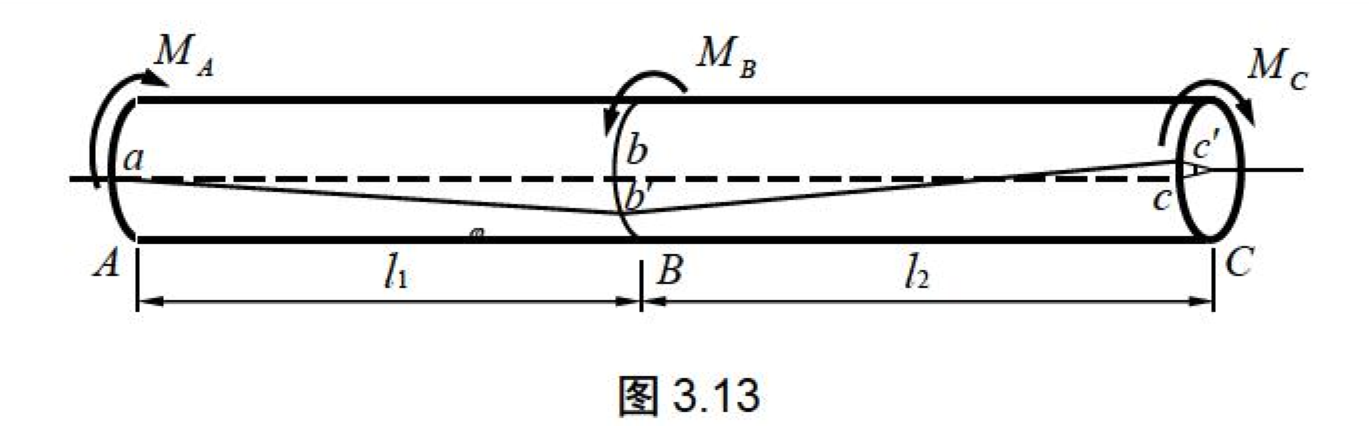


图 3.13

(1) 试求轴的总扭转角。

(2) 设单位长度许用扭转角 $[\varphi']=1°/\mathrm{m}$，试校核刚度。

解： (1) 利用截面法，得 AB 与 BC 段的扭转分别为

$$T_1 = M_A = 200\ \mathrm{N\cdot m}$$

$$T_2 = -M_C = -300\ \mathrm{N\cdot m}$$

计算传动轴的极惯性矩，即

$$I_{\mathrm{p}} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3.14\times 40^4}{32}\mathrm{mm}^4 = 2.512\times 10^5\,\mathrm{mm}^4$$

(2) 计算轴的总扭转角。

由于各段轴的扭矩不同，为了计算轴的总扭转角，首先需要求出每一段轴的扭转角。设 AB 与 BC 段的扭转角分别为 φ_1、φ_2，由式(3.25)可知

$$\varphi_1 = \frac{T_1 l_1}{GI_{\mathrm{p}}} = \frac{200\times 2}{80\times 10^9\times 2.52\times 10^{-7}}\mathrm{rad} = 0.02\mathrm{rad}$$

$$\varphi_2 = \frac{T_2 l_2}{GI_{\mathrm{p}}} = \frac{-300\times 2}{80\times 10^9\times 2.52\times 10^{-7}}\mathrm{rad} = -0.03\mathrm{rad}$$

由此得轴 AC 的总扭转角为

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 0.02\mathrm{rad} - 0.03\mathrm{rad} = -0.01\mathrm{rad}$$

在图 3.13 中，同时画出了扭转时母线 ac 的位移情况，它由 abc 变为折线 $ab'c'$，由此可更清晰地显示扭转变形的情况。

(3) 该轴为等截面轴，而 BC 段的扭矩最大，故此段的扭转角变化率也最大，其值为

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{\varphi_2}{l_2}\times\frac{180}{\pi} = 0.86\,°/\mathrm{m} < [\varphi']$$

由此，该轴符合刚度要求。

3.6　圆轴扭转的超静定问题

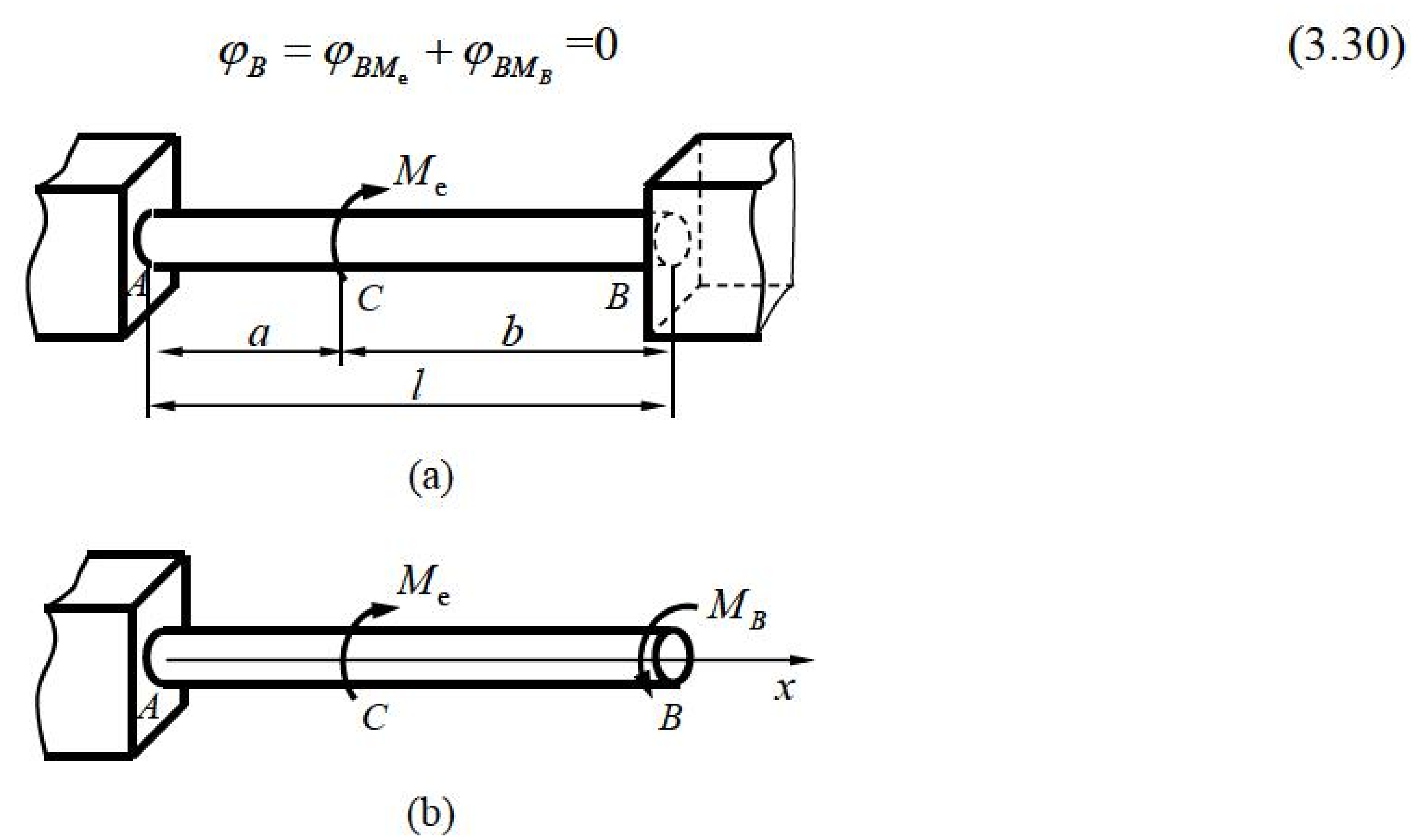
在一些工程实际中，有时出现受扭转杆件的约束条件较为复杂，或受扭杆件不是用单一材料制成，杆件的约束反力或所受扭矩无法由静力平衡方程直接求出，形成扭转超静定问题。这种情况下，必须通过用扭转变形相容条件来建立补充方程求解。下面通过分析两种情形来说明扭转超静定问题的解法。

图 3.14(a)所示为一两端固定的圆形截面杆 AB，杆的直径为 d，长度为 l，剪切弹模量为 G，在杆截面 C 处受外力偶矩 M_{e}。试求两端支反力偶矩的大小。

对此问题，圆截面杆受两个未知支反力偶矩 M_A、M_B，而只能列出一个平衡方程

$\sum M_x=0$，故为一次超静定问题。为此，首先取支座 B 为多余约束，解除多余约束后代之多余约束力偶矩 M_B，如图 3.14(b)所示。其次利用扭转变形相容条件建立补充方程，基本静定系中的自由端 B 在外力偶 M_e、支反力偶矩 M_B 的共同作用下，其扭转角等于零，即

$$\varphi_B=\varphi_{BM_e}+\varphi_{BM_B}=0 \tag{3.30}$$



(a)

(b)

图 3.14

由扭转变形的物理关系有

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{BM_e}&=\frac{M_e a}{GI_p}\\ \varphi_{BM_B}&=\frac{M_e a}{GI_p}\end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

将式(3.31)代入式(3.30)，得补充方程

$$\frac{M_e a}{GI_p}-\frac{M_B l}{GI_p}=0$$

解得支反力偶矩 M_B 为

$$M_B=\frac{a}{l}M_e$$

解得 M_B 后，可由静力平衡方程求出 A 端支反力偶矩 M_A。

另一个实例如图 3.15(a)所示，一受扭杆件由不同材料的实心杆和空心杆组合而成，通过焊接构成一整体杆件。设实心杆和空心杆的扭转刚度分别为 $G_a I_{pa}$ 和 $G_b I_{pb}$，试求出实心杆和空心杆各承受的扭转力偶矩。

在这一问题中，实心杆和空心杆承受的扭转力偶矩 M_a 和 M_b 是两个未知量，只能列出一个平衡方程 $\sum M_x=0$，也是一次超静定问题，须建立一个补充方程。如图 3.15(b)所示，受扭变形相容条件是：因实心杆和空心杆焊接在一起，故两杆在两个未知扭转力偶矩作用下所产生的扭转角是相同的，即

$$\varphi_a=\varphi_b \tag{3.32}$$

式中，φ_a 为实心杆在 M_a 作用下产生的扭转角；φ_b 为实心杆在 M_b 作用下产生的扭转角。

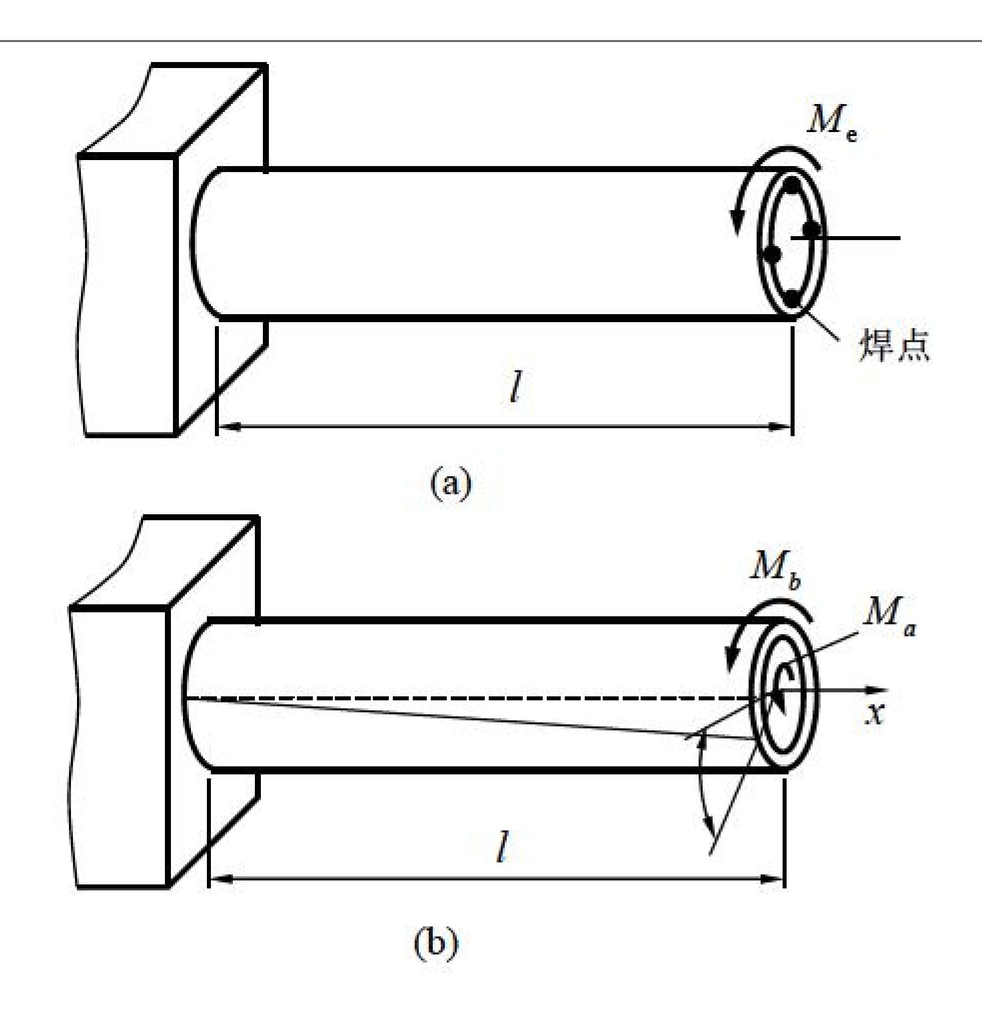


图 3.15

扭转变形的物理关系有

$$\left.\begin{aligned}\varphi_a &= \frac{M_a l}{G_a I_{pa}} \\ \varphi_b &= \frac{M_b l}{G_b I_{pb}}\end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

将式(3.33)代入式(3.32)，简化后得

$$M_a = \frac{G_a I_{pa}}{G_b I_{pb}} M_b \tag{3.34}$$

组合杆静力平衡方程为

$$M_a + M_b = M_e \tag{3.35}$$

联立求解式(3.34)、式(3.35)，整理后得

$$M_a = \frac{G_a I_{pa}}{G_a I_{pa} + G_b I_{pb}} M_e，\quad M_b = \frac{G_b I_{pb}}{G_a I_{pa} + G_b I_{pb}} M_e$$

3.7　矩形截面杆的扭转应力与变形

前面各节讨论了圆形截面杆的扭转问题。在工程实际中，有些受扭杆件的横截面并非圆形，其中较常见的是矩形截面轴，如农业机械中会采用方轴作为传动轴。

如图 3.16(a)所示，取一横截面为矩形的杆，在其侧面画上纵向线和横向周界线。扭转变形后发现横向周界线已变成空间曲线(见图 3.16(b))。这表明变形后杆的横截面已不再保持平面，即产生了翘曲现象。根据平面假设所建立的圆轴扭转公式，对于矩形截面轴已不再适用。

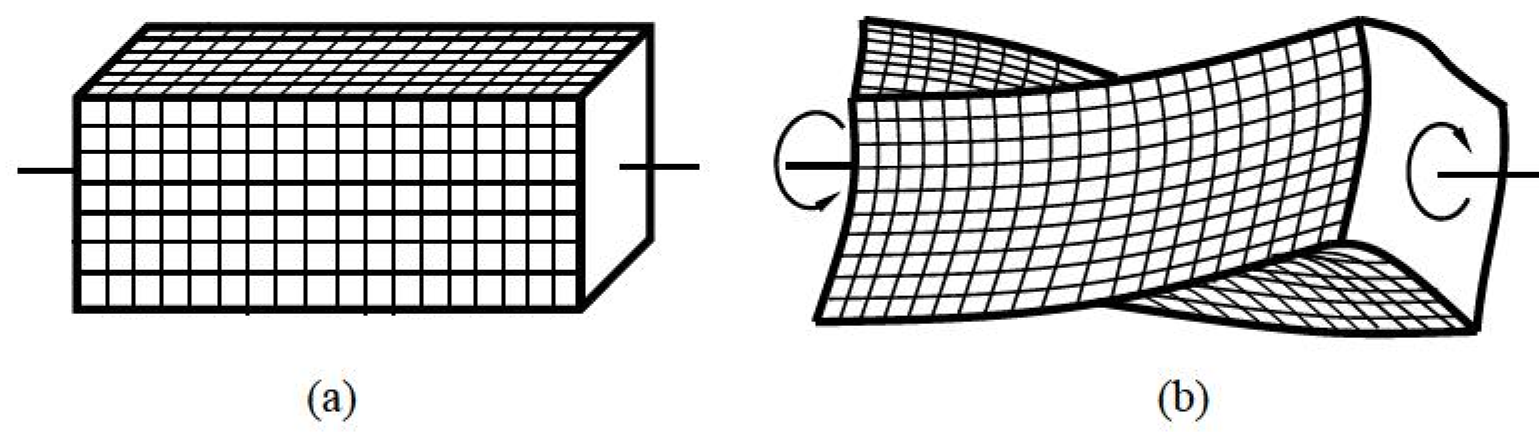


图 3.16

对于非圆截面杆的扭转，一般在弹性力学中讨论。这里直接引用弹性力学的一些结果，并仅限于矩形截面杆扭转的情况。弹性力学指出，矩形截面轴扭转时，横截面边缘各点处的切应力平行于截面周边，角点处的切应力为零；最大切应力 τ_{max} 发生在截面长边中点处，而短边中点处的切应力 τ_1 也有相当大的数值，如图 3.17 所示。τ_{max}、τ_1 可按式(3.36)、式(3.37)计算，即

$$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha h b^2} \tag{3.36}$$

$$\tau_1 = \nu \tau_{max} \tag{3.37}$$

杆件两端横截面的相对转角 φ 的计算公式为

$$\varphi = \frac{Tl}{G\beta h b^3} = \frac{Tl}{GI_t} \tag{3.38}$$

式中：h 和 b 分别表示矩形截面长边和短边的长度；系数 α、β 和 ν 均与比值 h/b 相关，并列于表 3.1 中；$GI_t = G\beta h b^3$，也被称为抗扭刚度。

上述结论与图 3.16(b)所示的试验现象是一致的。从试验中观察到，杆表面棱边处的切应变为零；而距棱边中点越近切应变越大，在侧面中线处切应变最大。

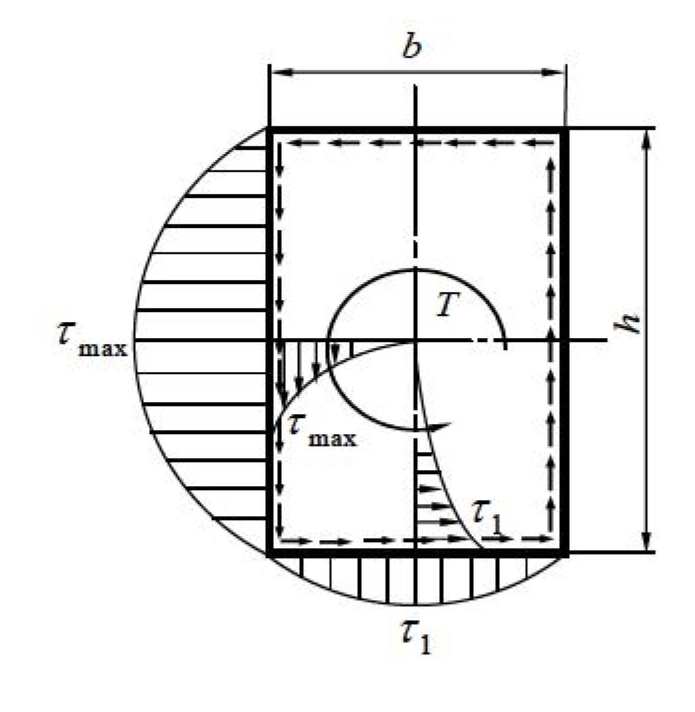


图 3.17

表 3.1　矩形截面杆扭转时的系数 α、β 和 ν

h/b	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	4.0	6.0	8.0	10.0	∞
α	0.208	0.231	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.196	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
ν	1.000	0.859	0.795	0.766	0.753	0.745	0.743	0.742	0.742	0.742

关于横截面边缘各点处的切应力平行于周边及角点处的切应力为零的结论，也可利用切应力互等定理得到证实。如图 3.18 所示，若横截面边缘某点 A 处的切应力不平行于周边，即存在有垂直于周边的切应力分量 τ_n 时，则根据切应力互等定理可知，杆表面必存在有切应力 τ_n'。然而，当杆表面无轴向剪切载荷作用时，$\tau_n' = 0$，可见，$\tau_n = 0$，即截面边缘切应力一定平行于周边。同样，在截面的角点处，如 B 点，由于该处杆表面的切应力 τ_1' 和 τ_2' 均为零，B 点处的切应力分量 τ_1 和 τ_2 也必为零。所以，横截面上角点处的切应力必

为零。

例 3.5　某矩形截面杆，横截面如图 3.19 所示。若扭矩 $T = 2\text{kN}\cdot\text{m}$，试求横截面上 A、B 点处的切应力。

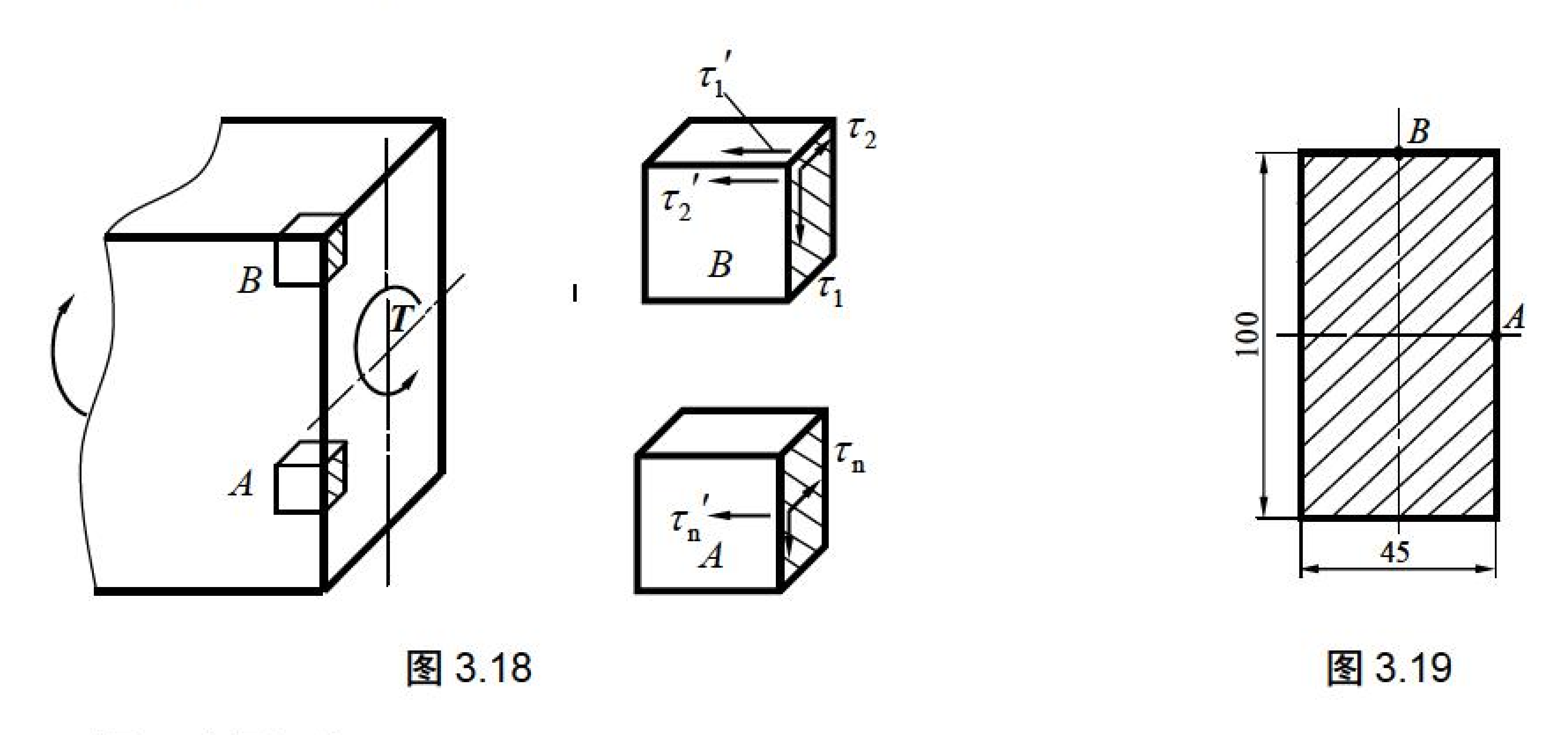


图 3.18　　　　图 3.19

解： 由图可知

$$\frac{h}{b} = \frac{100}{40} = 2.5$$

从表 3.1 中查得，当 $h/b = 2.5$ 时，$\alpha = 0.258$，$\beta = 0.249$，$\nu = 0.766$。A、B 点的应力可由式(3.36)、式(3.37)得

$$\tau_A = \frac{T}{\alpha h b^2} = \frac{2\times10^3}{0.258\times100\times10^{-3}\times\left(40\times10^{-3}\right)^2} = 48.4\ \text{MPa}$$

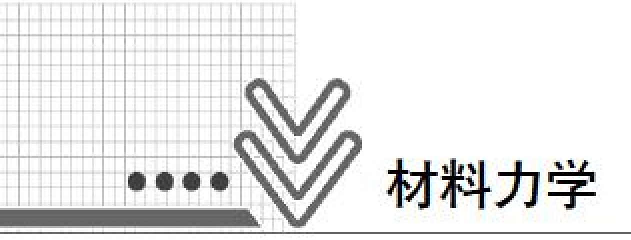
$$\tau_B = \gamma\tau_A = 0.766\times48.4 = 37.1\ \text{MPa}$$

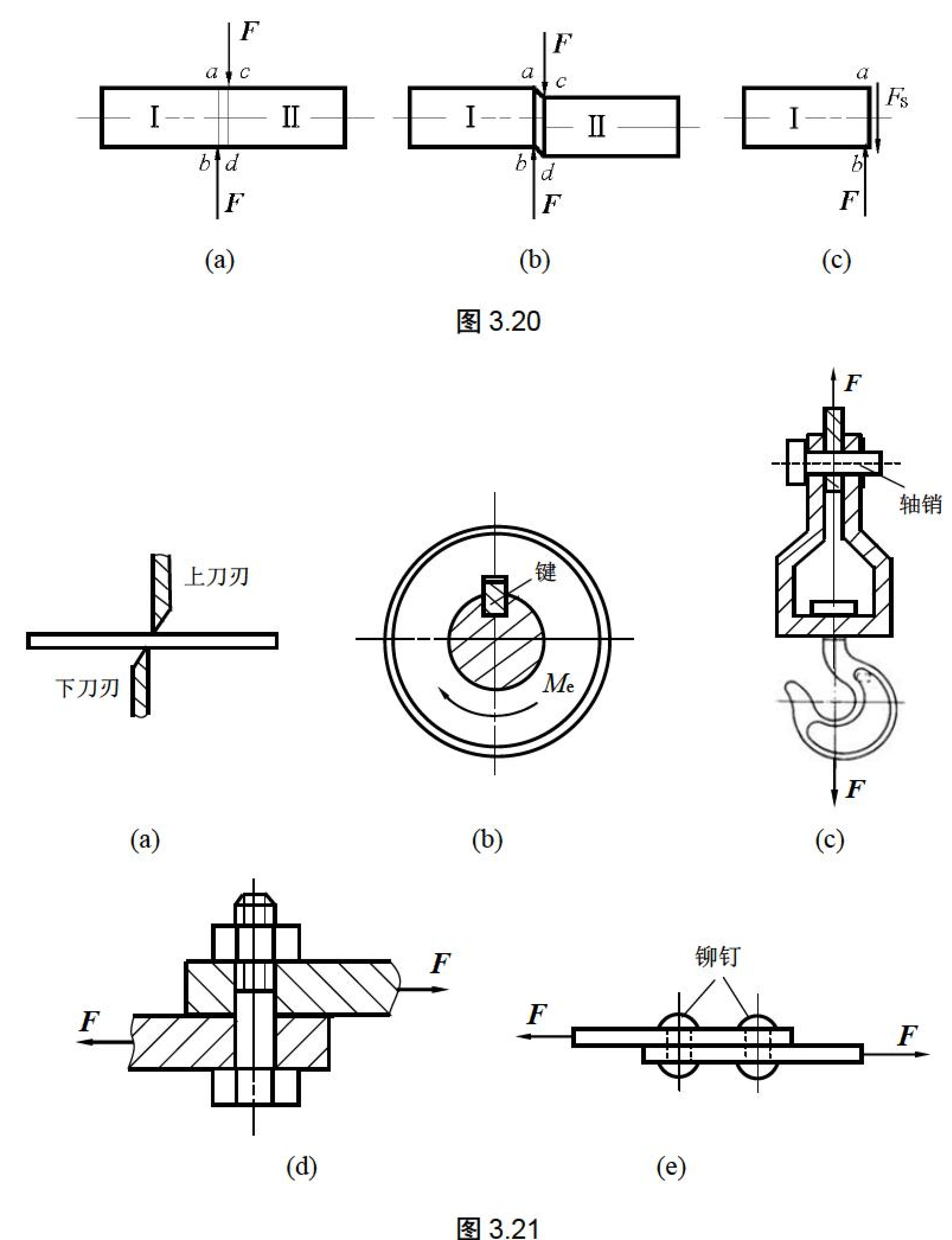
3.8　剪切和挤压的实用计算

3.8.1　剪切的概念

剪切是杆件的基本变形形式之一。如图 3.20(a)所示，当杆件受大小相等、方向相反、作用线相距很近的一对横向作用力时，杆件将发生剪切变形，杆件横截面 cd 相对横截面 ab 发生错动(见图 3.20(b))。当相对错动面之间的材料产生塑性变形或剪断时，杆件就产生剪切破坏。产生相对错动的截面称为剪切面；在剪切面上产生的内力称为力，用 F_s 表示，如图 3.20(c)所示。剪力在剪切面上形成切应力。

工程应用中，产生剪切变形的实例较多，如在剪床上剪切钢筋或钢板(见图 3.21(a))，机器或工程结构中的连接件如螺栓、键、铆钉、销等都是主要承受剪切的构件。例如，用来连接齿轮与轴的键(见图 3.21(b))，机器和结构中常用的螺栓(见图 3.21(d))或铆钉(见图 3.21(e))，吊装重物的轴销(见图 3.21(c))等。





(a) (b) (c)

图 3.20

(a) (b) (c)

(d) (e)

图 3.21

3.8.2 剪切的实用计算

受剪切变形的构件尺寸较小，其变形情况较为复杂，在工程设计中为简化计算，通常采用实用计算法。以图 3.22 所示的螺栓连接为例，两块钢板承受拉力 $\boldsymbol{F}$ 后，螺栓两侧面受到两个分布压力的作用(见图 3.22(a))，运用截面法可得到剪切面上的内力，即剪力 F_s，如图 3.22(b)所示。在剪切实用计算中，假设剪切面上各点处的切应力是均匀分布的，于是可得到剪切面上的名义切应力为

$$\tau = \frac{F_s}{A} \tag{3.39}$$

式中，A 为剪切面的面积。

可以通过直接试验测得剪切时的材料许用切应力$[\tau]$，即由剪切试验测出材料失效时的极限荷载，并按式(3.39)求得名义极限切应力 τ_u，再除以安全因数得到许用切应力$[\tau]$。

这时，剪切强度条件可表示为



$$\tau = \frac{F_s}{A} \leqslant [\tau] \tag{3.40}$$

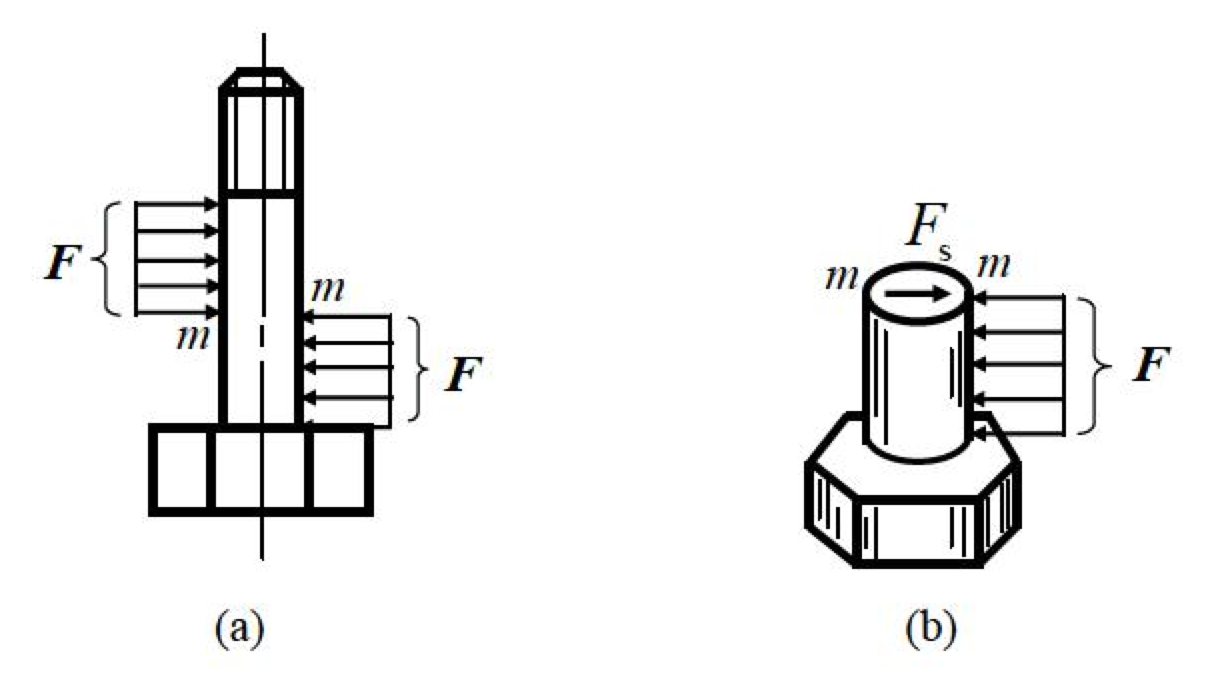


图 3.22

例 3.6　已知一钢板厚度 $\delta = 8\text{mm}$，其剪切极限应力 $\tau_u = 300\text{MPa}$，在冲床上将钢板冲出直径 $d = 30\text{mm}$ 的孔，如图 3.23(a)所示。试求冲床需要施加的冲压力 F。

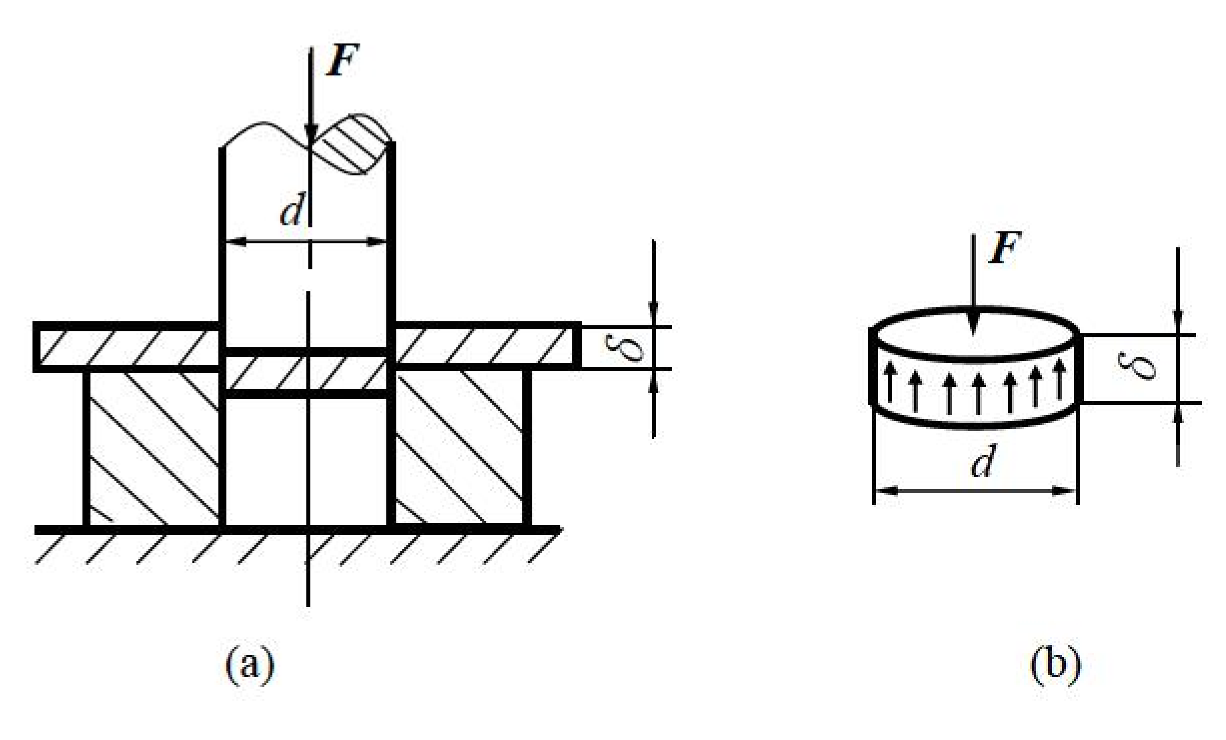


图 3.23

解：在冲孔时，冲头下面的板材因剪切破坏将与原板产生分离，其剪切面是被冲头冲出的圆柱的侧面，如图 3.23(b)所示。剪切面面积为

$$A = \pi d\delta = \pi \times 30 \times 10^{-3} \times 8 \times 10^{-3}\,\text{m}^2 = 754 \times 10^{-6}\,\text{m}^2$$

冲孔所需要的冲压力为

$$F \geqslant A\tau_u = 754 \times 10^{-6} \times 300 \times 10^{6}\,\text{N} = 226.2 \times 10^{3}\,\text{N} = 226.2\text{kN}$$

3.8.3　挤压的实用计算

在如图 3.24(a)所示的铆钉连接中，铆钉与钢板相互接触的表面发生彼此之间的相互压紧，这种现象称为**挤压**。当接触面上的挤压力过大时，会导致接触面局部产生塑性变形，使铆钉孔变成长圆孔或铆钉变成扁圆柱。为防止连接件挤压失效，必须进行挤压强度校核。

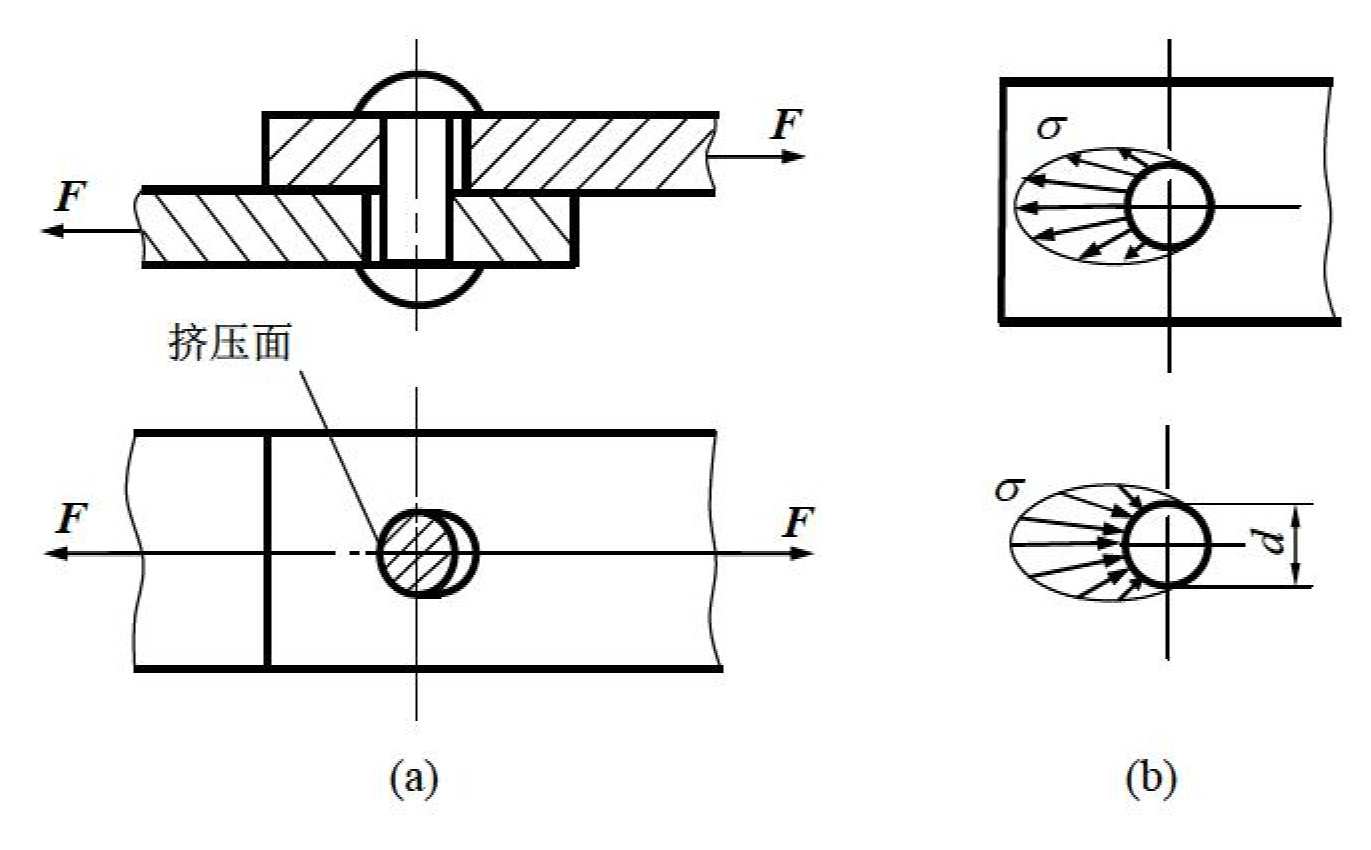


图 3.24

在连接件中，除键连接的接触面为平面外，大多数连接件(如螺栓、铆钉、销等)为圆柱面，其挤压应力的分布如图 3.24(b)所示，最大应力出现在接触面中部，应力计算较为复杂。工程中挤压应力采用实用计算，即假设在接触面上的挤压应力均匀分布，其名义挤压应力为

$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}} \tag{3.41}$$

式中，A_{bs} 为计算挤压面积。当接触面为圆柱面时，A_{bs} 取实际接触面在直径平面的投影面积(见图 3.25(a))；当接触面为平面时(如键连接)，A_{bs} 取实际接触面积(见图 3.25(b))。由实用计算式计算出的名义挤压应力与接触面中点处的最大挤压应力相近。

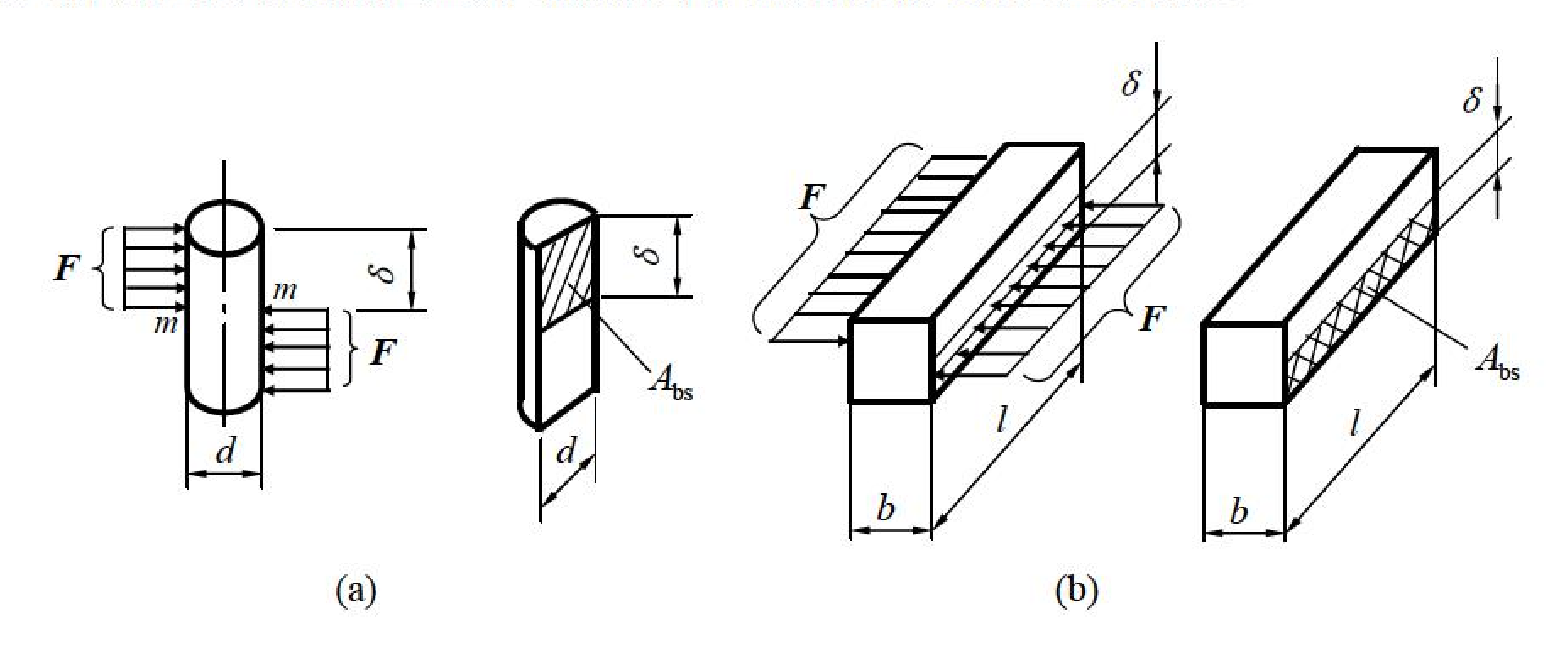


图 3.25

通过直接试验，并按式(3.41)得到极限挤压应力后，从而可确定出材料的许用挤压应力 $[\sigma_{bs}]$，则挤压强度条件为

$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}} \leqslant [\sigma_{bs}] \tag{3.42}$$

需要强调的是，在挤压强度校核中，当连接件和被连接件的材料不同时，应校核许用挤压强度较低的材料的挤压强度。

例 3.7 图 3.26(a)所示为轴通过键连接带动齿轮(图中未画出)转动。已知轴的直径

$d = 70\text{mm}$，键的尺寸为$b \times h \times l = 20\text{mm} \times 12\text{mm} \times 100\text{mm}$，传递的扭转力偶矩$M_e = 2\text{kN} \cdot \text{m}$，键的许用剪切应力$[\tau] = 60\text{MPa}$，许用挤压应力$[\sigma_{bs}] = 100\text{MPa}$。试校核键的强度。

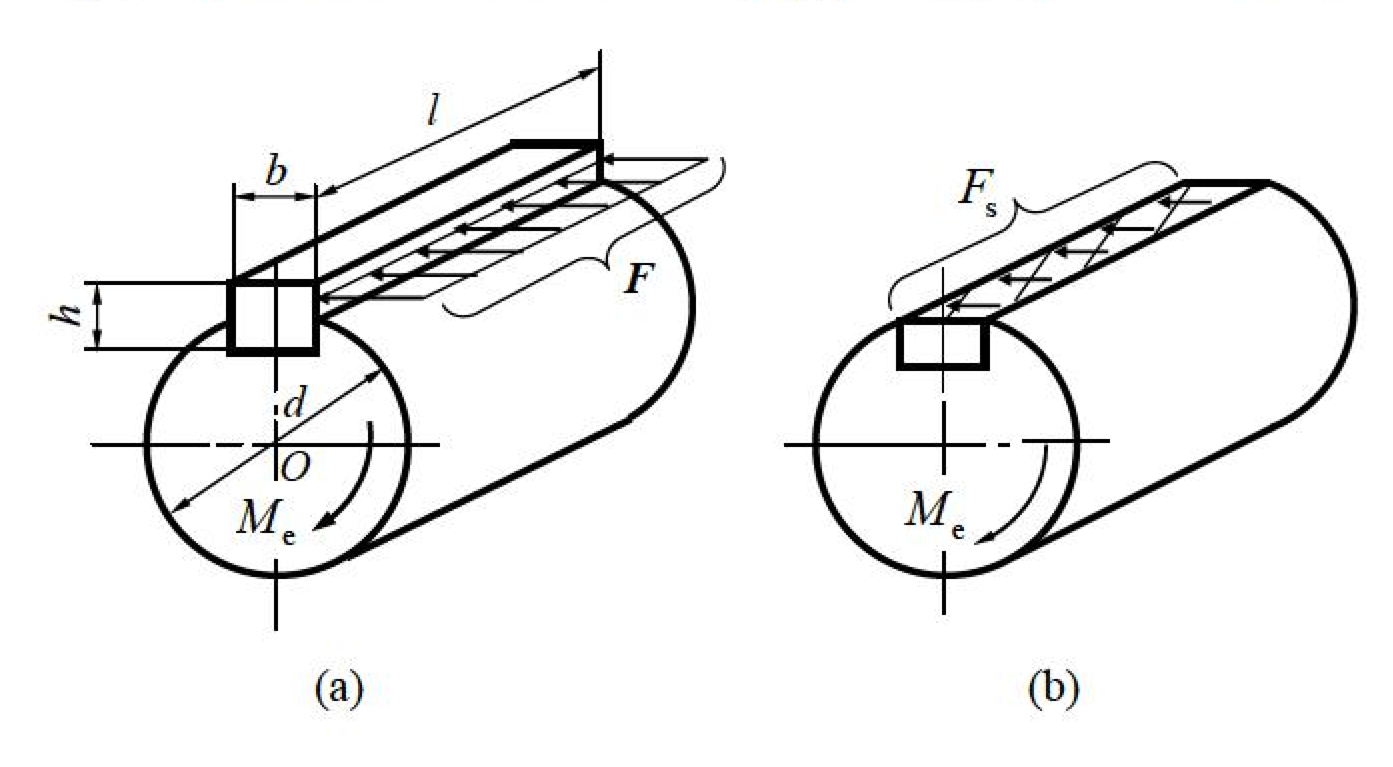


图 3.26

解：(1)由静力平衡条件求出齿轮作用在键上半部分的挤压力。由平衡方程

$$\sum M_o = 0, \quad F\left(\frac{d}{2} + \frac{h}{4}\right) - M_e = 0$$

$$F = \frac{4M}{2d + h} = \frac{4 \times 2 \times 10^3}{2 \times 0.07 + 0.12}\text{N} = 52.6 \times 10^3\text{N}$$

(2)　校核剪切强度。如图 3.26(b)所示，键剪切面上的剪力为

$$F_s = F = 52.6 \times 10^3\text{N}$$

由式(3.40)有

$$\tau = \frac{F_s}{A} = \frac{F_s}{bl}\frac{52.6 \times 10^3}{0.02 \times 0.1}\text{Pa} = 26.3 \times 10^6\text{Pa} = 26.3\text{MPa} < [\tau] = 60\text{MPa}$$

满足剪切强度要求。

(3)　校核挤压强度。由式(3.42)有

$$\sigma_{bs} = \frac{F}{A_{bs}} = \frac{F}{(h/2) \times l} = \frac{52.6 \times 10^3}{0.006 \times 0.1}\text{Pa} = 87.7 \times 10^6\text{Pa} = 87.7\text{MPa} < [\sigma_{bs}] = 100\text{MPa}$$

满足挤压强度要求。

本 章 小 结

扭转的受力特征是杆件两端存在两个大小相等、方向相反、且作用平面与杆件轴线垂直的外力偶。其变形特征是杆件的任意两个截面都发生绕轴线的相对转动。

外力偶矩通常由轴所传递的功率及其转速计算得到，扭转时圆轴横截面内的内力称为扭矩。薄壁圆筒扭转实验表明，圆轴扭转时横截面内只有切应力而无正应力。

切应力互等定理为：在单元体相互垂直的两个平面上，切应力必成对存在，且数值相等；两者都垂直于两个平面的交线，方向则共同指向或共同背离这一交线。

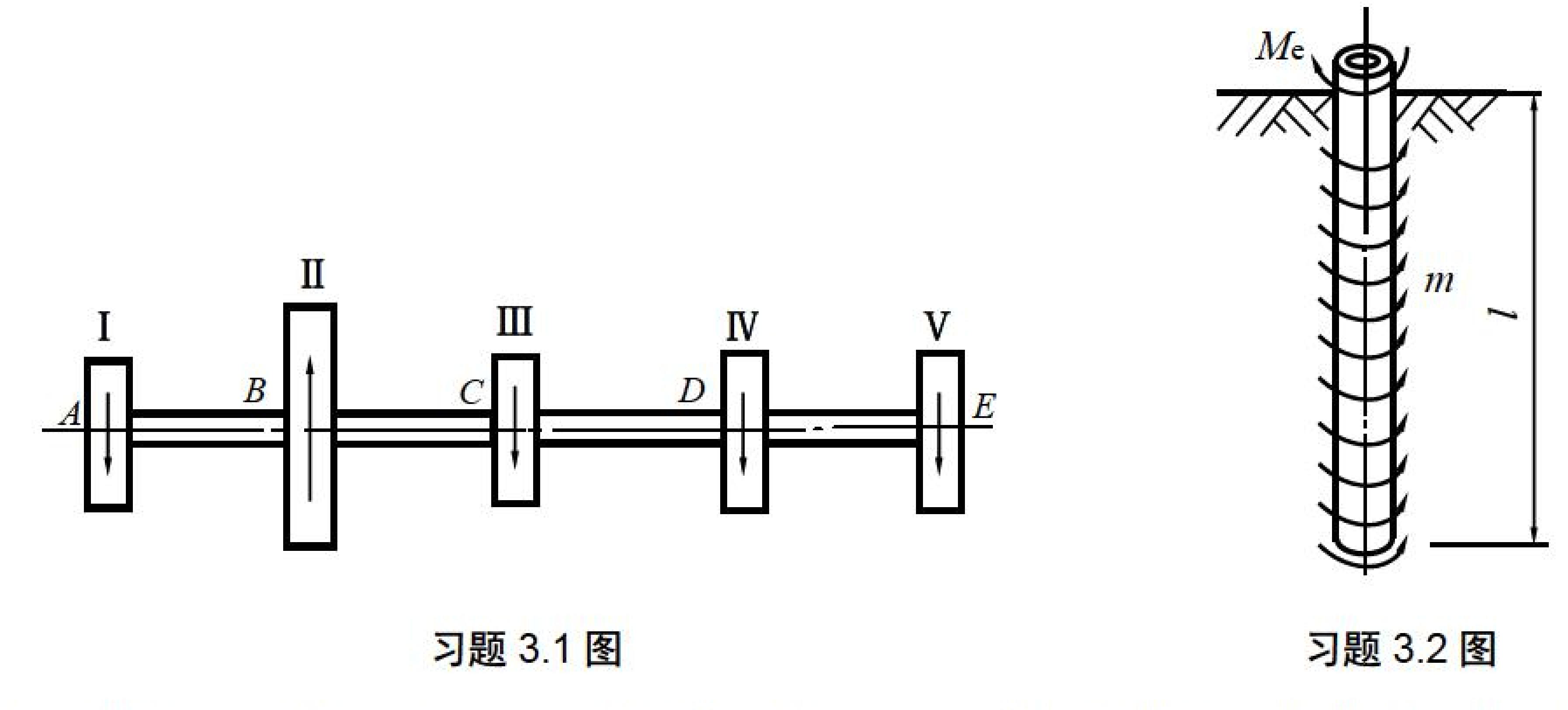
圆轴扭转时的变形与薄壁圆管的情况类似，但切应力在横截面内不再认为是均匀分布。扭转中的超静定问题亦可通过变形协调方程获得补充方程的方法求解。矩形等非圆截

面轴扭转时横截面不再保持平面，不能采用平面假设，矩形截面轴扭转时，横截面边缘每点处的切应力平行于截面周边，角点处的切应力为零。 在连接件剪切面上产生的内力称为剪力。

习　　题

3.1 如习题 3.1 图所示，一传动轴做匀速转动，转速 $n = 200\ \mathrm{r/min}$，轴上装有 5 个轮子，主动轮 II 输入的功率为 60kW，从动轮 I、III、IV、V 依次输出 18kW、12kW、22kW 和 8kW。试作轴的扭矩图。

3.2 如习题 3.2 图所示，一钻探机的功率为 10kW，转速 $n = 180\ \mathrm{r/min}$。钻杆钻入土层的深度 $l = 40\ \mathrm{m}$。如土壤对钻杆的阻力可看作是均匀分布的力偶，试求分布力偶的集度 m，并作钻杆的扭矩图。



习题 3.1 图　　习题 3.2 图

3.3 圆轴的直径 $d = 50\mathrm{mm}$，转速为 120r/min。若该轴横截面上的最大切应力等于 60MPa，试问所传递的功率为多大？

3.4 空心钢轴的外径 $D = 100\mathrm{mm}$，内径 $d = 50\mathrm{mm}$。已知间距为 $l = 2.7\mathrm{m}$ 的两横截面的相对扭转角 $\varphi = 1.8°$，材料的切变模量 $G = 80\mathrm{GPa}$。试求：

(1) 轴内的最大切应力。

(2) 当轴以 $n = 80\mathrm{r/min}$ 的速度旋转时轴所传递的功率。

3.5 某小型水电站的水轮机容量为 50kW，转速为 300r/min，钢轴直径为 75mm，若在正常运转下且只考虑扭矩作用，其许用切应力 $[\tau] = 20\mathrm{MPa}$。试校核轴的强度。

3.6 已知钻探机钻杆(参见习题 3.2 图)的外径 $D = 60\mathrm{mm}$，内径 $d = 50\mathrm{mm}$，功率 $P = 7.355\mathrm{kW}$，转速 $n = 180\mathrm{r/min}$，钻杆入土深度 $l = 40\mathrm{m}$，钻杆材料的 $G = 80\mathrm{GPa}$，许用切应力 $[\tau] = 40\mathrm{MPa}$。假设土壤对钻杆的阻力是沿长度均匀分布的，试求：

(1) 进行强度校核。

(2) 两端截面的相对扭转角。

3.7 如习题 3.7 图所示，实心圆轴的直径 $d = 100\mathrm{mm}$，长 $l = 1\mathrm{m}$，其两端所受外力偶矩 $M_e = 14\mathrm{kN \cdot m}$，材料的切变模量 $G = 80\mathrm{GPa}$。试求：

(1) 最大切应力及两端面间的相对转角。

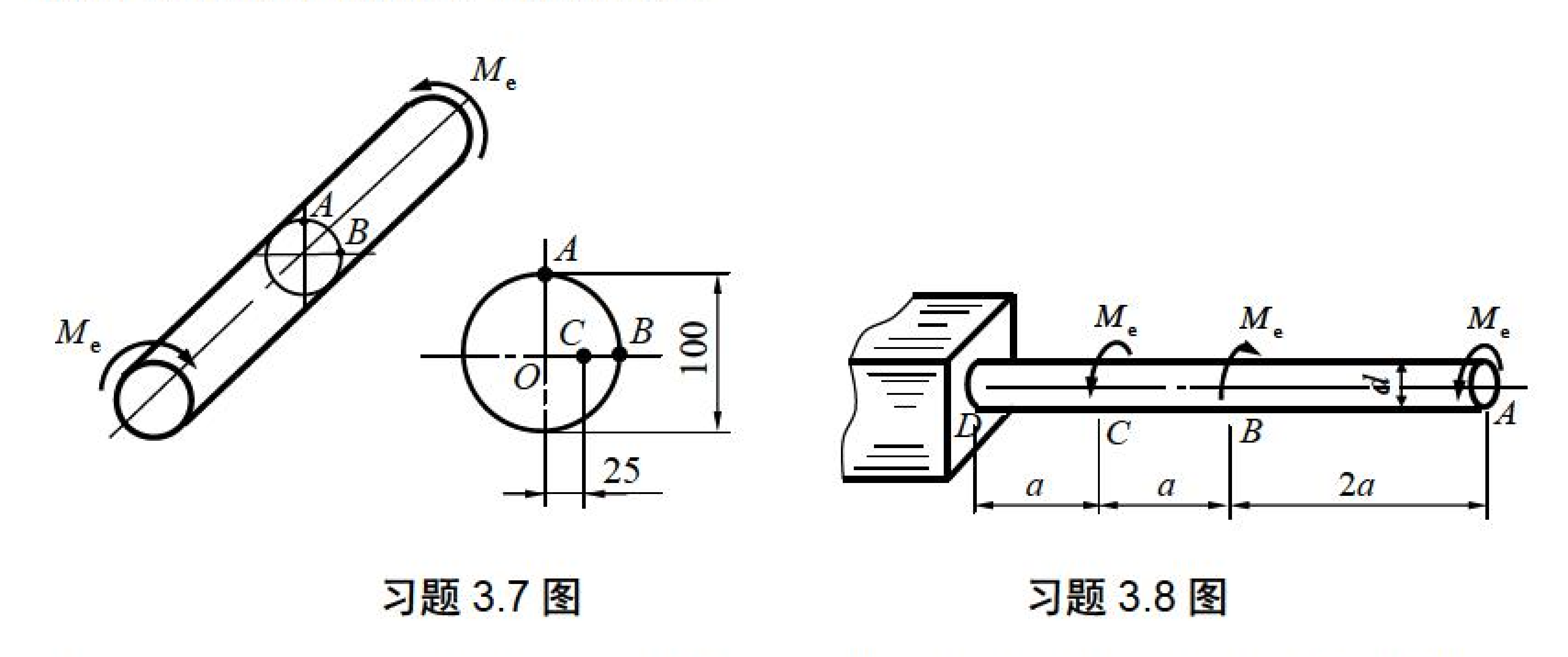
(2) 图示截面上 A、B、C 三点处切应力的数值及方向。

(3) C 点处的切应变。

3.8 如习题 3.8 图所示一等直圆杆，已知 $d = 40\text{mm}$ ， $a = 400\text{mm}$ ， $G = 80\text{GPa}$ ， $\varphi_{DB} = 1°$ 。试求：

(1) 最大切应力。

(2) 截面 A 相对于截面 C 的扭转角。



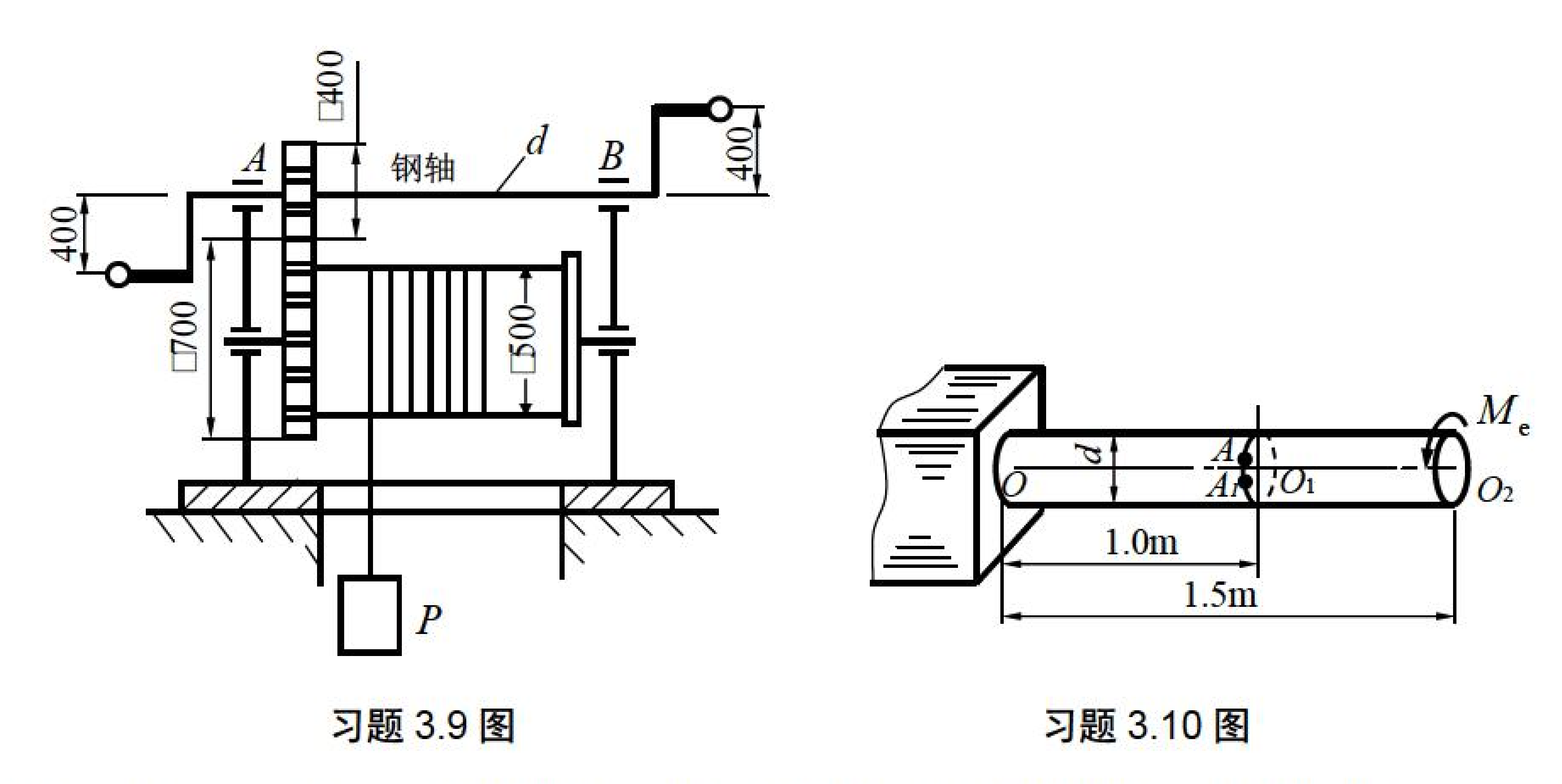
习题 3.7 图　　　　习题 3.8 图

3.9 如习题 3.9 图所示绞车由两人同时操作，若每人在手柄上沿着旋转的切向作用力 F 均为 0.2kN，已知轴材料的许用切应力 $[\tau] = 40\text{MPa}$ ，试求：

(1) AB 轴的直径。

(2) 绞车所能吊起的最大重量。

3.10 直径 $d = 50\text{mm}$ 的等直圆杆，在自由端截面上承受外力偶 $M_e = 6\text{kN}\cdot\text{m}$ ，而在圆杆表面上的 A 点将移动到 A_1 点，如习题 3.10 图所示。已知 $\Delta s = \widehat{AA_1} = 3\text{mm}$ ，圆杆材料的弹性模量 $E = 210\text{GPa}$ ，试求泊松比 μ 。



习题 3.9 图　　　　习题 3.10 图

3.11 直径 $d = 25\text{mm}$ 的钢圆杆，受轴向拉力 60kN 作用时，在标距为 200mm 的长度内伸长了 0.113mm。当其承受一对扭转外力偶矩 $M_e = 0.2\text{kN}\cdot\text{m}$ 时，在标距为 200mm 的长度内相对扭转了 $0.732°$ 的角度。试求钢材的弹性常数 E、G 和 μ 。

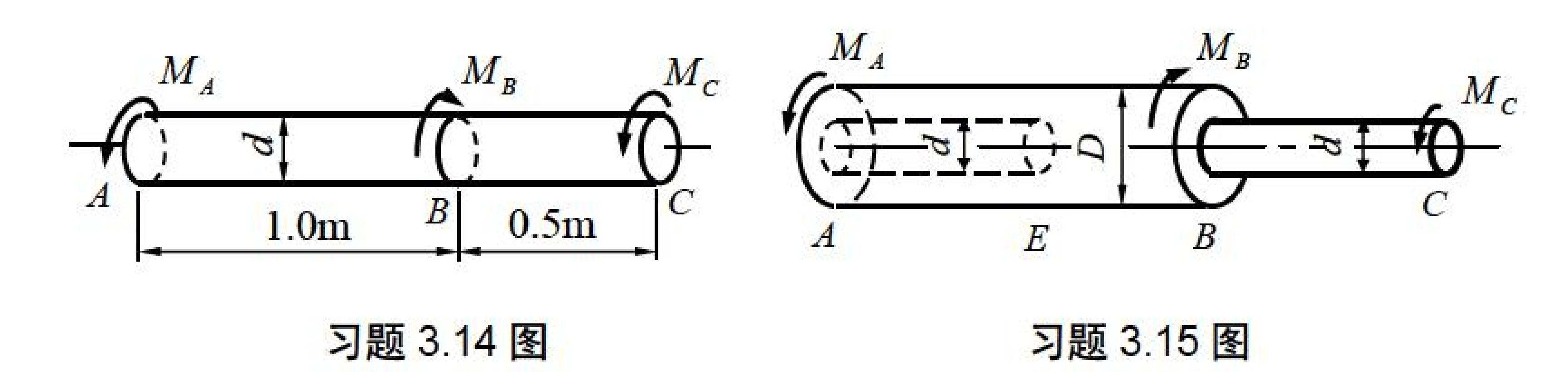
3.12 长度相等的两根受扭圆轴，一根为空心圆轴，另一根为实心圆轴，两者的材料

相同，受力情况也一样。实心轴直径为 d；空心轴的外径为 D，内径为 d_0，且 $d_0/D=0.8$。试求当空心轴与实心轴的最大切应力均达到材料的许用切应力($\tau_{\max}=[\tau]$)，扭矩 T 相等时的重量比和刚度比。

3.13 已知实心圆轴的转速 $n=300\text{r}/\text{min}$，传递的功率 $p=330\text{kW}$，轴材料的许用切应力 $[\tau]=60\text{MPa}$，切变模量 $G=80\text{GPa}$。若要求在 2m 长度的相对扭转角不超过 $1°$，试求该轴的直径。

3.14 如习题 3.14 图所示等直圆杆，已知外力偶 $M_A=2.99\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_B=7.20\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_C=4.21\text{kN}\cdot\text{m}$，许用切应力 $[\tau]=70\text{MPa}$，许可单位长度扭转角 $[\varphi']=1°/\text{m}$，切变模量 $G=80\text{GPa}$。试确定该轴的直径 d。

3.15 如习题 3.15 图所示的阶梯形圆杆，AE 段为空心，外径 $D=140\text{mm}$，内径 $d=100\text{mm}$；BC 段为实心，直径 $d=100\text{mm}$。外力偶矩 $M_A=18\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_B=32\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_C=14\text{kN}\cdot\text{m}$，许用切应力 $[\tau]=80\text{MPa}$，许可单位长度扭转角 $[\varphi']=1.2°/\text{m}$，切变模量 $G=80\text{GPa}$。试校核该轴的强度和刚度。

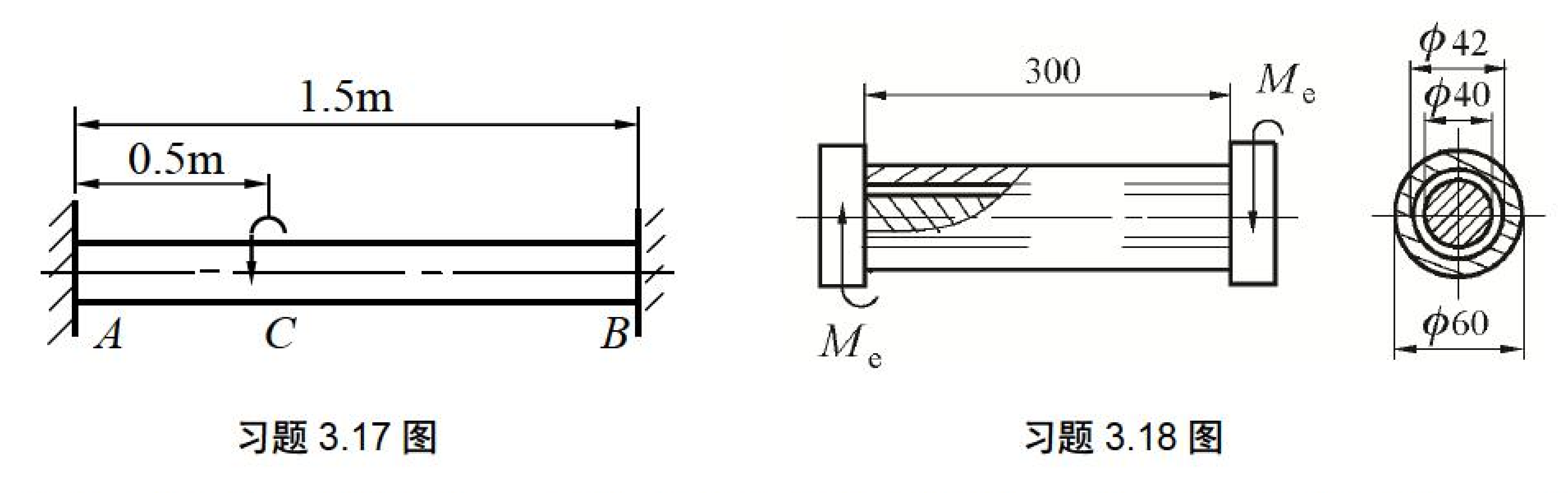


习题 3.14 图　　　　习题 3.15 图

3.16 习题 3.1 图所示的轴，材料为钢，其许用切应力 $[\tau]=20\text{MPa}$，切变模量 $G=80\text{GPa}$，许可单位长度扭转角 $[\varphi']=2.5°/\text{m}$。试按强度条件及刚度条件选择圆轴的直径。

3.17 如习题 3.17 图所示一两端固定的钢圆轴，其直径 $d=60\text{mm}$，轴在 C 截面承受一外力偶矩 $M_C=3.8\text{kN}\cdot\text{m}$，已知钢的切变模量 $G=80\text{GPa}$。试求截面 C 两侧横截面上的最大切应力和 C 截面的转角。

3.18 如习题 3.18 图所示组合杆由套管和芯轴组成，组合杆两端与刚性板牢固连接在一起。设作用在刚性板上的扭转力偶矩 $M_e=2\text{kN}\cdot\text{m}$，套管和芯轴的切变模量分别为 $G_1=40\text{GPa}$、$G_2=80\text{GPa}$，试求套管和芯轴的扭矩及最大扭转切应力。



习题 3.17 图　　　　习题 3.18 图

3.19 如习题 3.19 图所示一空心圆管 A 套在实心圆杆 B 的一端，两杆在同一横截面处各有一直径相同的贯穿孔，但两孔的中心线构成一个 β 角。现在杆 B 上施加外力偶使杆 B 扭转，以使两孔对准，并穿过孔装上销钉，装上销钉后卸除施加在杆 B 上的外力偶。已知

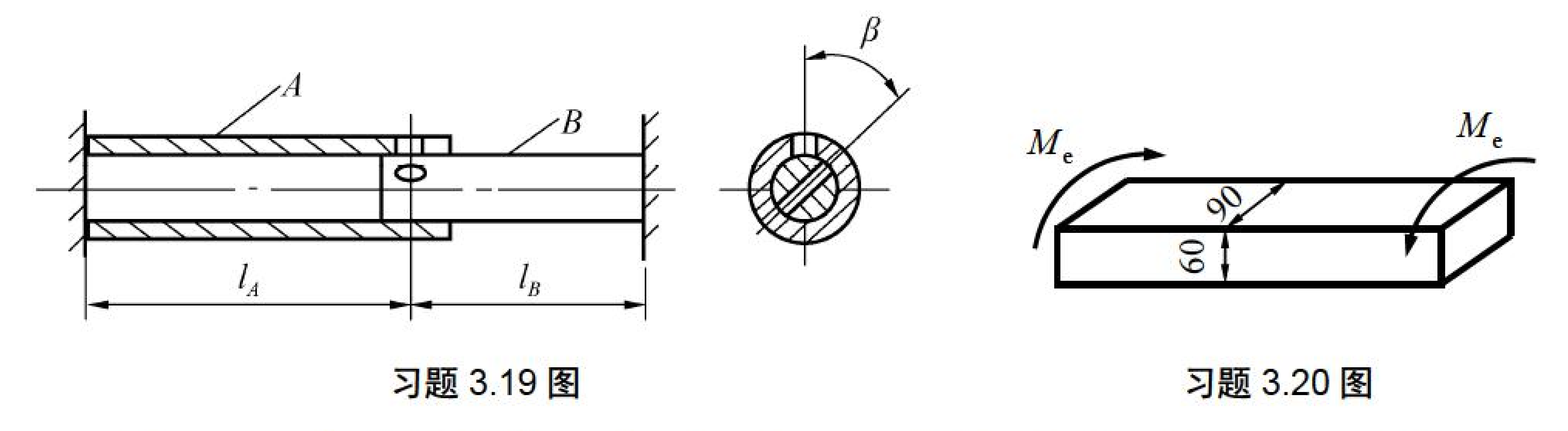
管 A 和杆 B 的极惯性矩分别为 I_{pA} 和 I_{pB}；两杆的材料相同，其切变模量为 G。试求管 A 和杆 B 横截面上的扭矩。

3.20　如习题 3.20 图所示矩形截面钢杆承受一对外力偶 $M_e = 3\text{kN}\cdot\text{m}$ 。已知材料的切变模量 $G = 80\text{GPa}$ ，试求：

(1) 杆内最大切应力的大小、位置和方向。

(2) 横截面短边中点处的切应力。

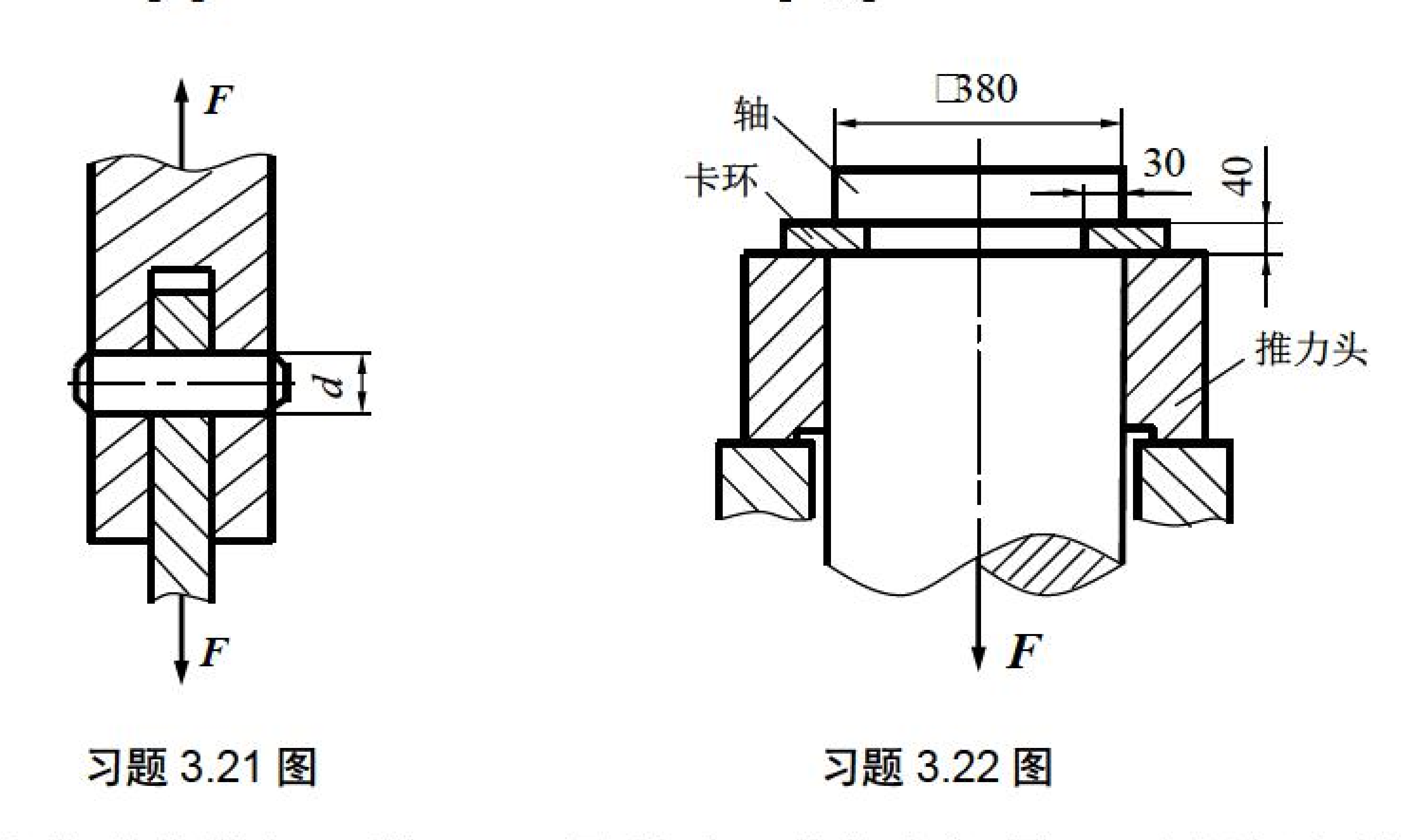
(3) 杆的单位长度扭转角。



习题 3.19 图　　　　习题 3.20 图

3.21　如习题 3.21 图所示销钉连接中，已知 $F = 95\text{kN}$，销钉直径 $d = 30\text{mm}$ ，材料许用应力 $[\tau] = 60\text{MPa}$ 。试校核销钉的剪切强度。若强度不够，应设计多大直径的销钉？

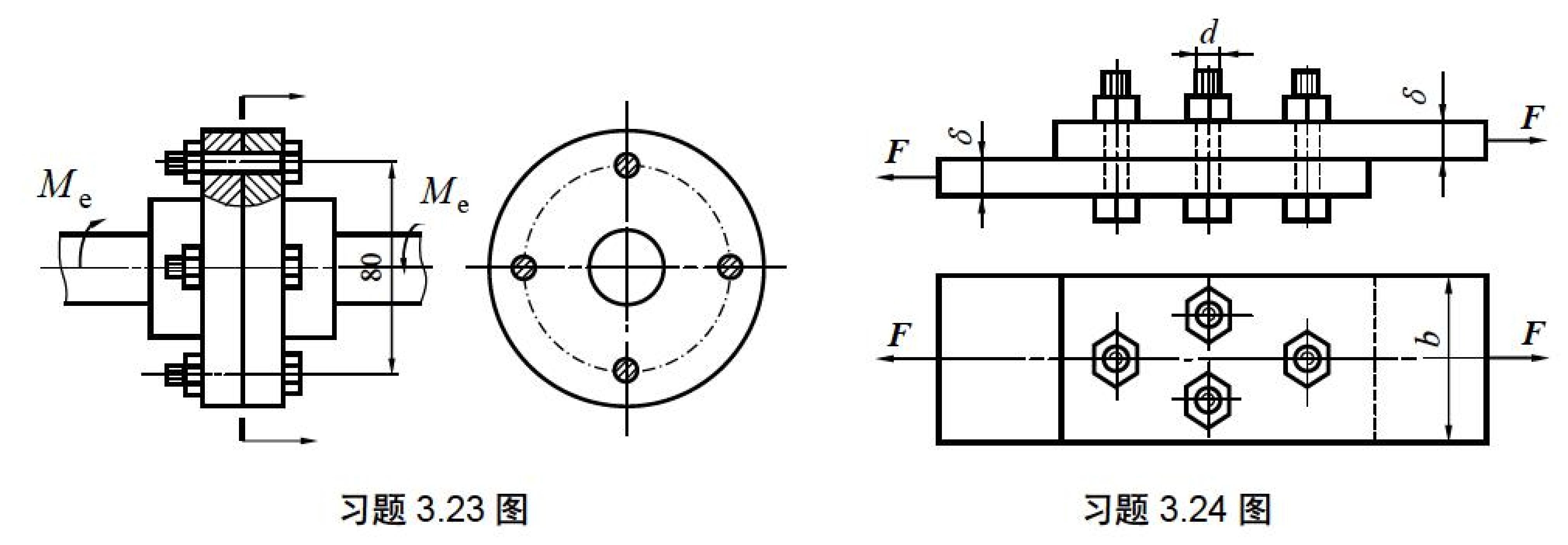
3.22　水轮发电机组的卡环尺寸如习题 3.22 图所示。已知轴向荷载 $F = 1450\text{kN}$ ，卡环材料的许用切应力 $[\tau] = 80\text{MPa}$，许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 150\text{MPa}$ 。试校核卡环的强度。



习题 3.21 图　　　　习题 3.22 图

3.23　凸缘联轴器如习题 3.23 图所示，凸缘之间用 4 个螺钉相连接，螺栓内径 $d = 10\text{mm}$ ，对称地分布在 $D_o = 80\text{mm}$ 的圆周上。若螺栓的剪切许用应力 $[\tau] = 60\text{MPa}$ ，联轴器传递扭转力偶矩 $M_e = 240\text{N}\cdot\text{m}$ 时，试校核螺栓的剪切强度。

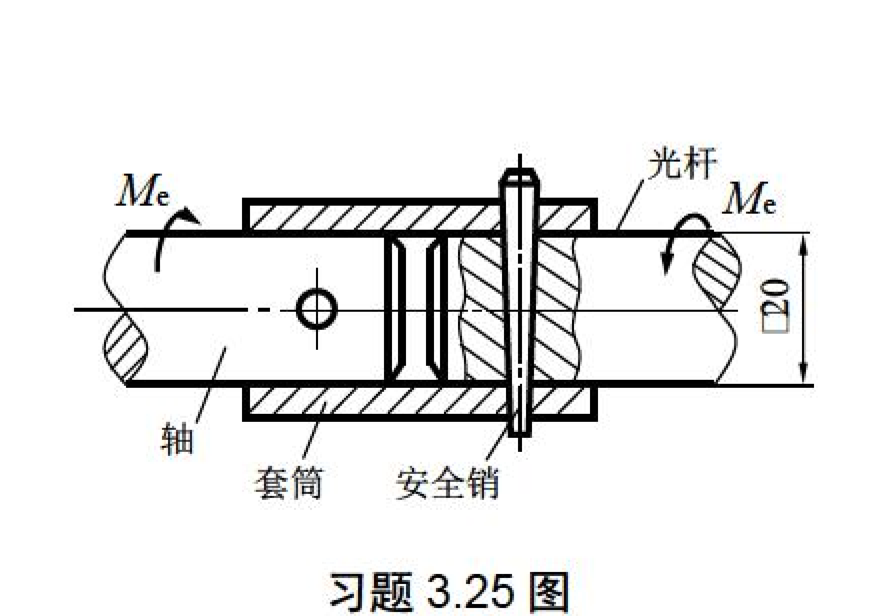
3.24　承受拉力 $F = 80\text{kN}$ 的螺栓连接如习题 3.24 图所示，已知 $b = 80\text{mm}$ ，$\delta = 10\text{mm}$ ，$d = 22\text{mm}$ ，螺栓的剪切许用应力 $[\tau] = 130\text{MPa}$ ，钢板的许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 300\text{MPa}$，许用拉应力 $[\sigma] = 170\text{MPa}$ 。试校核接头的强度。



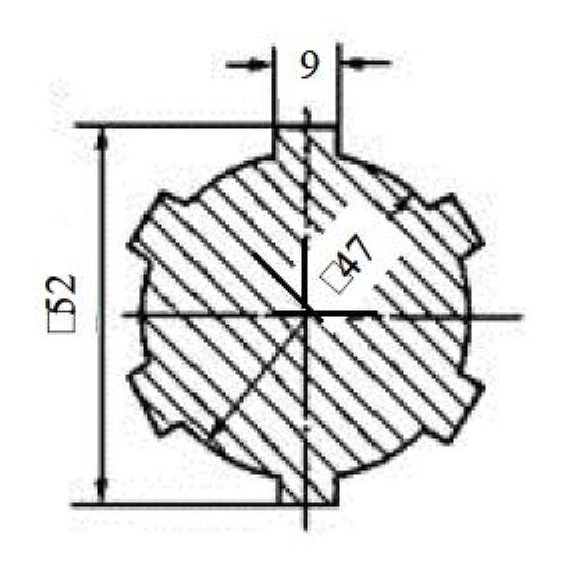
习题 3.23 图　　　　习题 3.24 图

3.25　如习题 3.25 图所示，车床的传动光杆装有安全联轴器，当超过一定载荷时，安全销即被剪断。已知安全销的平均直径为 6mm，材料为 45 钢，其剪切极限应力 $\tau_u = 370\text{MPa}$。试求安全联轴器所能传递的力偶矩 M_e。

3.26　如习题 3.26 图所示机床花键轴有 6 个齿。轴与轮的配合长度 $l = 65\text{mm}$，传递的外力偶矩 $M_e = 3\text{kN}\cdot\text{m}$。轮与轴的许用挤压应力 $[\sigma_{bs}] = 140\text{MPa}$，试校核花键轴的挤压强度。



习题 3.25 图



习题 3.26 图

第4章　弯曲内力

【本章学习重点】

本章重点学习梁在载荷作用下内力的求解方法，绘制剪力图和弯矩图。

【本章学习目标】

- 依据梁的计算简图，进行梁的受力分析，确定约束反力。
- 熟练利用截面法求梁中各横截面上的剪力、弯矩。
- 能列梁的剪力方程、弯矩方程，利用方程作梁的剪力图和弯矩图。
- 掌握梁的弯矩、剪力和载荷集度之间的关系以及梁的作图规律，用简易方法作梁的剪力图和弯矩图。
- 利用叠加原理作梁的弯矩图。
- 采用截面法，能列出简单刚架和曲杆的内力方程，作相应的内力图。

4.1　弯曲的概念及梁的计算简图

4.1.1　弯曲的概念

杆件承受垂直其轴线的外力或位于其轴线所在平面的力偶时，杆件轴线将变弯成曲线，这种受力与变形形式称为弯曲。例如，在日常生活中用来抬物体的杆件(见图 4.1(a))在物体重力(横向力)作用下变弯；健身用的臂力器(见图 4.1(c))在臂力(力偶)作用下变弯。在工程中，受弯曲的构件很多，如桥梁(见图 4.1(b))、桥式起重机的钢梁(见图 4.1(d))、火车轮轴(见图 4.1(e))和车刀刀杆(见图 4.1(f))等，它们都在垂直于构件轴线的载荷作用下，构件轴线由原来的直线变为曲线，产生了弯曲变形。工程上习惯将承受弯曲变形的杆件称为梁。

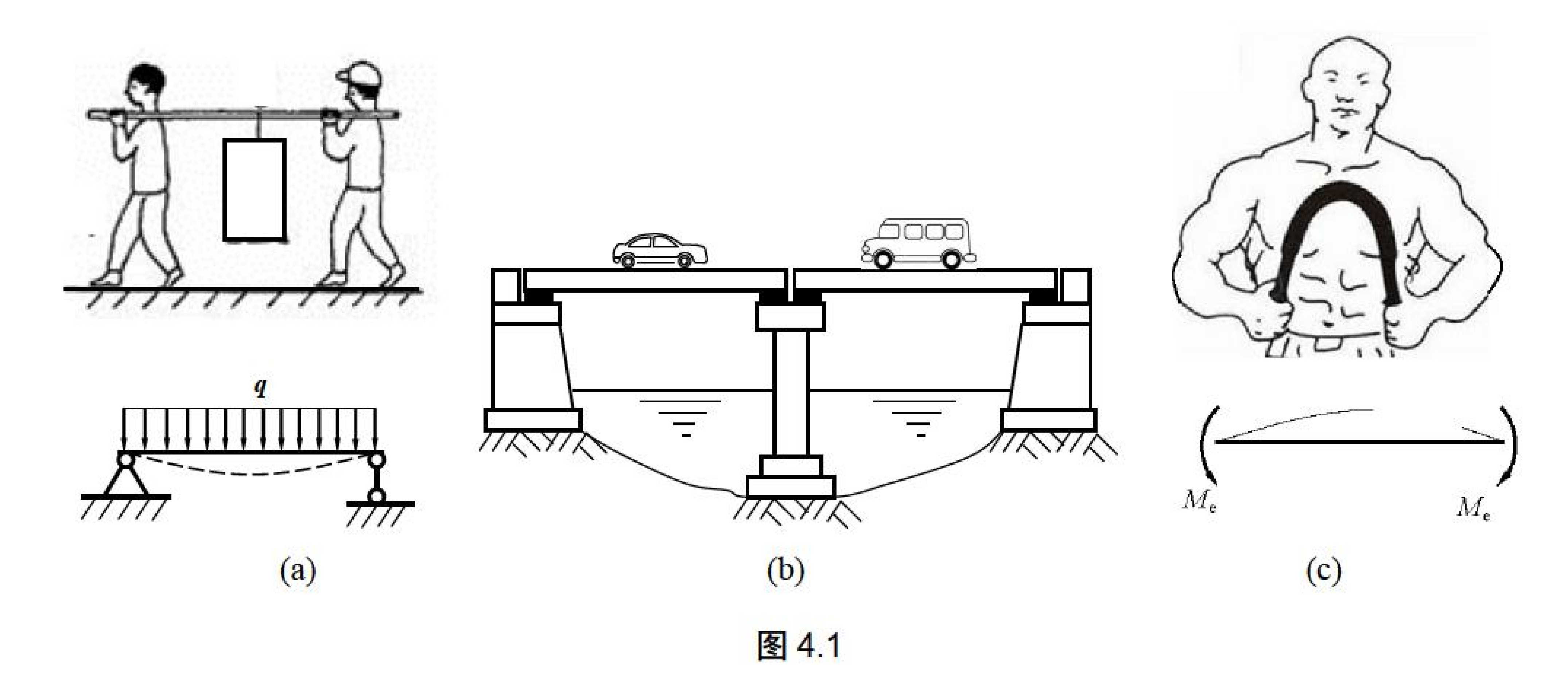


图 4.1

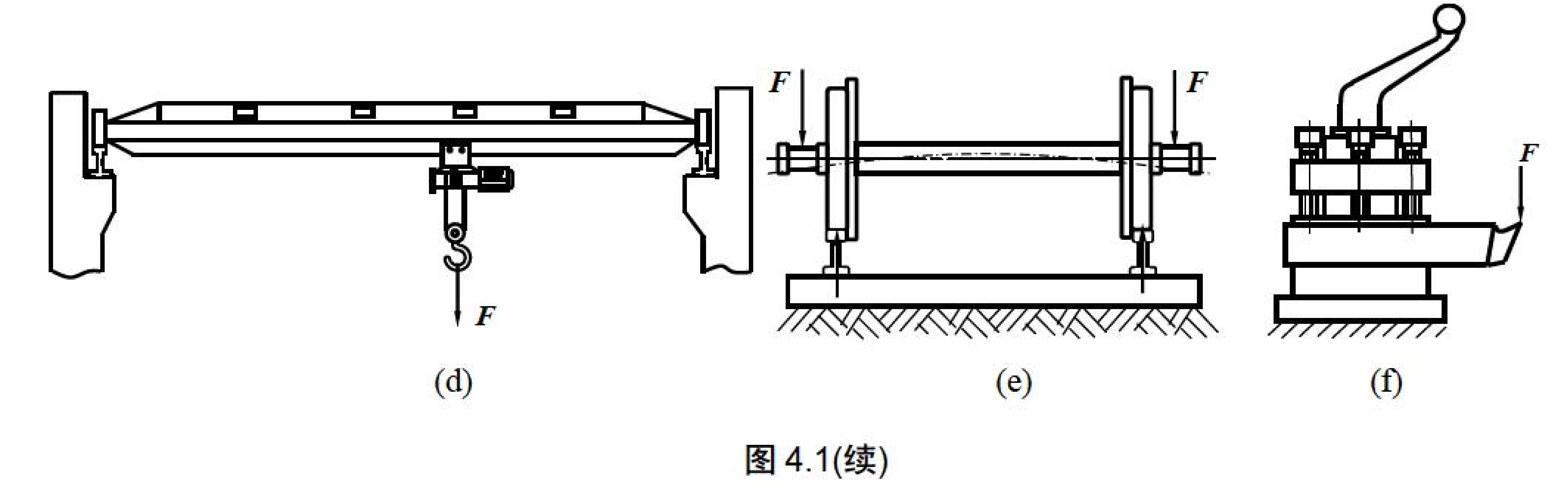


图 4.1(续)

工程中常见的梁，其横截面都有一根对称轴，整根梁有一个包含轴线的纵向对称面，若梁上所有的横向力或力偶均作用在纵向对称面内时(见图 4.2)，弯曲变形后的轴线也将是一条位于此对称面的曲线，这种弯曲称为对称弯曲。若梁不具有纵向对称面，或者横向力或力偶不作用于纵向对称面内，这种弯曲称为非对称弯曲。本章及后述两章中讨论梁弯曲时的内力、应力和变形，都是对称弯曲的情形。

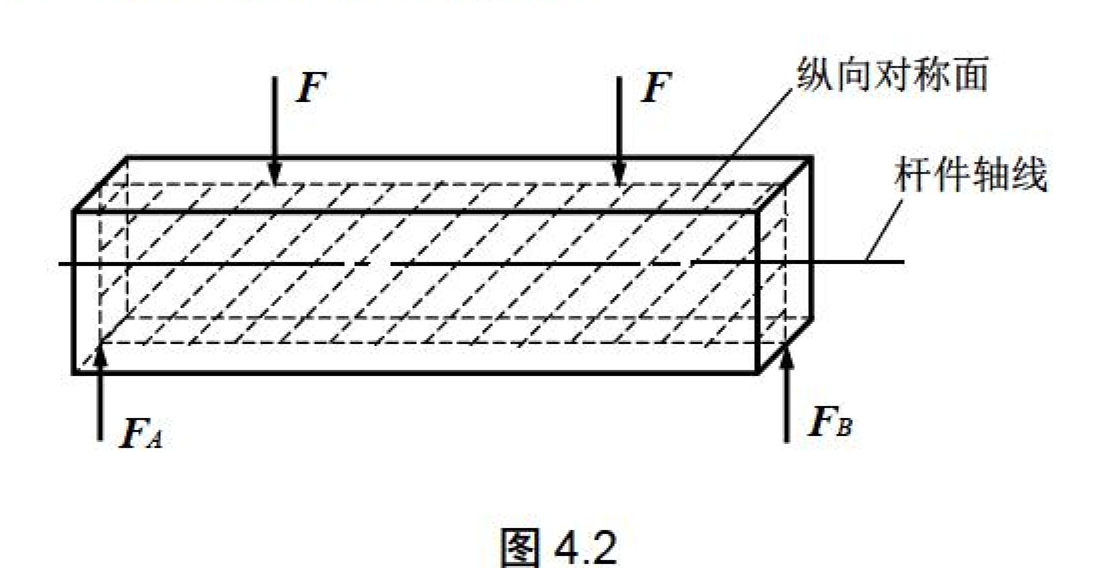


图 4.2

4.1.2 梁的计算简图

工程中梁的支座和载荷有多种情况，必须将支座和载荷作一些合理的简化，得出计算简图，方便于分析计算。梁在计算简图中通常用梁的轴线表示。

1. 载荷类型

载荷经简化后可分为以下 3 种类型。

(1) 集中载荷。作用范围很小(相对于弯曲构件)，如图 4.1(a)、(d)、(e)、(f)中的载荷所示，常用 F 表示，单位为 N 或 kN 。

(2) 分布载荷。沿梁轴线的某段上连续分布的横向力，如图 4.1(c)中的载荷所示。分布载荷的大小用载荷集度 q 表示，q 的单位为 N/m。如 q 是常量，称为均布载荷。

(3) 集中力偶。作用在纵向对称面内的外力偶，如图 4.1(b)中的载荷所示。常用 M_e 表示，单位为N·m。

2. 支座的基本形式

梁的支座根据其对梁的约束方式不同，通常可简化为以下 3 种形式。

(1) 固定端支座。这种支座使梁的端截面既不能移动也不能转动。固定端支座的简化形式和 3 个支反力如图 4.3(a)所示。

(2) 固定铰支座。这种支座限制梁在支座处的移动，但不限制梁绕铰中心的转动，固定铰支座和相应的两个支反力如图 4.3(b)所示。

(3) 可动铰支座。这种支座只限制了梁在支座处沿垂直于承载面方向的移动。可动铰支座和相应的一个支反力如图 4.3(c)所示。

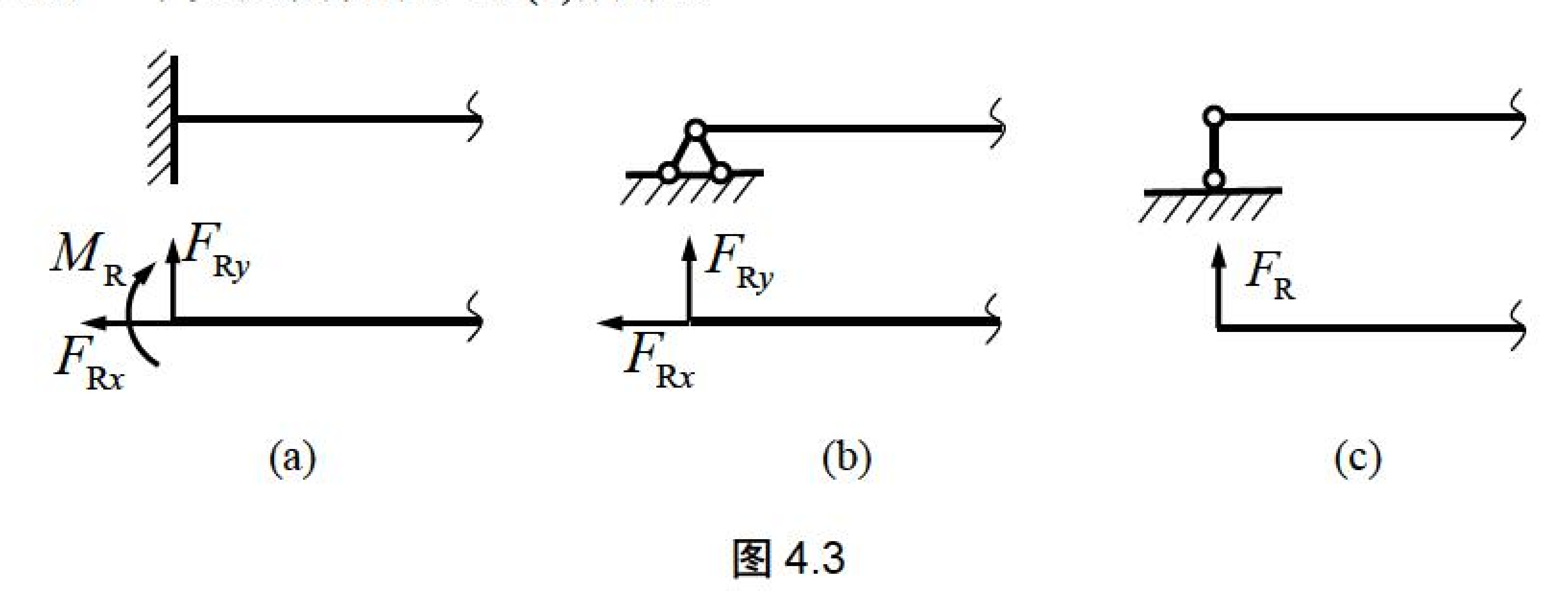


图 4.3

梁的支座简化为哪种形式要视支座对梁的约束情况而定，图 4.4(a)中杆件(工件)在三爪卡盘中因接触长度较大而简化为固定端支座；在图 4.4(b)中，由于杆件与三爪卡盘接触长度较小而简化为固定铰支座。

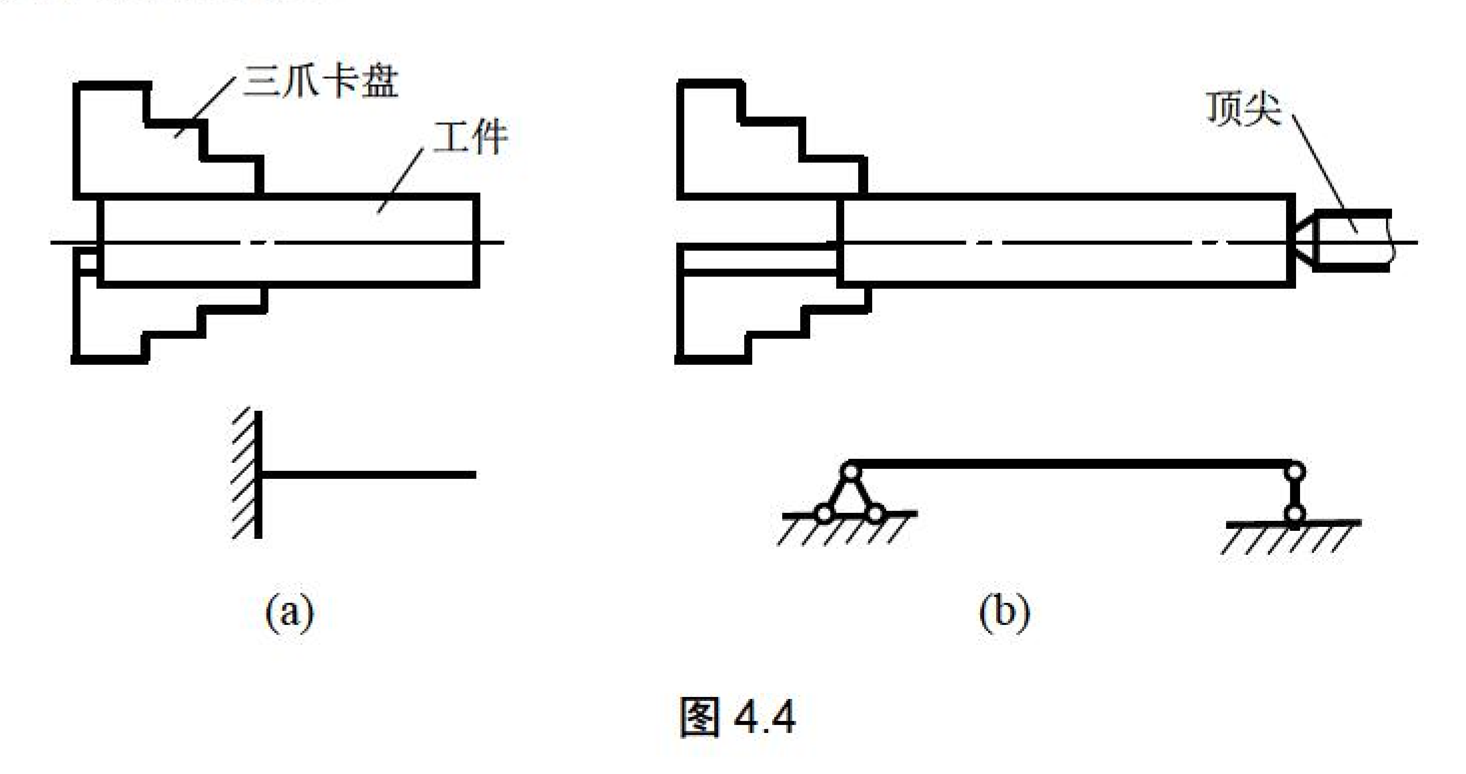


图 4.4

3. 静定梁的基本形式

梁上的载荷和约束力构成了一个平面任意力系，可列出 3 个静力平衡方程。如梁上约束力数目为 3 个，则约束力可由静力平衡方程求出，这种梁称为静定梁。工程上常见的静定梁有如图 4.5 所示的 3 种基本形式。

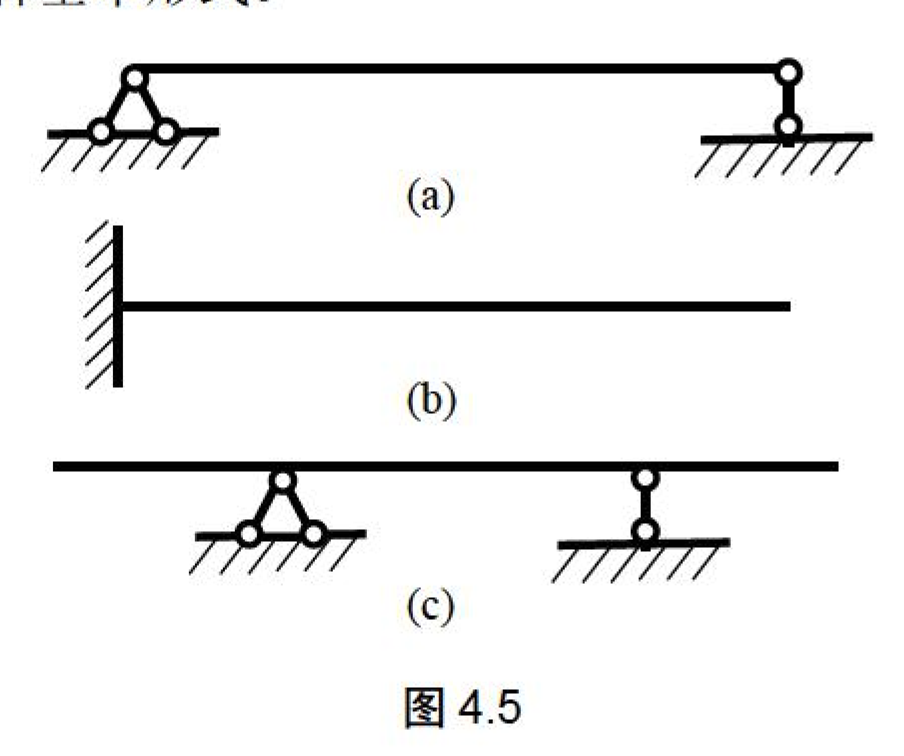


图 4.5

(1) 简支梁。梁的一端为固定铰支座，另一端为可动铰支座。工程中，图 4.1(c)、(d)

可简化为简支梁。

(2) 悬臂梁。梁的一端为固定端支座，另一端为自由端。图 4.1(f)可简化为悬臂梁。

(3) 外伸梁。梁的一端或两端伸出支座外。图 4.1(e)可简化为外伸梁。

4.2 剪力和弯矩

为计算梁的应力和变形，应先求出梁在外力作用下任一横截面上的内力。当作用在梁上的全部外力(载荷和支反力)均已知时，截面法仍是求弯曲内力最基本的方法。

图 4.6(a)所示的简支梁承受集中力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，由静力学平衡方程可求得支反力为

$$F_A=\frac{b}{l}F\,,\qquad F_B=\frac{a}{l}F$$

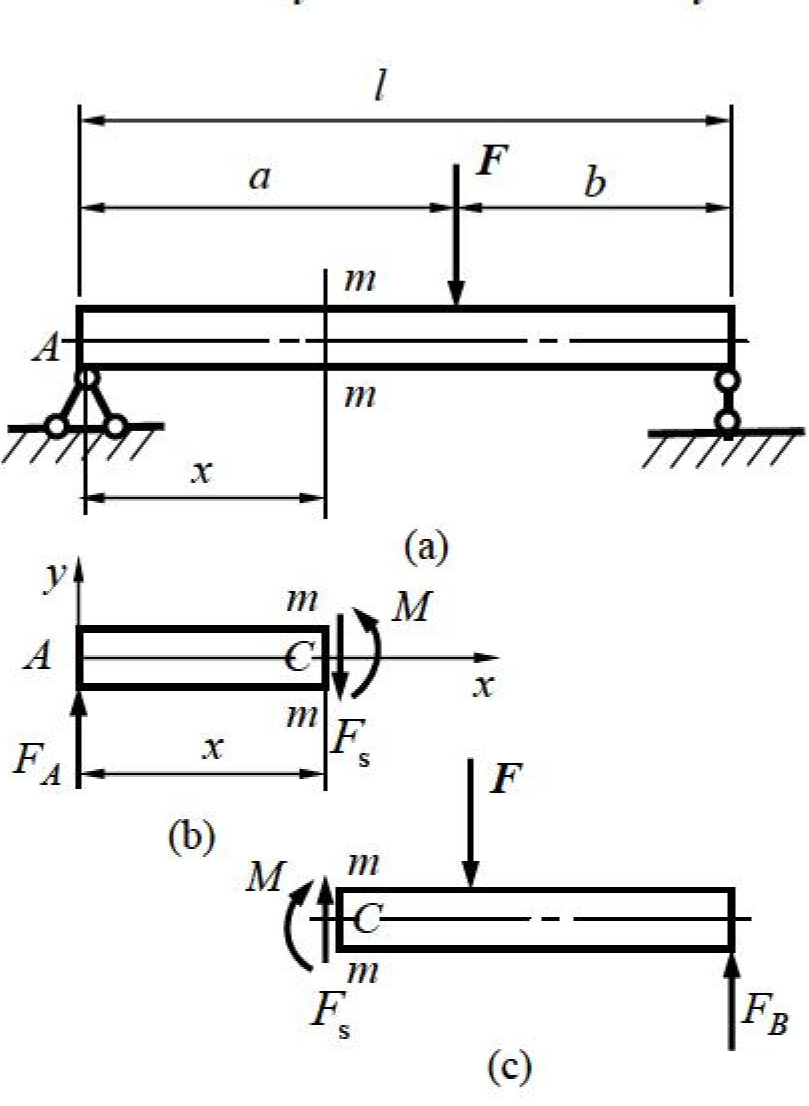


图 4.6

欲求得与截面 A 的距离为 x 的 m—m 截面上的内力，用截面法沿横截面 m—m 假想地将梁截分为两部分，可取梁的左段分析(见图 4.6(b))。该段梁上作用有外力 F_A，为保持梁段的平衡，梁段横截面 m—m 上必有一作用线与 F_A 平行且方向相反的内力，该内力称为**剪力**，用 F_s 表示。此外，剪力 F_s 与外力 F_A 的作用线相距 x，形成了一个力偶。因此，横截面 m—m 上还必有一与其相平衡的内力偶，该内力偶矩称为**弯矩**，用 M 表示。通常在列力偶矩平衡方程时，取横截面 m—m 的形心 C 作为矩心，则由平衡方程

$$\sum F_y=0\,,\quad F_A-F_s=0$$

$$\sum M_C=0\,,\quad M-F_Ax=0$$

可得

$$\left.\begin{aligned}F_s=F_A=\frac{b}{l}F\\ M=F_Ax=\frac{b}{l}Fx\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

如取右段梁分析(见图 4.6(c))，可列平衡方程为

$$\sum F_y = 0,\quad F_s - F + F_B = 0$$

$$\sum M_C = 0,\quad F_B(l-x) - M - F(a-x) = 0$$

由上述方程所解得的剪力 F_s、弯矩 M 与式(4.1)完全相同。但图 4.6(b)与图 4.6(c)中的剪力 F_s、弯矩 M 的方向相反。为了使同一截面的内力在左右梁段分析中能保持数值和符号上的一致，将剪力和弯矩的正负号规定如下：在所取横截面的内侧截取微段，凡是微段产生顺时针转动趋势的剪力为正(见图 4.7(a))，反之为负(见图 4.7(b))；弯曲变形后使微段向下凸，即该段下半部分纵向受拉时，该弯矩为正(见图 4.7(c))，反之为负(见图 4.7(d))。根据此规定，图 4.7(a)、图 4.7(c)所示的剪力和弯矩皆为正。

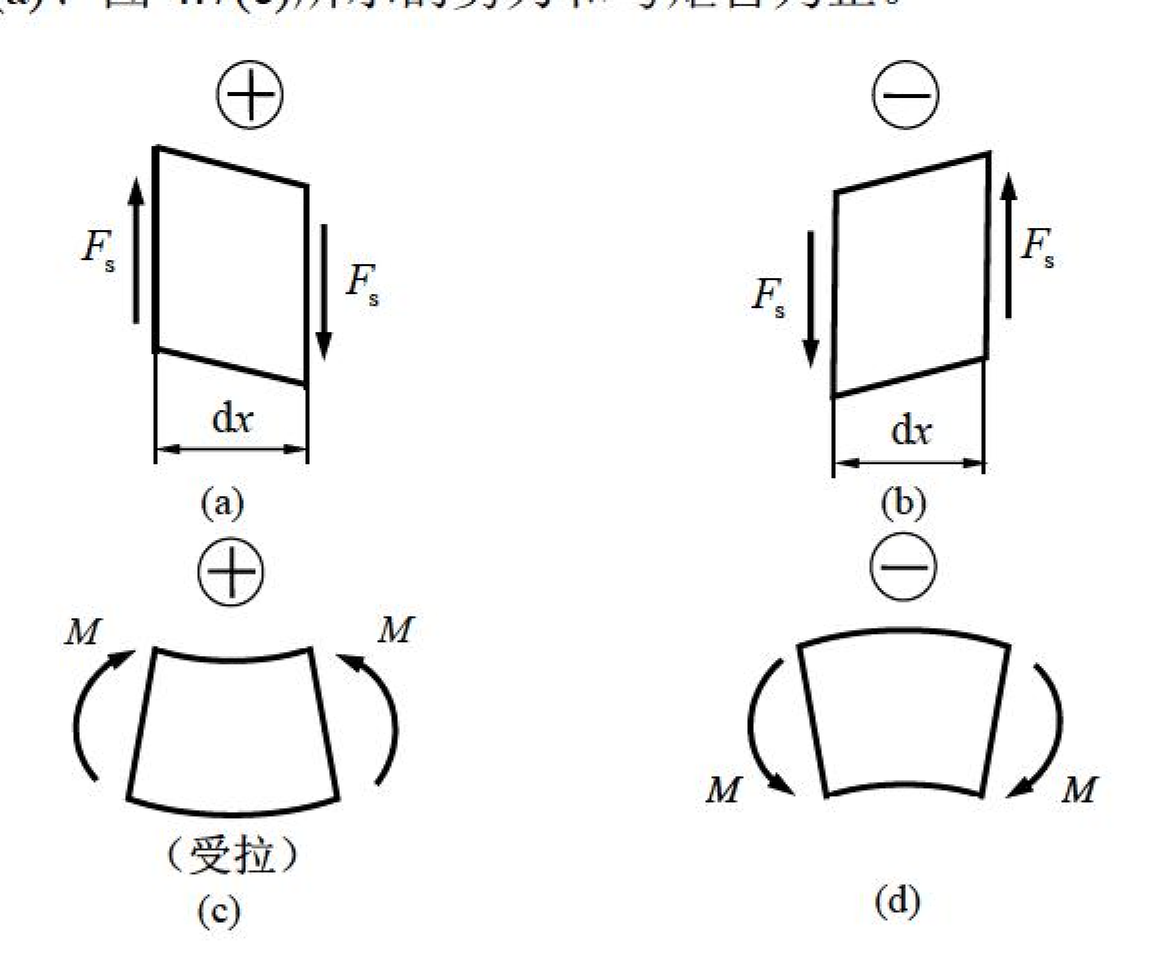


图 4.7

例 4.1　图 4.8(a)所示为钢板轧机的示意图，图 4.8(b)是钢板轧机下轧辊受弯曲变形的计算简图，已知 $q = 12500\text{kN/m}$ 。试求下轧辊 C 截面和中间截面上的剪力和弯矩。

解：(1)　求支反力。

由于载荷为对称载荷，故有

$$F_A = F_B = \frac{0.8\times q}{2} = \frac{0.8\times 12500}{2}\text{kN} = 5000\text{kN}$$

(2)　下轧辊横截面 C 上的剪力和弯矩。

取横截面 C 左侧梁段分析(见图 4.8(c))，列平衡方程

$$\sum F_y = 0,\quad F_A - F_{s1} = 0$$

$$\sum M_C = 0,\quad M_1 - F_A \times 0.43 = 0$$

解得

$$F_{s1} = F_A = 5000\text{kN}$$

$$M_1 = F_A \times 0.43 = 5000\times 0.43 = 2150(\text{kN}\cdot\text{m})$$

(3)　下轧辊中间横截面上的剪力和弯矩。

取中间横截面左侧梁段分析(见图 4.8(d))，列平衡方程

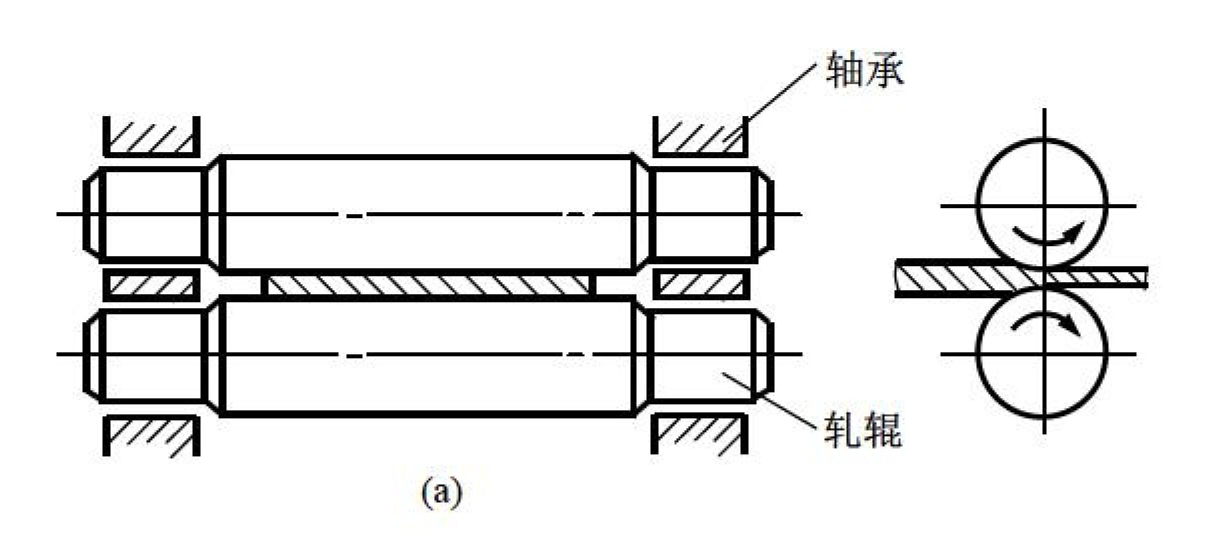
$$\sum F_y = 0,\quad F_A - q\times 0.4 - F_{s2} = 0$$

$$\sum M_E = 0\text{，}\quad M_2 - F_A \times 0.83 + q \times \frac{0.4^2}{2} = 0$$

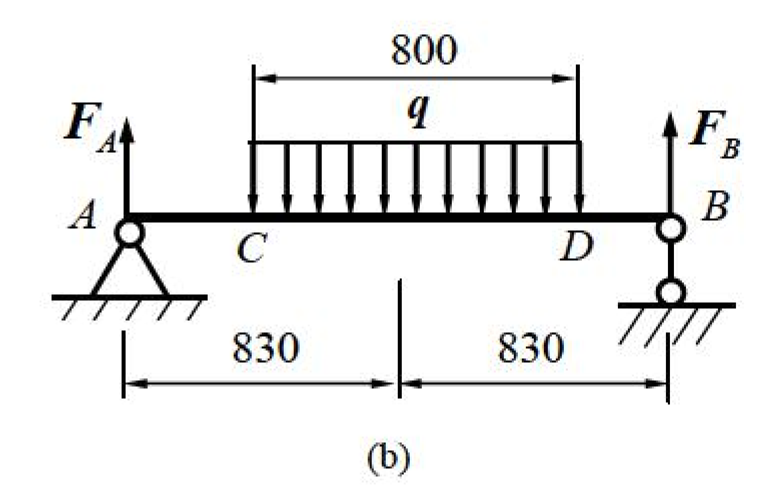
解得

$$F_{s2} = F_A - q \times 0.4 = 5000 - 12500 \times 0.4 = 0$$

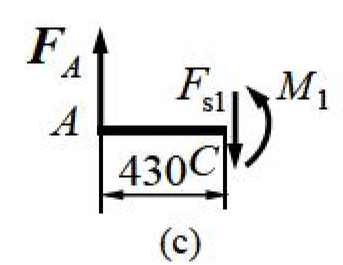
$$M_2 = F_A \times 0.83 - q \times \frac{0.4^2}{2} = 5000 \times 0.83 - 12500 \times \frac{0.4^2}{2} = 3150(\text{kN}\cdot\text{m})$$



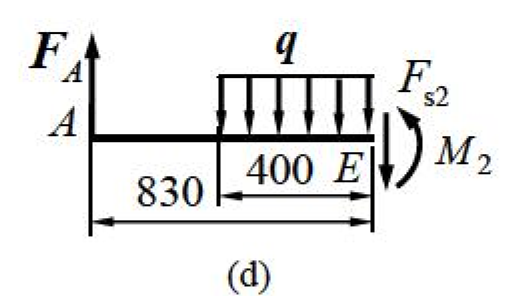
(a)



(b)



(c)



(d)

图 4.8

4.3 剪力方程和弯矩方程 · 剪力图和弯矩图

用截面法可求出梁指定截面上的内力。但一般情况下，梁横截面上的剪力和弯矩是随截面位置不同而变化的，因此，要知道剪力和弯矩沿梁轴线的变化情况，截面法已不再适用。可以在梁上建立一个直角坐标系，取梁的左端为坐标原点，梁的轴线为 x 轴(x 值代表横截面沿轴线的位置)，以横截面上的剪力或弯矩为纵坐标。此时，可将梁横截面上的剪力或弯矩表示为横坐标 x 的函数，即

$$F_s = F_s(x)$$

$$M = M(x)$$

上述两个函数式分别称为剪力方程和弯矩方程。

由于梁上外力的作用，有时不同的梁段上所建立的剪力方程和弯矩方程是不同的，此时要根据外力情况分段列剪力方程和弯矩方程。具体方法后述。

与绘制轴力图或扭矩图类似，也可以用图线来表示梁各横截面上的剪力 F_s 和弯矩 M 沿轴线的变化情况。绘图时以平行梁轴线的横坐标 x 表示横截面位置，以纵坐标表示相应截面上的剪力值和弯矩值。这种图线分别称为**剪力图**和**弯矩图**。绘制剪力图和弯矩图时，一般须求出具有相同内力方程梁段的两端内力(F_s 或 M)，其他截面上的内力可由剪力方程或弯矩方程来连线，也可用后述的作图规律连线。

应用剪力图和弯矩图可以确定梁上的最大剪力和最大弯矩以及所在截面的位置，为校核梁的强度提供依据。

例 4.2　如图 4.9(a)所示的简支梁，在全梁上受集度为 q 的均布载荷作用。试作梁的剪力图和弯矩图。

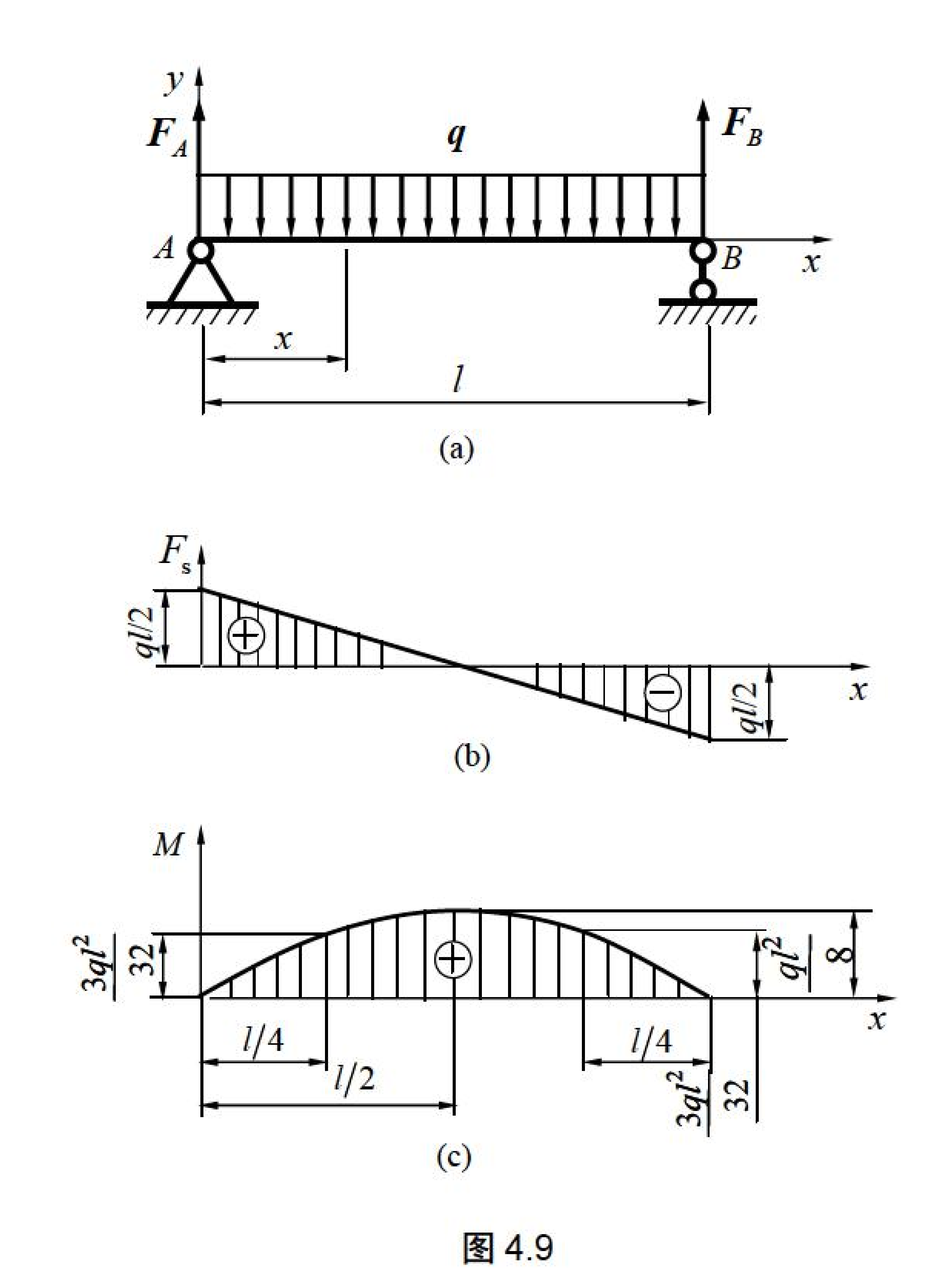


图 4.9

解：(1)　计算支反力。

由于载荷及支反力均对称于梁的中点，因此，两支反力相等，由平衡方程 $\sum F_y = 0$ 有

$$F_A = F_B = \frac{ql}{2}$$

(2)　列剪力方程、弯矩方程。

取距左端(坐标原点)为 x 的任意横截面(见图 4.9(a))，由截面法可得剪力方程和弯矩方



程为

$$F_s(x)=F_A-qx=\frac{ql}{2}-qx \quad (0<x<l) \tag{a}$$

$$M(x)=F_Ax-qx\cdot\frac{x}{2}=\frac{qlx}{2}-\frac{qx^2}{2} \quad (0\leqslant x\leqslant l) \tag{b}$$

需要说明的是，剪力方程中 x 的取值不能取 $x=0$ 和 $x=l$，因为在集中力(支反力)作用点 $x=0$ 和 $x=l$ 处的剪力 F_s 为不定值。

(3) 作剪力图、弯矩图。

由式(a)可知，剪力图在 $0<x<l$ 范围内是斜直线，只要确定两点即可作出剪力图。如在 $x=0^+$ 处，$F_s=\frac{ql}{2}$；在 $x=l^-$ 处，$F_s=-\frac{ql}{2}$。绘出剪力图如图 4.9(b)所示。

由式(b)可知，弯矩图在 $0\leqslant x\leqslant l$ 范围内是一条二次抛物线，因此至少需确定 3 个点 $\left(\text{如 } x=0 \text{ 处，} M=0;\ x=l \text{ 处，} M=0;\ x=\frac{l}{2} \text{ 处，} M=\frac{ql^2}{8}\right)$，才能绘出图 4.9(c)所示的弯矩图。

为求得最大弯矩值所在截面的位置，可将式(a)对 x 求导，并令

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{ql}{2}-qx=0$$

由上式可知，在横截面位置 $x=\frac{l}{2}$ 处，弯矩有极大值 $M_{\max}=\frac{ql^2}{8}$，而此横截面上 $F_s=0$。

例 4.3 如图 4.10(a)所示的简支梁，在梁 C 点处受集中载荷 F 作用。试作梁的剪力图和弯矩图。

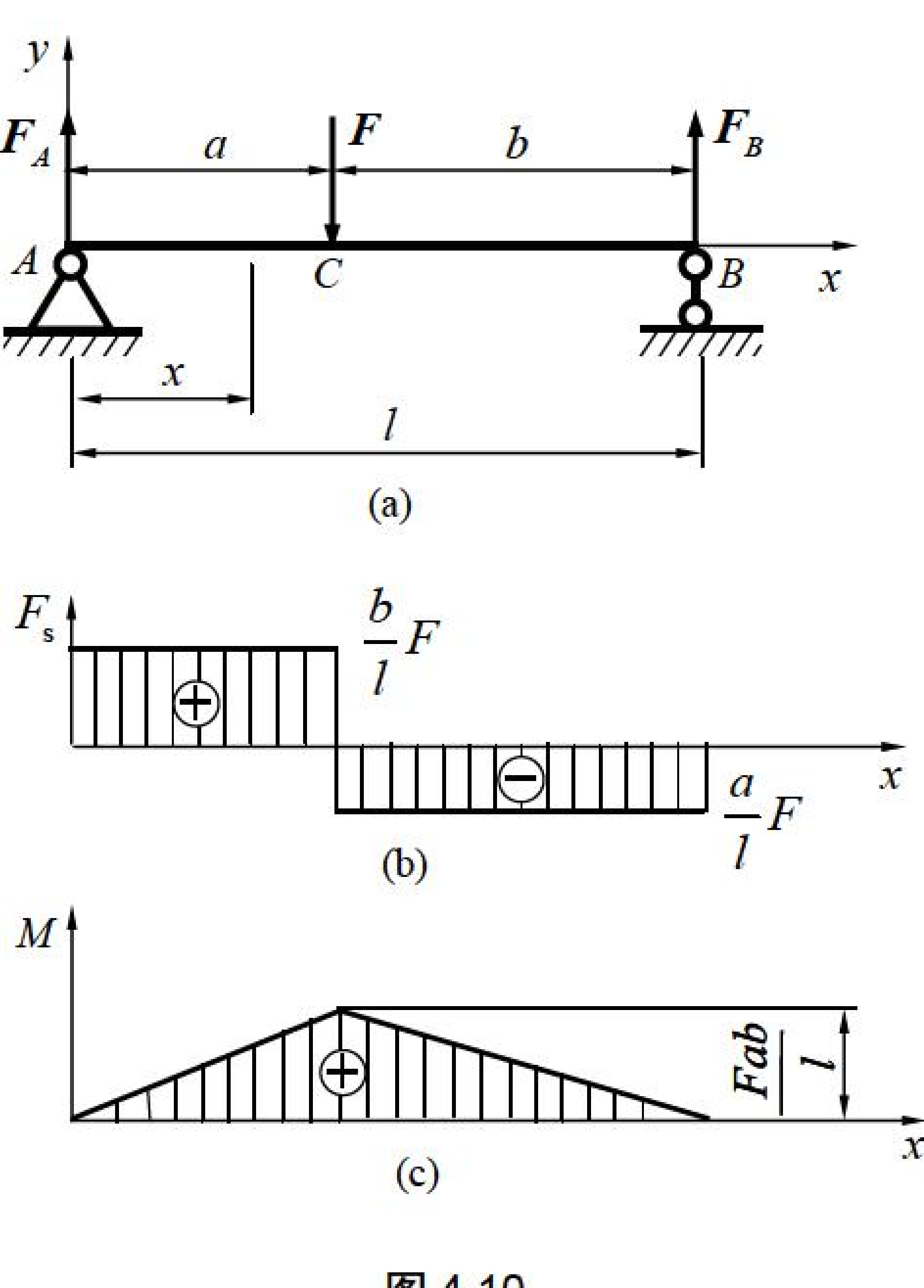
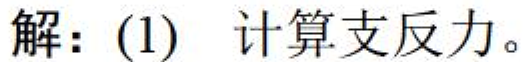


图 4.10



解：(1)　计算支反力。

由平衡方程$\sum F_y = 0$、$\sum M_A = 0$可计算出两支反力为

$$F_A = \frac{b}{l}F\text{，}\quad F_B = \frac{a}{l}F$$

(2)　列剪力方程、弯矩方程。

由于在梁截面 C 处有集中力 F 作用，显然，在集中力 F 两侧的梁段，其剪力方程和弯矩方程均不相同。故在梁的 AC 段、CB 段分别列剪力方程和弯矩方程。

对于 AC 段，其剪力方程和弯矩方程分别为

$$F_s(x) = \frac{Fb}{l} \quad (0 < x < l) \tag{a}$$

$$M(x) = F_A x = \frac{Fb}{l}x \quad (0 \leqslant x \leqslant a) \tag{b}$$

对于 CB 段，可取右端梁段分析，其剪力方程和弯矩方程分别为

$$F_s(x) = -\frac{Fa}{l} \quad (0 < x < l) \tag{c}$$

$$M(x) = F_B(l - x) = \frac{Fa}{l}(l - x) \quad (0 \leqslant x \leqslant a) \tag{d}$$

(3)　作剪力图、弯矩图。

由式(a)、式(c)可知，梁 AC 段、CB 段的剪力图分别为平行于 x 轴的直线(见图 4.10(b))。

由式(b)、式(d)可知，梁 AC 段、CB 段的弯矩图分别为一条斜直线(见图 4.10(c))。

从剪力图中可以看出，在 $b < a$ 的情况下，最大剪力出现在 AC 段，$F_{\max} = \frac{Fb}{l}$；在集中力 F 作用处剪力值有突变，变化值为集中力 F。

从弯矩图中可以看出，在集中力 F 作用处弯矩出现极大值(此图为最大值)，$M_{\max} = \frac{Fab}{l}$，且图形出现尖角。

例 4.4　如图 4.11(a)所示的简支梁，在梁 C 点处受矩为 M_e 的集中力偶作用。试作梁的剪力图和弯矩图。

解：(1)　计算支反力。

由平衡方程$\sum F_y = 0$、$\sum M_A = 0$可计算出两支反力为

$$F_A = F_B = \frac{M_e}{l}$$

(2)　列剪力方程、弯矩方程。

因在梁 C 处受集中力偶 M_e 作用，故需分 AC、CB 两段列剪力方程和弯矩方程。

AC 段：

$$F_s(x) = \frac{M_e}{l} \quad (0 < x \leqslant a) \tag{a}$$

$$M(x) = F_A x = \frac{M_e}{l}x \quad (0 \leqslant x < a) \tag{b}$$

CB 段：

$$F_s(x) = \frac{M_e}{l} \quad (a \leqslant x < l) \tag{c}$$

$$M(x)=-F_B(l-x)=-\frac{M_e}{l}(l-x) \quad (a<x \leqslant l) \tag{d}$$

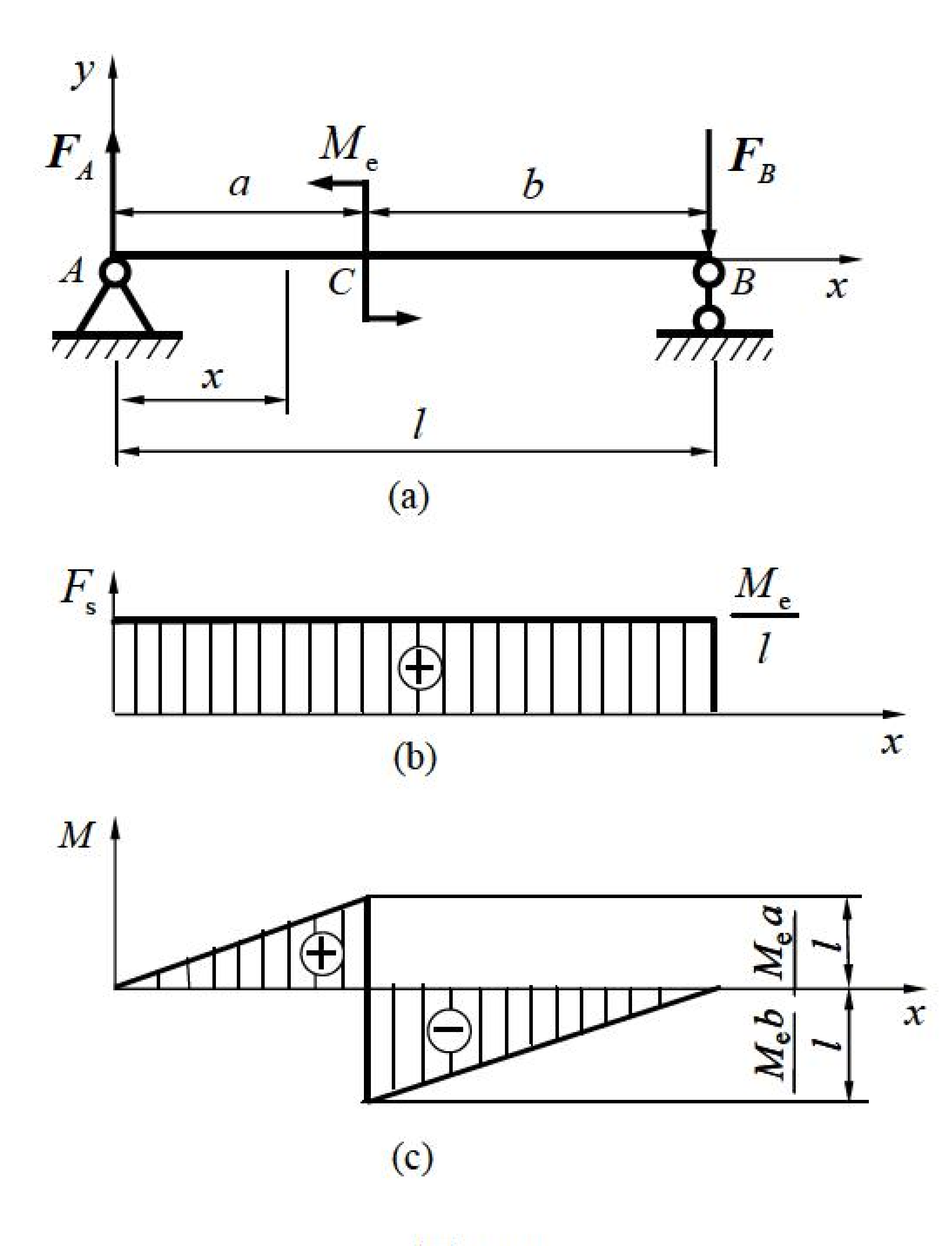


图 4.11

(3) 作剪力图、弯矩图。

由式(a)、式(c)可知，整个梁的剪力图是一条平行于 x 轴的直线，如图 4.11(b)所示。由式(b)、式(d)可知，梁 AC 段、CB 段的弯矩图分别为一条斜直线，如图 4.11(c)所示。

从弯矩图中可以看出，在 $b>a$ 的情况下，最大弯矩出现在集中力偶 M_e 作用处的右侧，最大弯矩 $M_{max}=-\frac{M_e b}{l}$；在集中力偶作用处左、右两截面上的弯矩值有突变，变化值为集中力偶矩 M_e。

由以上各例所作剪力图、弯矩图，可归纳出以下作图规律。

(1) 梁上有集中力、集中力偶、分布载荷的起点和终点处，构成了分段列剪力方程和弯矩方程的段点。剪力图和弯矩图要分段绘制。

(2) 在梁上集中力 $\boldsymbol{F}$ 作用处，剪力值有突变，变化值为集中力 $\boldsymbol{F}$，对应截面上弯矩图形成一个尖角；在梁上集中力偶作用处，弯矩图有突变，变化值为集中力偶矩 M_e。

4.4 载荷集度、剪力和弯矩间的微分关系及其应用

4.4.1 载荷集度、剪力和弯矩间的微分关系

如图 4.12(a)所示的梁上作用有各类载荷，其中任意分布载荷的载荷集度为 x 的连续函

数，即

$$q = q(x)$$

并规定 $q(x)$ 向上(与 y 轴方向一致)为正。在距离原点 O 为 x 处梁中取出长为 $\mathrm{d}x$ 的微段，放大后如图 4.12(b)所示。设坐标为 x 处横截面上的剪力和弯矩分别为 $F_s(x)$、$M(x)$，则在坐标为 $x + \mathrm{d}x$ 处横截面上的剪力和弯矩分别为 $F_s(x)+\mathrm{d}F_s(x)$、$M(x)+\mathrm{d}M(x)$。微段梁上的分布载荷视为均布载荷，于是，由微段梁的平衡方程 $\sum F_y = 0$、$\sum M_C = 0$ 有

$$F_s(x) - [F_s(x) + \mathrm{d}F_s(x)] + q(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$-M(x) + [M(x) + \mathrm{d}M(x)] - F(x)\mathrm{d}x - q(x)\mathrm{d}x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{2} = 0$$

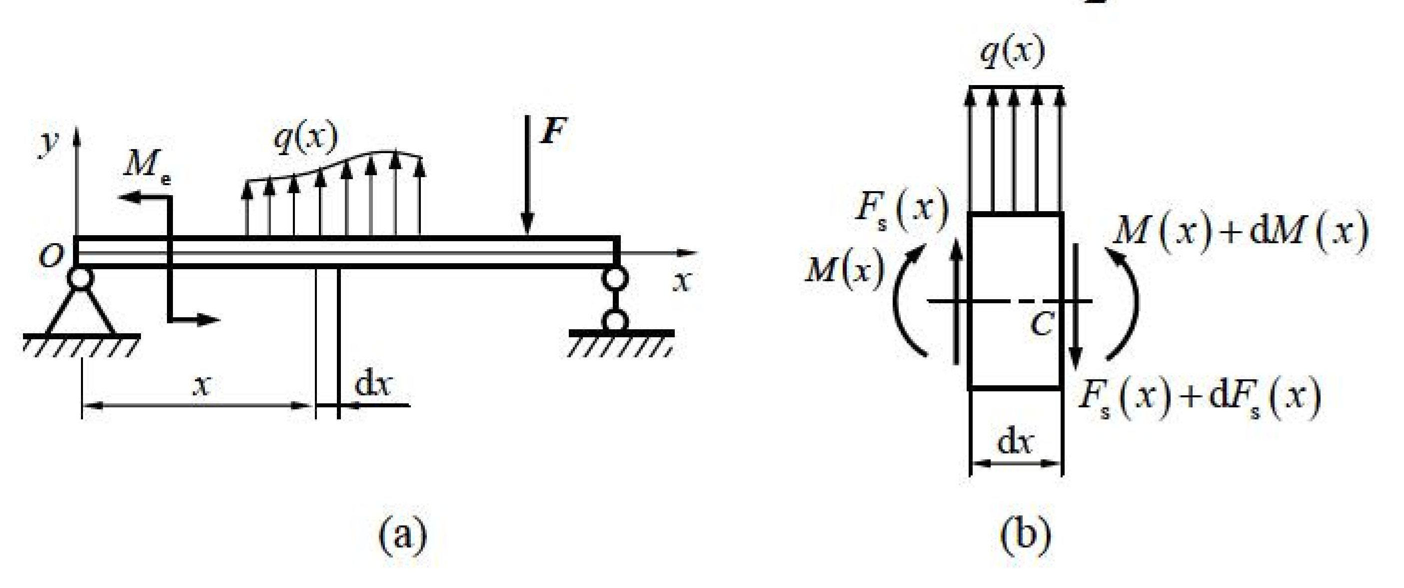


图 4.12

省略二阶无穷小项 $q(x)\mathrm{d}x \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{2}$，整理后得

$$\frac{\mathrm{d}F_s(x)}{\mathrm{d}x} = q(x) \tag{4.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} = F_s(x) \tag{4.3}$$

将式(4.3)对 x 求导数，并利用式(4.2)又可得

$$\frac{\mathrm{d}^2M(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}F_s(x)}{\mathrm{d}x} = q(x) \tag{4.4}$$

式(4.2)～式(4.4)就是载荷集度 $q(x)$、剪力 $F_s(x)$ 和弯矩 $M(x)$ 之间的微分关系式。

式(4.2)～式(4.4)的几何意义分别为：剪力图上某点处切线的斜率等于该点处载荷集度的大小；弯矩图上某点处切线的斜率等于该点处剪力的大小；在剪力 $F_s(x)= 0$ 处，弯矩为极值；载荷集度的正负反映出弯矩图的凹向。

应用上述微分关系的几何特征，结合上节归纳的剪力图和弯矩图作图规律，可检验所作剪力图和弯矩图的正确性，或直接用来作剪力图和弯矩图。表 4.1 所列为几种载荷情况下对应的剪力图和弯矩图的主要特征。

表 4.1　几种载荷下剪力图和弯矩图的特征

载荷情况	均布载荷 $q<0$	无载荷 $q=0$	集中力 F C	集中力偶 M_e C	

续表

剪力图特征	向下方倾斜的直线	水平直线	在 C 处有突变 C F	在 C 处无变化 C	剪力等于 0 处 F_s x
弯矩图特征	向下凹的二次抛物线 或 或	一般为斜直线 或	在 C 处有尖角 或 或	在 C 处有突变 C Me	弯矩出现极值 $F_s=0$截面 或

4.4.2 作剪力图和弯矩图的简易方法

利用载荷集度、剪力和弯矩之间的微分关系作剪力图和弯矩图，可不必列出剪力方程和弯矩方程，从而使作图过程简化。其主要步骤如下。

(1) 根据梁受外力情况对其进行分段。集中力、集中力偶、分布载荷的起点和终点处都是梁段之间的交界点，梁段交界点处的横截面可称为分段截面。

(2) 应用截面法确定各分段截面上剪力和弯矩的数值。在集中力处的分段截面左、右两侧的剪力是不同的，应分别计算；在集中力偶处的分段截面左、右两侧的弯矩是不同的，也应分别计算。

(3) 建立 F_s-x 和 $M-x$ 坐标系，将分段截面上的剪力值和弯矩值标在坐标系中得到若干相应的点。

(4) 参照表 4.1 中剪力图和弯矩图的几何特征判断图形形状且将各点连线，即得到所需的剪力图和弯矩图。对于弯矩图中有极值点的抛物线，还须用截面法求出 $F_s=0$ 处所在截面的弯矩值。

下面通过实例说明作剪力图和弯矩图的简易方法。

例 4.5 如图 4.13(a)所示，一简支梁受集度为 $q=100\text{kN/m}$ 的均布载荷作用。试作梁的剪力图和弯矩图。

解：(1) 计算支反力。

由载荷及支反力的对称性，可得支反力 F_A、F_B 为

$$F_A=F_B=\frac{1}{2}\times100\times1.6\text{kN}=80\text{kN}$$

(2) 确定分段截面并计算其截面上的剪力值和弯矩值。

根据梁所受外力情况，可分 3 段绘剪力图和弯矩图，分段截面分别为 A、C、D、B 4 个截面(见图 4.13(a))。各分段截面的剪力和弯矩如下。

A 截面：　$F_{sA右}=80\text{kN}$，　$M_A=0$

C 截面：　$F_{sC}=80\text{kN}$，　$M_C=F_A\times0.2=80\text{kN}\times0.2\text{m}=16\text{kN}\cdot\text{m}$

D 截面：　$F_{sD}=-80\text{kN}$　$M_D=F_B\times0.2=80\text{kN}\times0.2\text{m}=16\text{kN}\cdot\text{m}$

B 截面：　$F_{sB左}=-80\text{kN}$　$M_B=0$

(3) 判断各梁段剪力图和弯矩图的形状(解题中可不写出)。

AC、DB 段：剪力图为水平线，弯矩图为斜直线。

CD 段：剪力图为向下的斜直线，弯矩图为向下凹的抛物线，此抛物线有极值点，最大弯矩在 $F_s=0$ 所在截面(E 截面)，其值为

$$M_E=M_{\max}=F_A\times 1-\frac{q}{2}(1-0.2)^2=80\text{kN}\times 1\text{m}-\frac{100}{2}\times 0.8^2\text{kN}\cdot\text{m}=48\text{kN}\cdot\text{m}$$

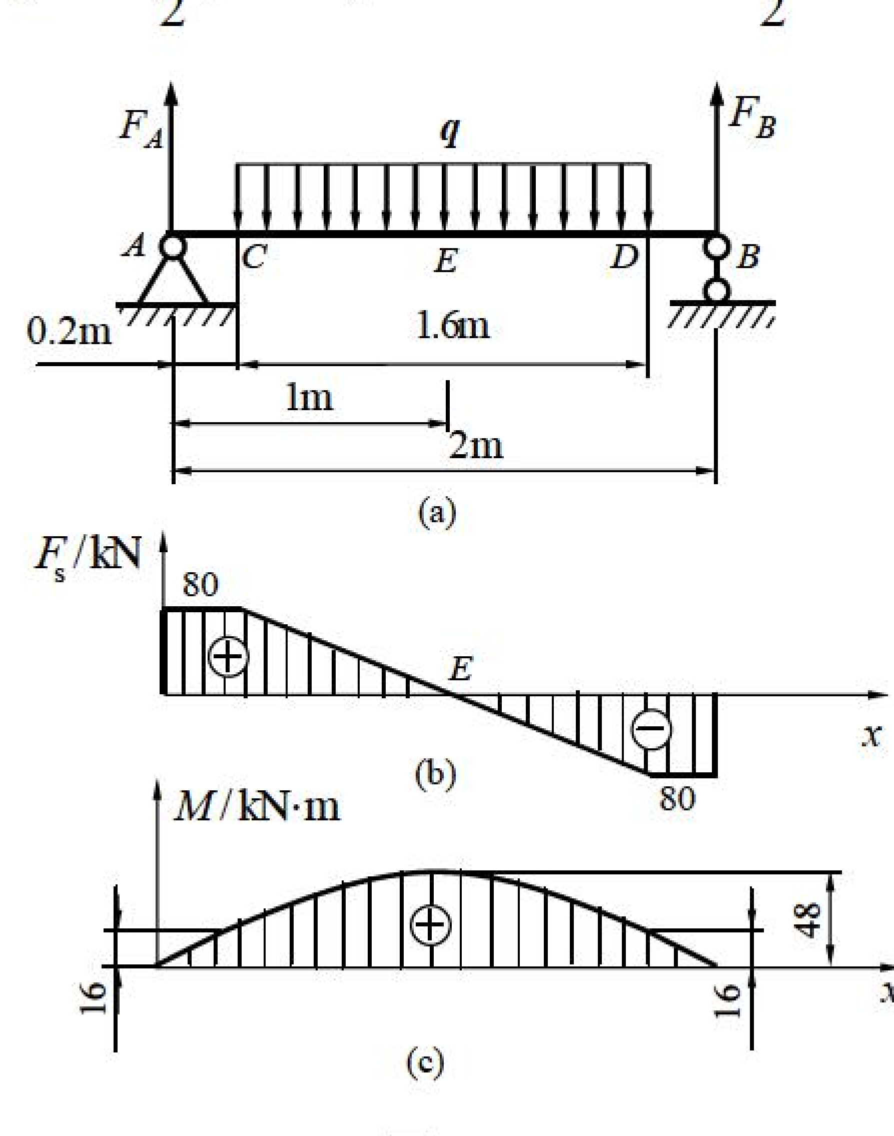


图 4.13

(4) 在 F_s–x 和 M–x 坐标系中分别确定各分段截面上的剪力值和弯矩值，连线得到图 4.13(b)所示的剪力图、图 4.13(c)所示的弯矩图。

例 4.6　一外伸梁及所受载荷如图 4.14(a)所示。试作梁的剪力图和弯矩图。

解：(1) 计算支反力。

由平衡方程 $\sum F_y=0$、$\sum M_A=0$ 计算出两支反力为

$$F_A=3\text{kN},\qquad F_B=7\text{kN}$$

(2) 确定分段截面并计算其截面上的剪力值和弯矩值。

分段截面分别为 A、C、B、D 4 个截面(见图 4.14(a))。各分段截面的剪力和弯矩如下。

A 截面：　$F_{sA右}=F_A=3\text{kN}$，$M_A=0$

C 截面：　$F_{sC}=F_A-q\times 4=3\text{kN}-2\times 4\text{kN}=-5\text{kN}$

$$M_{C左}=F_A\times 4-\frac{q}{2}\times 4^2=3\text{kN}\times 4\text{m}-\frac{2}{2}\times 4^2\text{kN}\cdot\text{m}=-4\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{C右}=F_A\times 4-\frac{q}{2}\times 4^2+M_e=3\text{kN}\times 4\text{m}-\frac{2}{2}\times 4^2\text{kN}\cdot\text{m}+10\text{kN}\cdot\text{m}=6\text{kN}\cdot\text{m}$$

B 截面：　$F_{sB左}=F_{sA}-q\times 4=3\text{kN}-2\times 4\text{kN}=-5\text{kN}$

$$F_{sB右}=F_{sA}-q\times 4+F_B=3\text{kN}-2\times 4\text{kN}+7\text{kN}=2\text{kN}$$

$$M_B=-F\times 2=-2\times 2\text{kN}\cdot\text{m}=-4\text{kN}\cdot\text{m}$$

D 截面：　　$F_{sD左} = F = 2\text{kN}$，$M_D = 0$

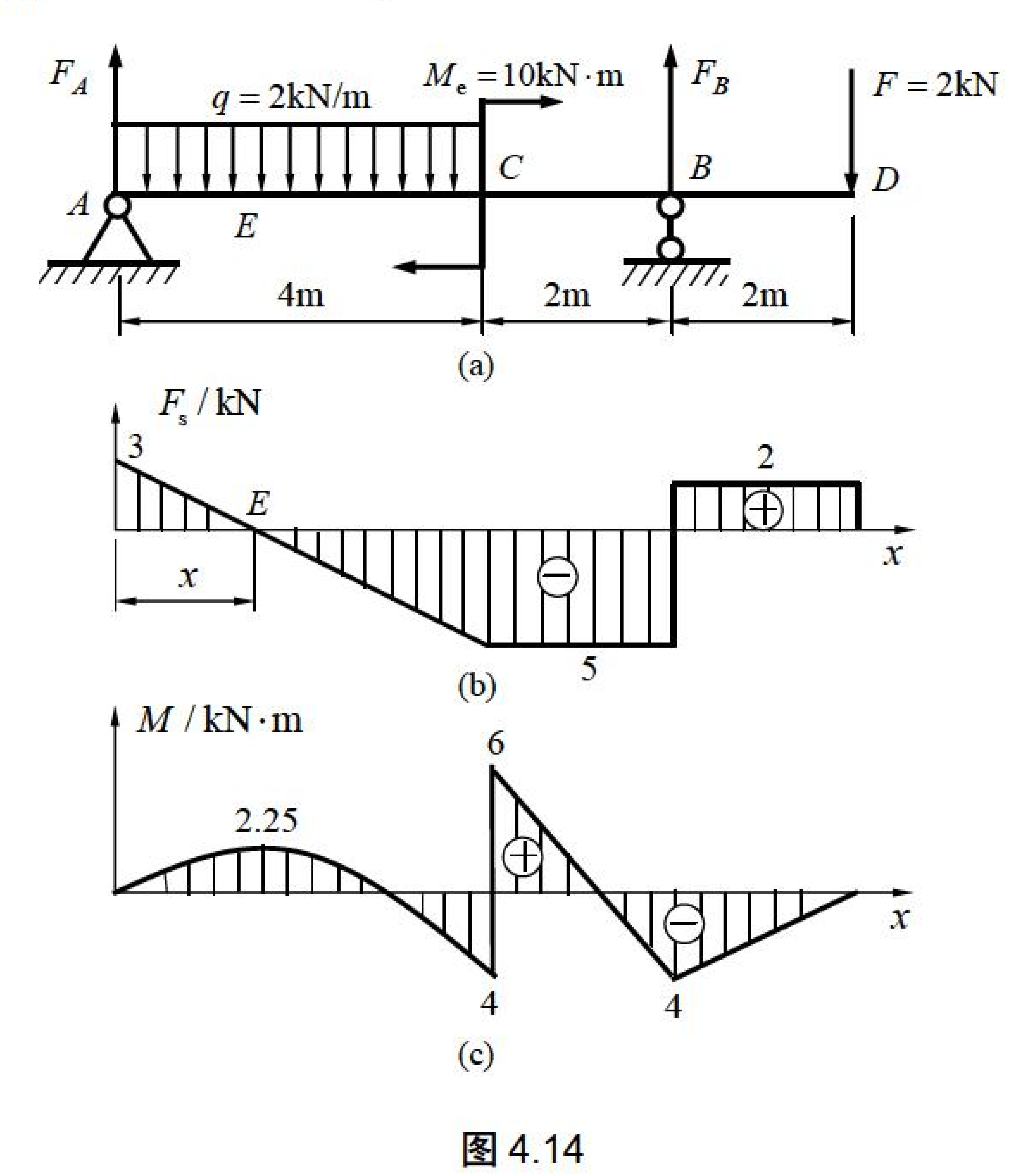


图 4.14

(3) 绘剪力图和弯矩图。

在 F_s−x 和 M−x 坐标系中分别确定各分段截面上的剪力值和弯矩值，连线得到图 4.14(b)所示的剪力图；在绘弯矩图时，因 AC 梁段上为均布载荷，弯矩图为向下凹的抛物线，弯矩在 $F_s = 0$ 所在截面(E 截面)出现极值。设 E 截面距离梁左端为 x，由剪力图上的比例关系有

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{4 - x}$$

求得

$$x = 1.5\text{m}$$

E 截面的弯矩值为

$$M_E = F_A \times 1.5 - \frac{1}{2}q \times 1.5^2 = 3\text{kN} \times 1.5\text{m} - \frac{1}{2} \times 2 \times 1.5^2\,\text{kN}\cdot\text{m} = 2.25\text{kN}\cdot\text{m}$$

求得 E 截面的弯矩值后，连线得到如图 4.14(c)所示的弯矩图。

4.5　用叠加原理作梁的弯矩图

当梁在载荷作用下为微小变形时，在求梁的支反力、剪力和弯矩时所得的结果，均与梁上的载荷呈线性关系。因此，当梁上有几个载荷同时作用时，某一横截面上的内力就等于在各个载荷单独作用下同一横截面上内力的代数和。这一普遍性原理称为**叠加原理**。例如，图 4.15(a)中，简支梁受集中载荷 F 和均布载荷 q 共同作用下，梁任一横截面上剪力和

弯矩，可通过梁受均布载荷 q 作用下的剪力和弯矩(见图 4.15(b))与梁受集中载荷 F 作用下的剪力和弯矩(见图 4.15(c))叠加得到。

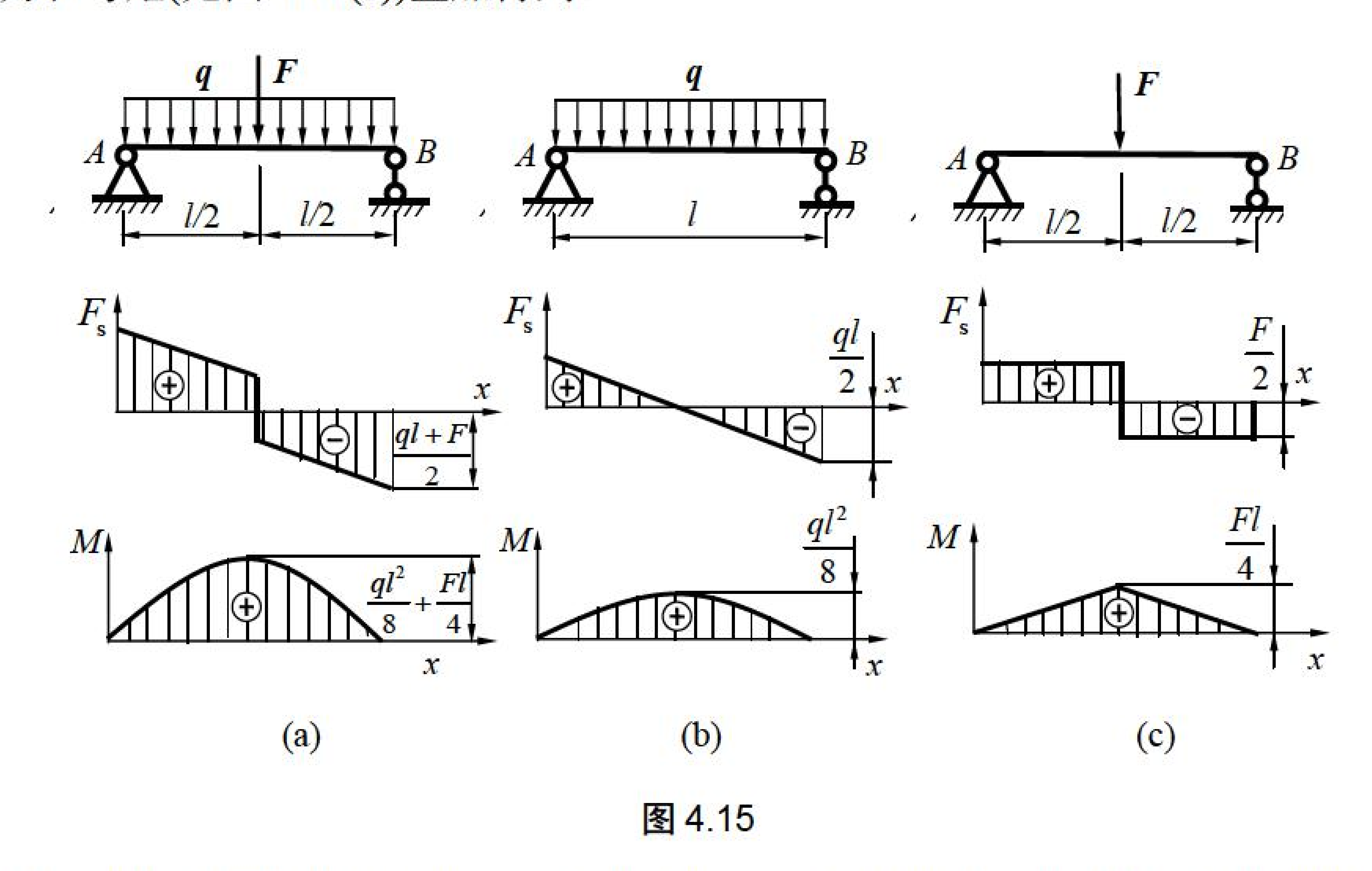


图 4.15

用叠加法作弯矩图时的方法：①分段叠加；②两直线弯矩图叠加后仍为直线，直线弯矩图与曲线弯矩图叠加后是曲线；③确定分段截面上的弯矩后连线。

例 4.7　一外伸梁及所受载荷如图 4.16(a)左图所示。试利用叠加原理作梁的弯矩图。

解：先将梁上载荷分解为每个单独作用载荷，分别作出只有集中力 $\boldsymbol{F}$ 作用的弯矩图(见图 4.16(b)右图)和只有均布载荷 $\boldsymbol{q}$ 作用的弯矩图(见图 4.16(c)右图)。显然，在梁 BD 段只有均布载荷 $\boldsymbol{q}$ 产生弯矩，不需叠加；在 AB 梁分 AC、CB 两段叠加，且叠加后弯矩图仍为直线，3 个分段截面的弯矩分别为 $M_A=0$，$M_C=10-4=6\text{kN}\cdot\text{m}$，$M_B=-8\text{kN}\cdot\text{m}$，连线得到图 4.16(a)右图所示弯矩图。

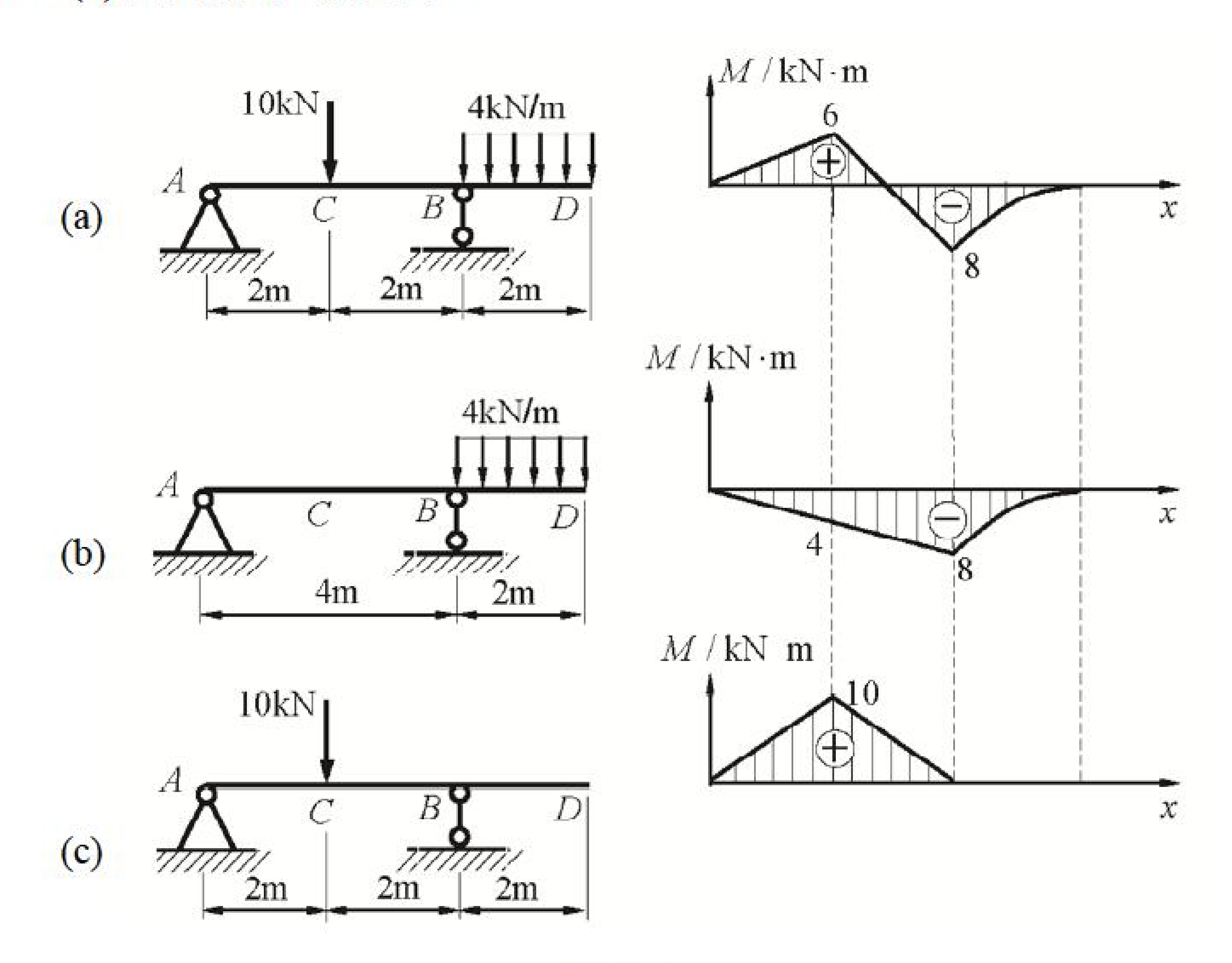


图 4.16

由上述例题可以看出，要利用叠加原理作弯矩图，首先要能熟练地作出静定梁在单一载荷作用下的弯矩图。

4.6 平面刚架和曲杆的弯曲内力

平面刚架是由同一平面内、不同取向的杆件，通过杆端相互刚性连接而形成的构件。工程中的平面刚架构件有刚架连杆(见图 4.17(a))、排椅支架(见图 4.17(b))、候车棚刚架(见图 4.17(c))等。平面刚架中杆与杆的连接是刚性连接，在受力后其相对位置保持不变(忽略小变形的情况下)。由于刚架的轴线为折线，其内力比梁复杂，一般情况下除了剪力和弯矩外，还有轴力的存在。因此，平面刚架的内力图包括剪力图、弯矩图和轴力图。



图 4.17

平面曲杆是其轴线为一平面曲线的构件。如棘轮结构中的棘爪(见图 4.18(a))、桥梁结构中的拱(见图 4.18(b))等。平面曲杆的内力也有剪力、弯矩和轴力。

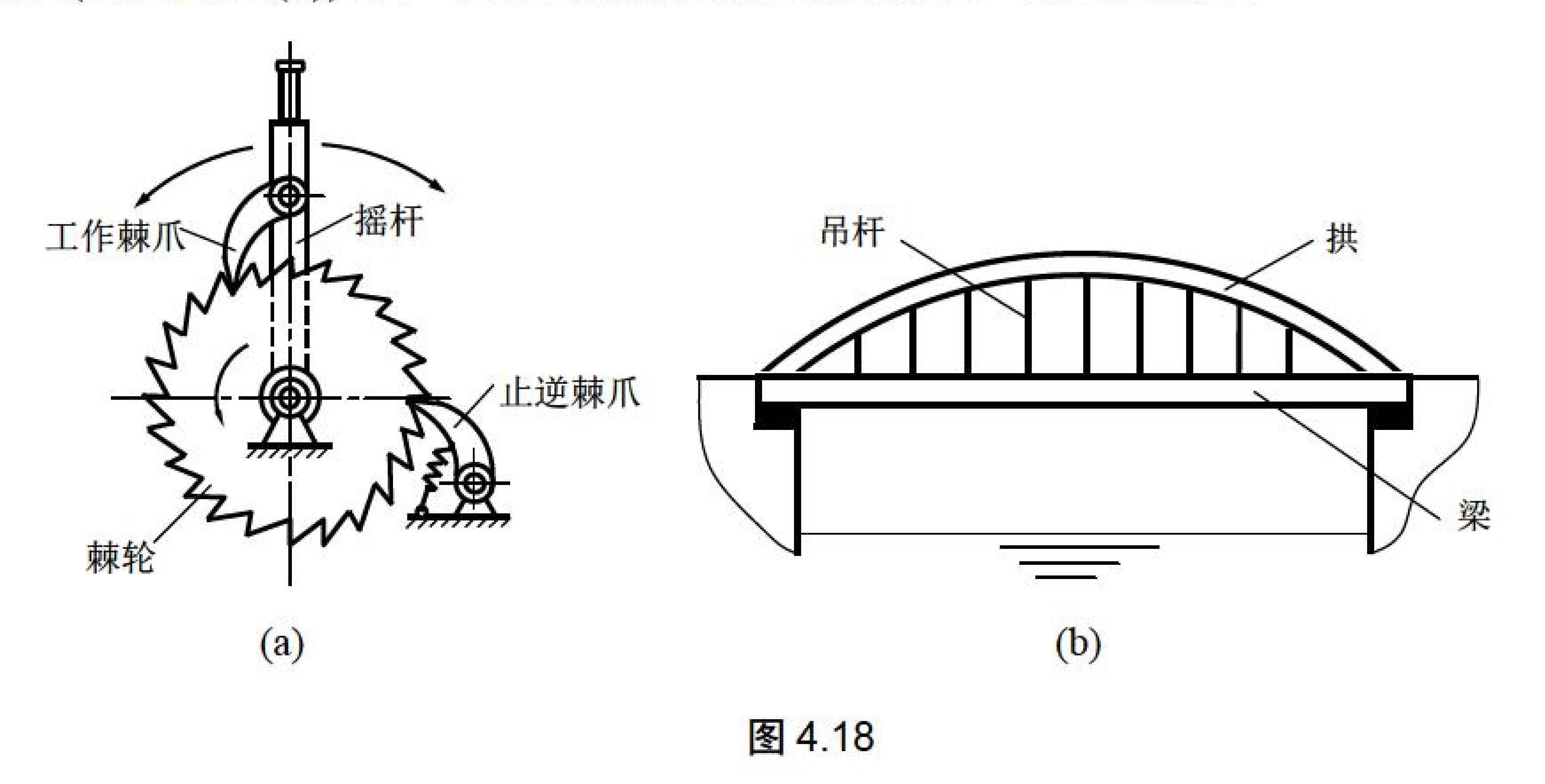


图 4.18

平面刚架和平面曲杆的内力符号与前面章节一致。在绘制轴力图和剪力图时，可画在构件轴线的任一侧(通常情况下在水平方向正值内力仍在上侧)，但必须注明正负号。弯矩图画在杆件轴线的受压一侧，弯矩图中不再标注正、负号。

下面举例说明平面刚架和平面曲杆内力图的绘制方法。

例 4.8 如图 4.19(a)所示刚架下端固定，在其轴线平面内集中载荷 F_1、F_2 作用，试作刚架的内力图。

解：计算刚架内力时，一般应先求出支反力。本刚架一端为自由端，若取包含自由端

部分为研究对象，就可不求支反力。根据刚架受外力情况，刚架内力图分成两段绘制。分别列出各段的内力方程如下。

CB 段：

$$F_N(x)=0$$
$$F_s(x)=F_1$$
$$M(x)=-F_1x(0\leqslant x\leqslant a)$$

BA 段：

$$F_N(x_1)=-F_1$$
$$F_s(x_1)=F_2$$
$$M(x_1)=-F_1a-F_2x_1(0\leqslant x_1\leqslant l)$$

根据各杆段的内力方程，刚架的轴力图、剪力图和弯矩图分别如图 4.19(b)、(c)、(d)所示。

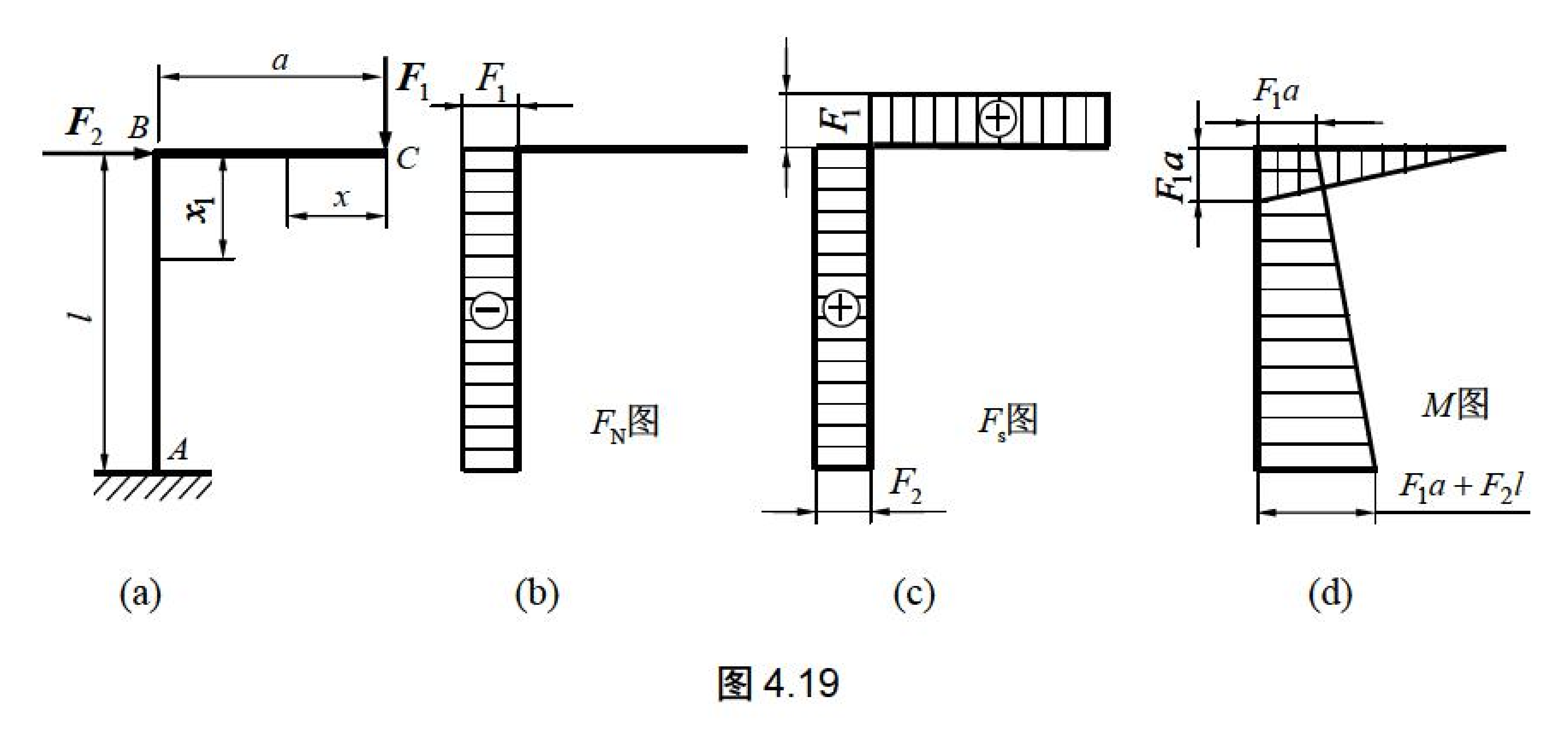


图 4.19

例 4.9　图 4.20(a)所示平面曲杆为一端固定的 1/4 圆环，半径为 r，受力 $\boldsymbol{F}$ 作用。试作此曲杆的内力图。

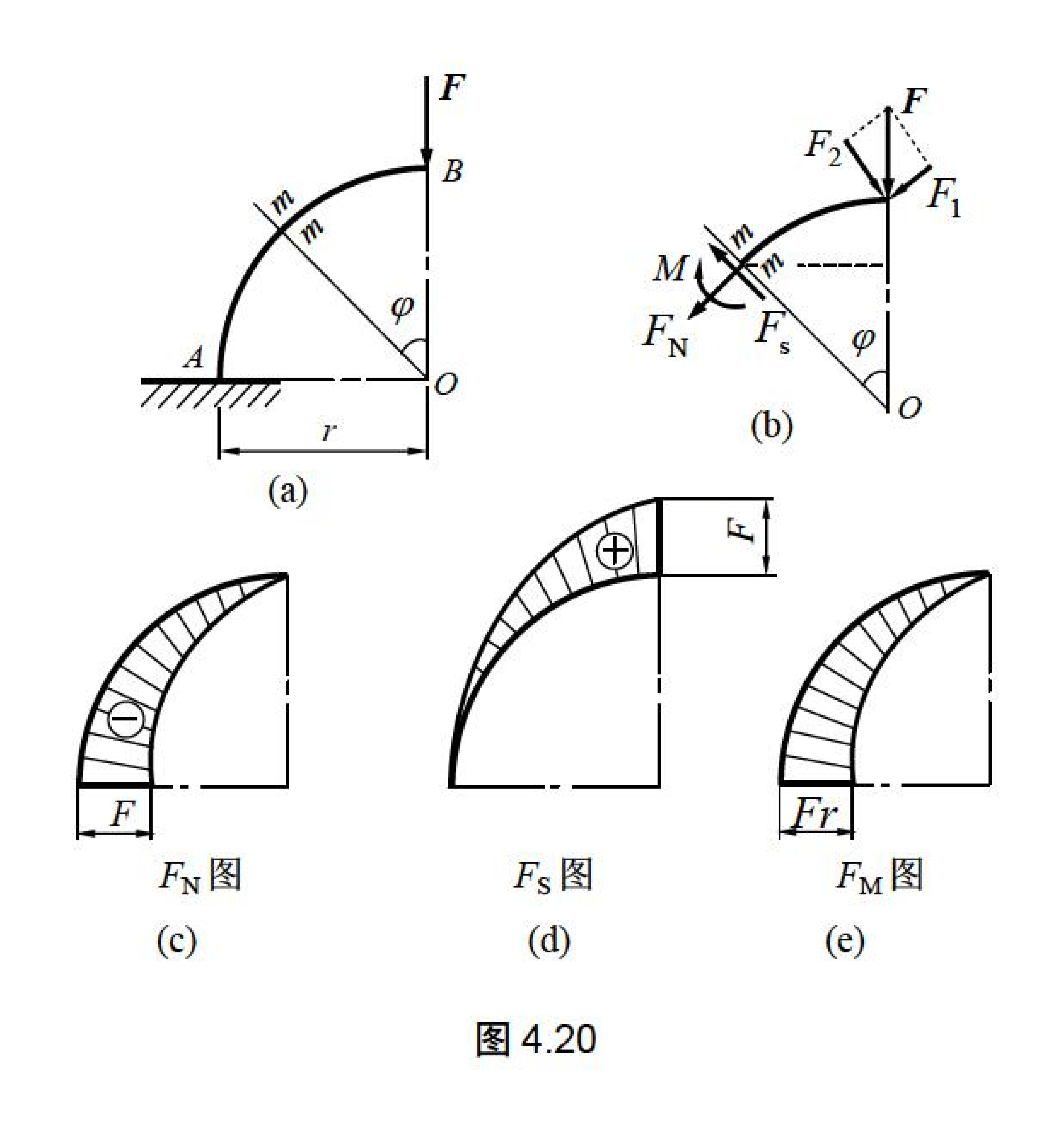


图 4.20

解：对于曲杆，以圆心角为 φ 的横截面(径向截面)m—m 将曲杆分成两部分(见图 4.20(b)，取 m—m 截面右端部分作为研究对象，将作用其上的所有力分别投影到 m—m 截面的切线和法线方向，矩心取在 m—m 截面的形心。由静力平衡方程有

$$F_{\mathrm{N}}(\varphi) = -F_1 = -F\sin\varphi$$

$$F_{\mathrm{s}}(\varphi) = -F_2 = F\cos\varphi$$

$$M(\varphi) = -Fr\sin\varphi$$

由上述内力方程，平面曲杆的轴力图、剪力图和弯矩图分别如图 4.20(c)、(d)、(e)所示。

本章小结

弯曲的受力特征是杆件承受垂直其轴线的外力或位于其轴线所在平面的力偶。其变形特征是杆件轴线将变弯成曲线。梁上所有的横向力或力偶均作用在纵向对称面内的弯曲称为对称弯曲。对称弯曲中弯曲变形后的轴线将是一条位于该对称面内的曲线。

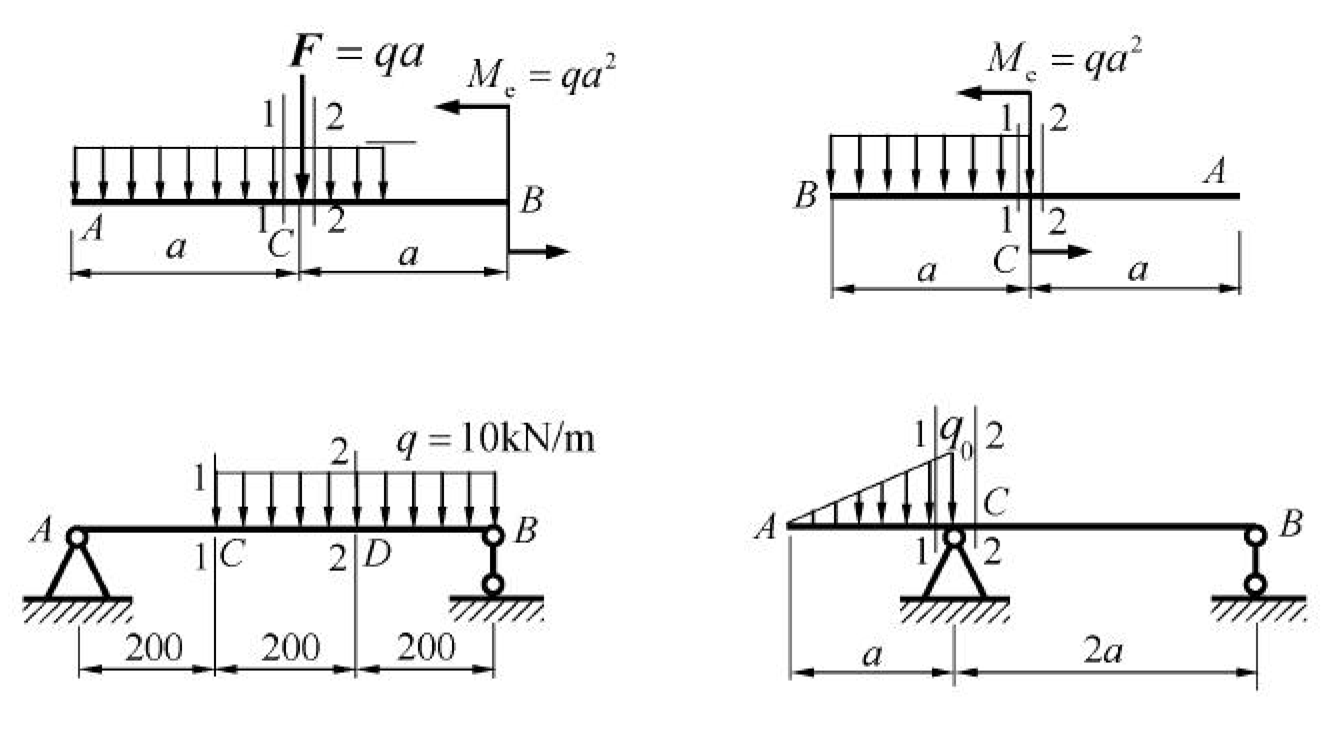
梁的支座有 3 种形式：固定端支座，存在 3 个支反力；固定铰支座，存在 3 个支反力；可动铰支座，只有 1 个支反力。梁上的载荷可简化为集中力、分布载荷和集中力偶，工程上常见的静定梁有 3 种基本形式：简支梁、悬臂梁、外伸梁。

当梁上有几个载荷同时作用时，可采用叠加原理来作剪力图和弯矩图。即某一横截面上的内力就等于在各个载荷单独作用下同一横截面上内力的代数和。

平面刚架、平面曲杆的内力也有剪力、弯矩和轴力。在绘制其轴力图和剪力图时，可画在构件轴线的任一侧，但必须注明正负号。弯矩图画在杆件轴线的受压一侧，弯矩图中不再标注正、负号。

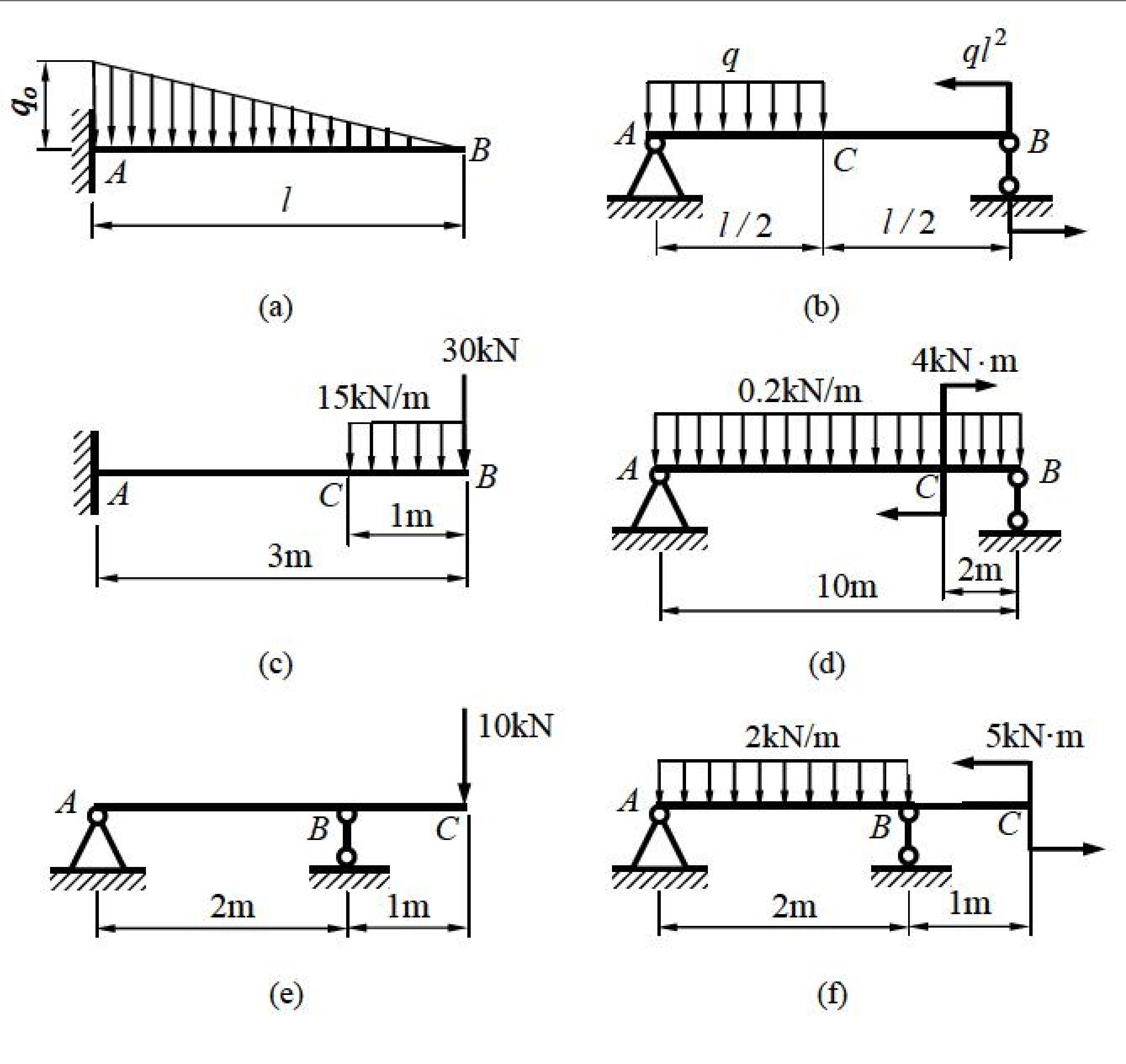
习　　题

4.1　试求习题 4.1 图所示各梁中截面 1—1、2—2 上的剪力和弯矩，截面无限接近于截面 C、D。



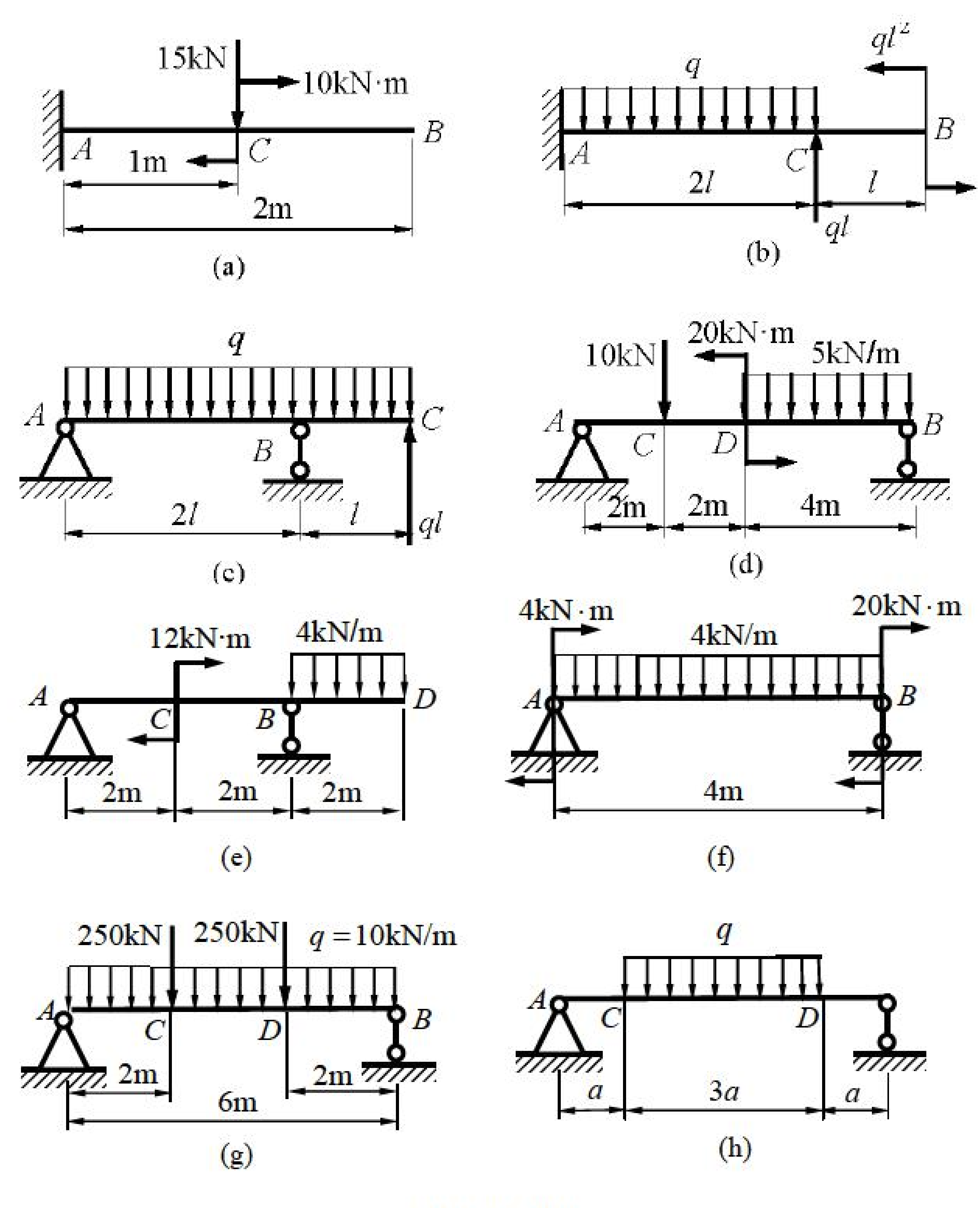
习题 4.1 图

4.2　试写出习题 4.2 图所示各梁的剪力方程和弯矩方程，并作剪力图和弯矩图。

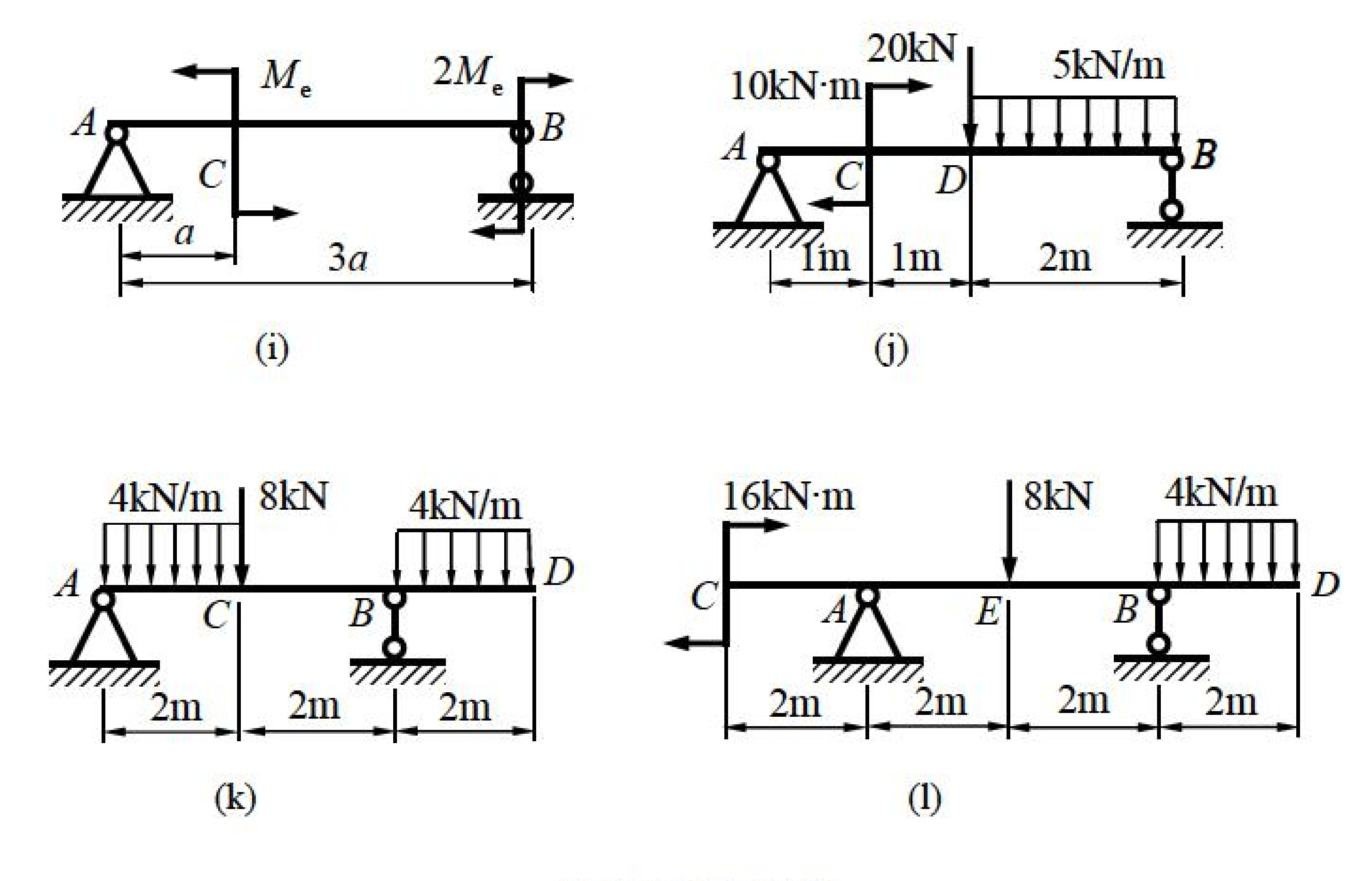


习题 4.2 图

4.3　如习题 4.3 图所示，试利用载荷集度、剪力和弯矩间的微分关系作下列各梁的剪力图和弯矩图。

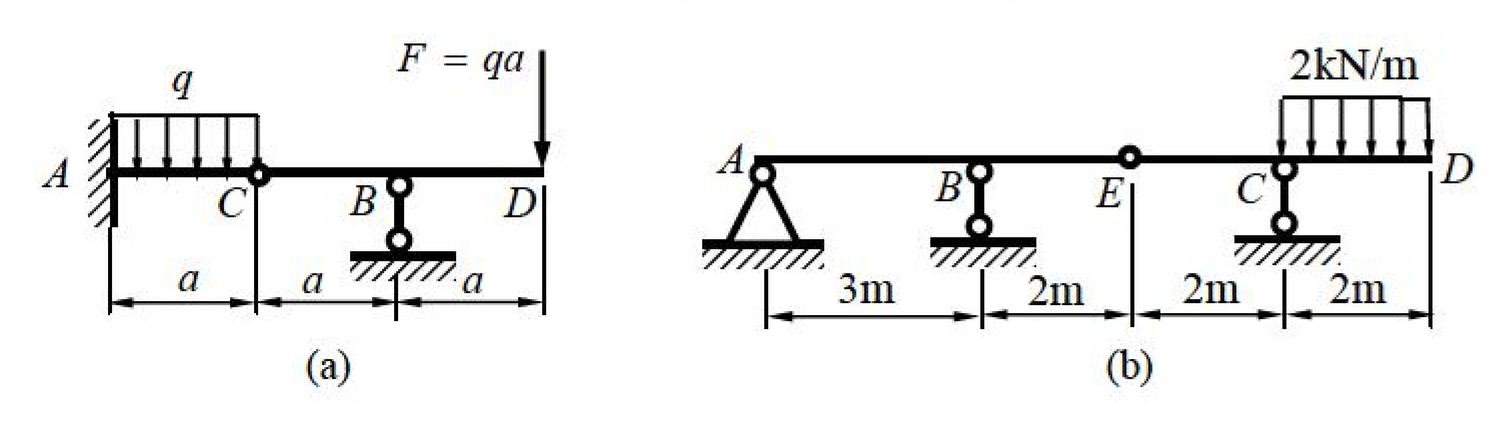


习题 4.3 图



习题 4.3 图(续)

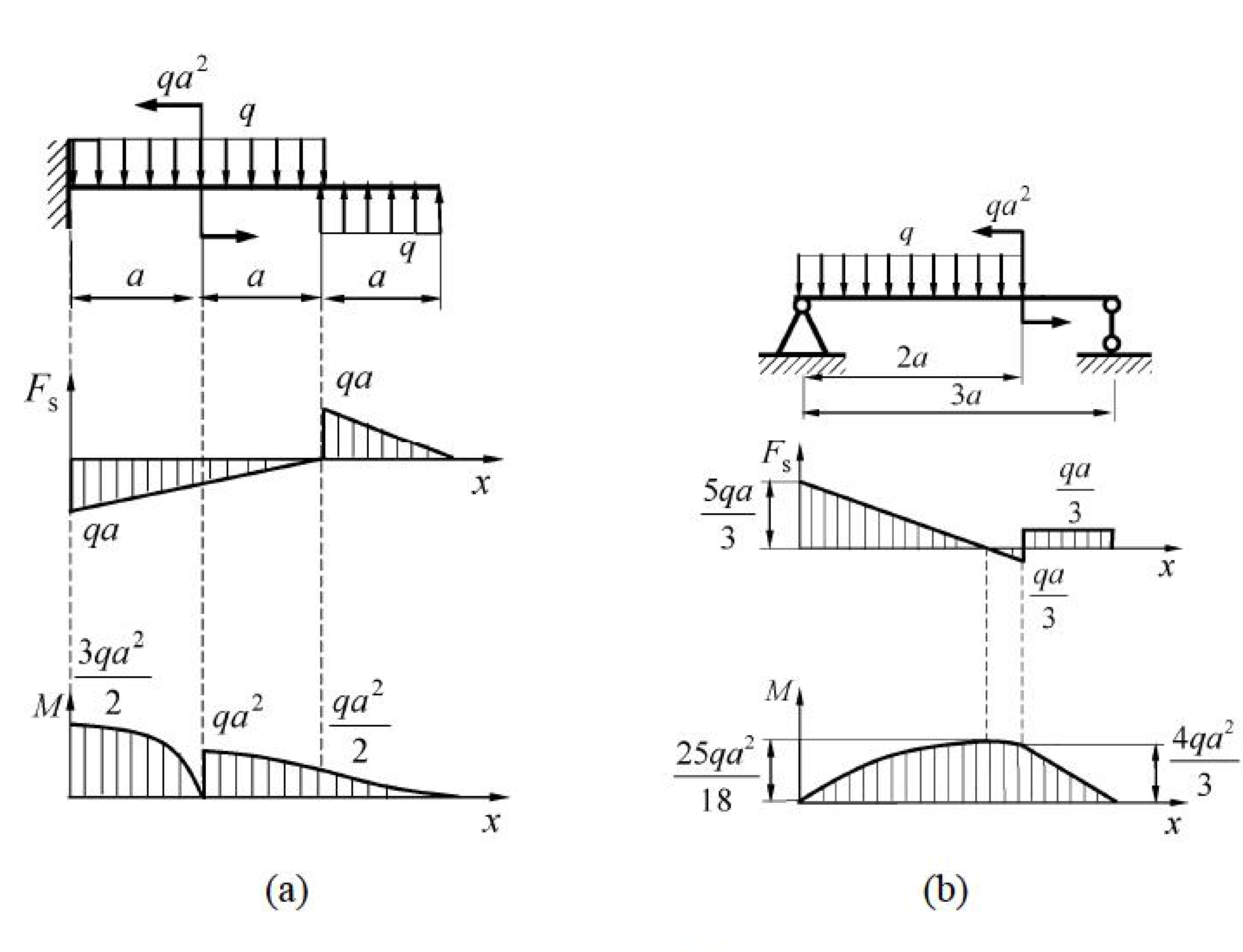
4.4 试作习题 4.4 图所示具有中间铰的梁的剪力图和弯矩图。



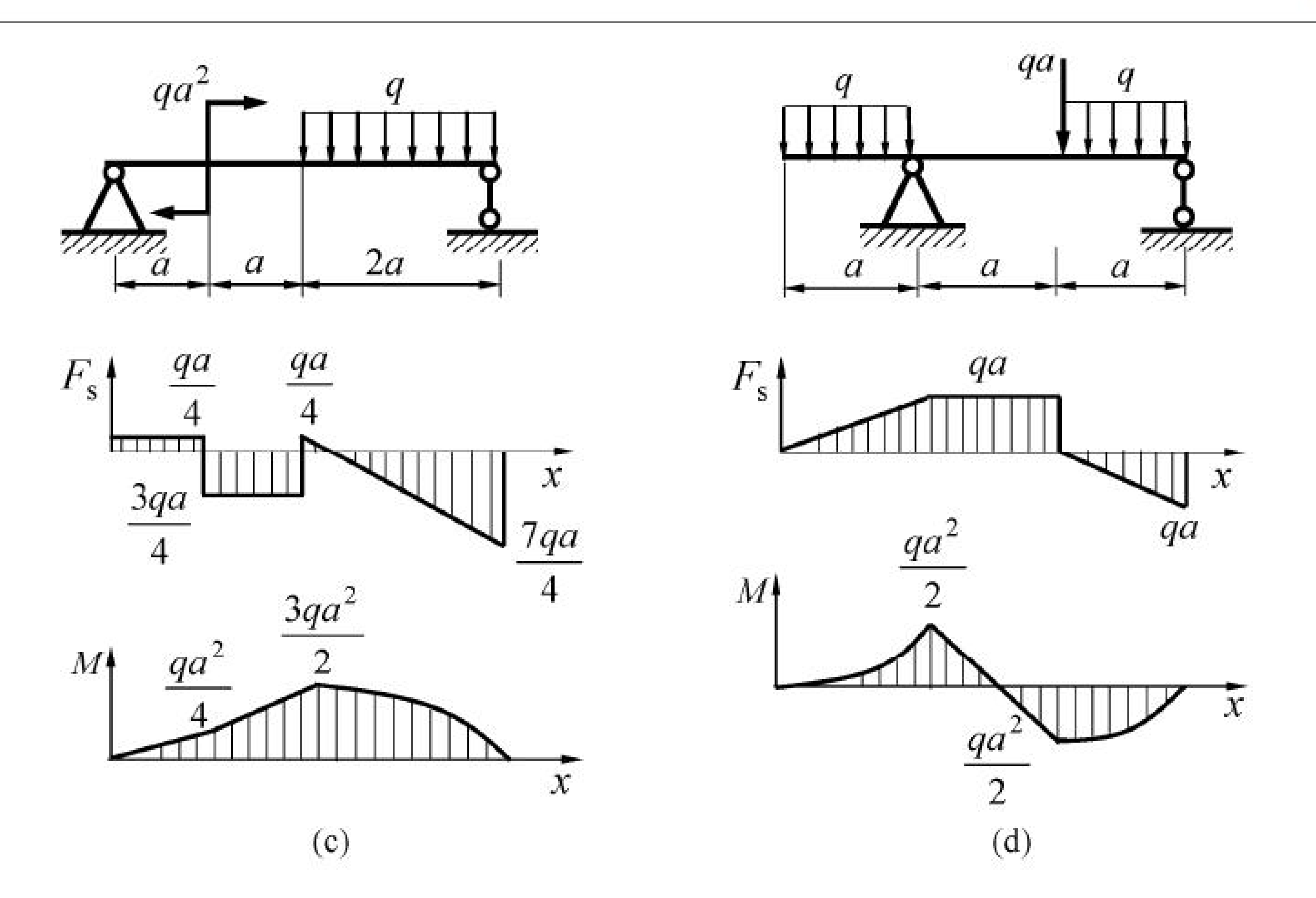
习题 4.4 图

4.5 试根据载荷集度、剪力和弯矩间的微分关系指出习题 4.5 图所示剪力图和弯矩图中的错误。

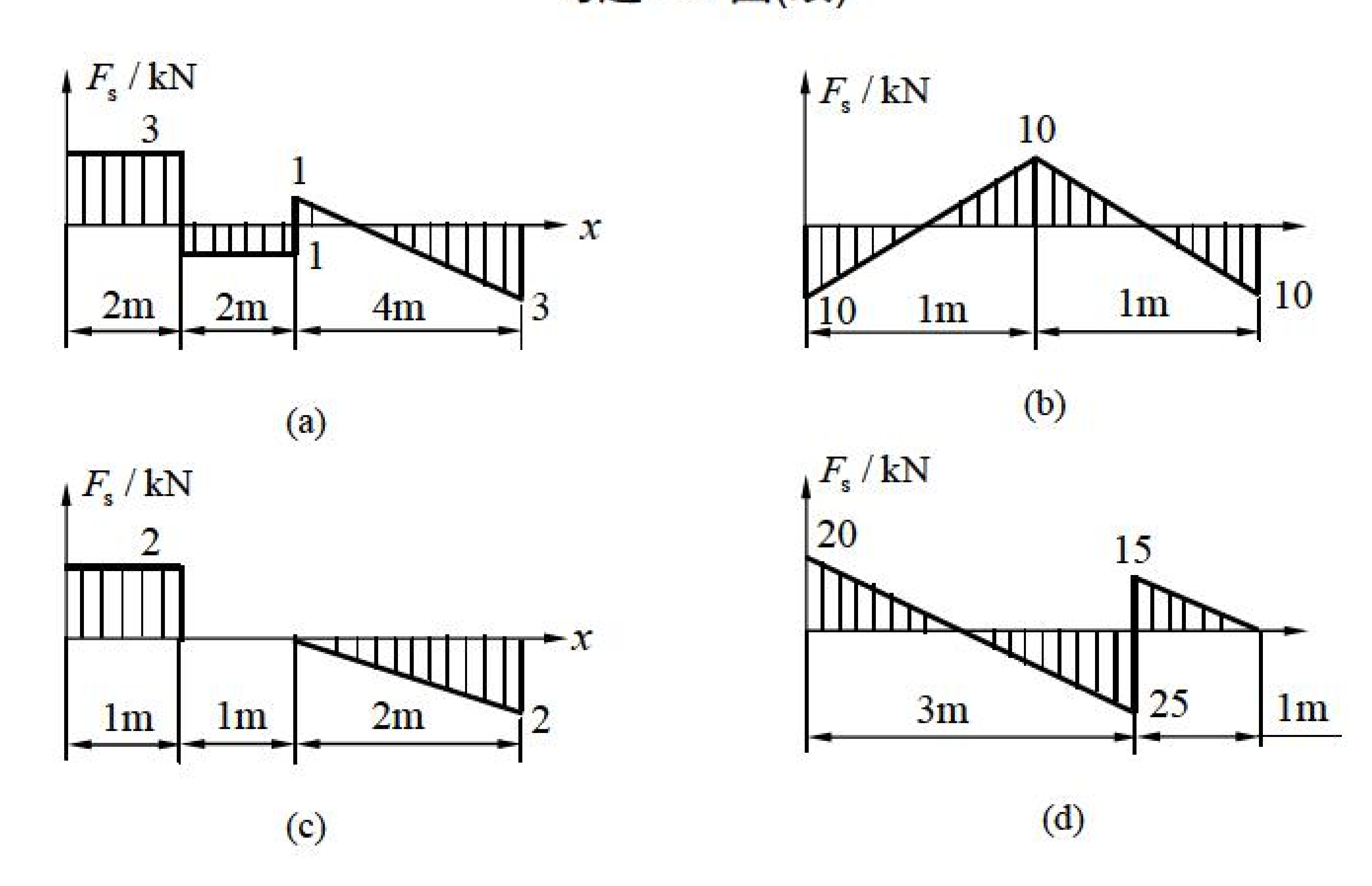
4.6 已知梁的剪力图如习题 4.6 图所示，且梁上未作用有集中载荷。试作梁的弯矩图和载荷图。



习题 4.5 图

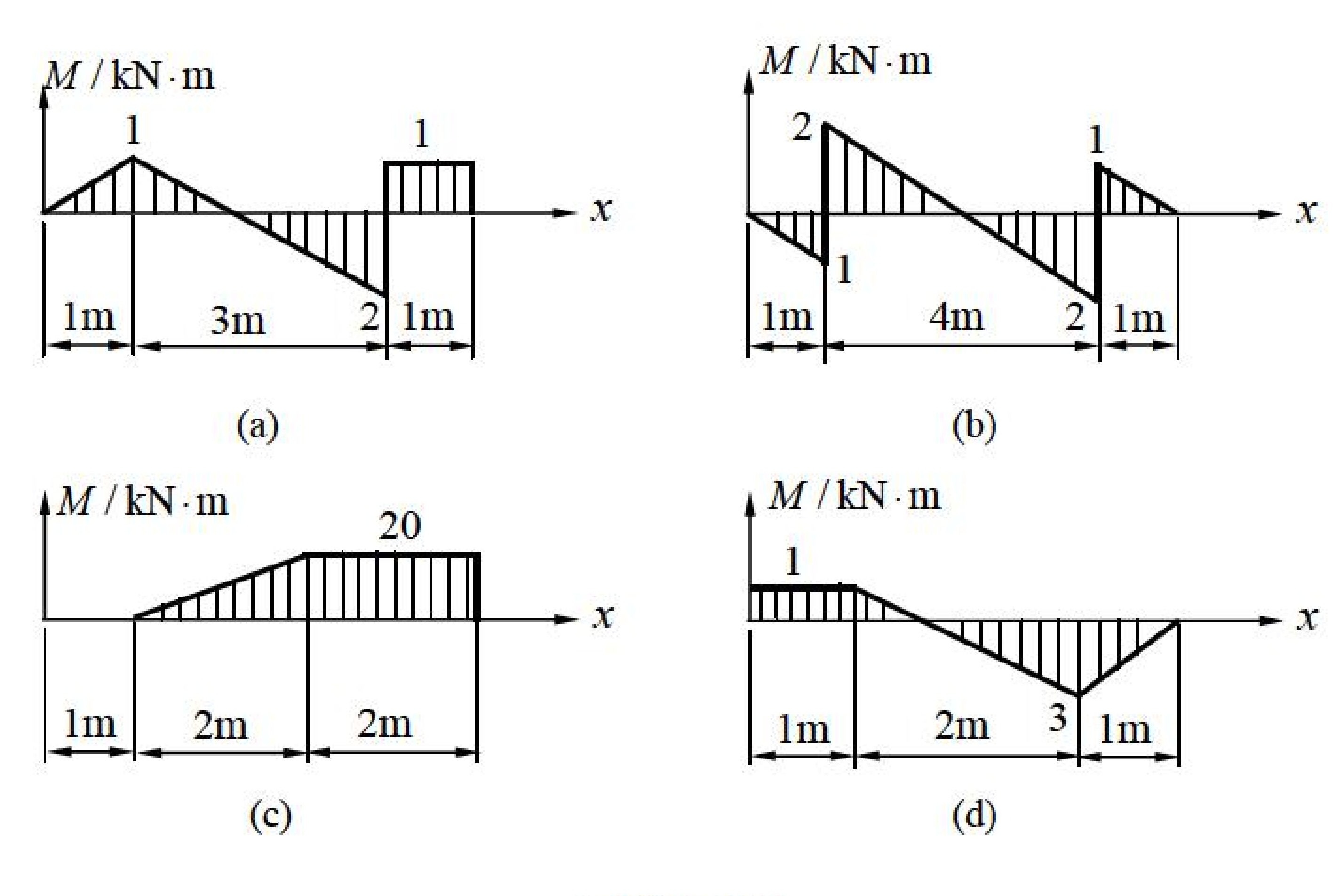


习题 4.5 图(续)



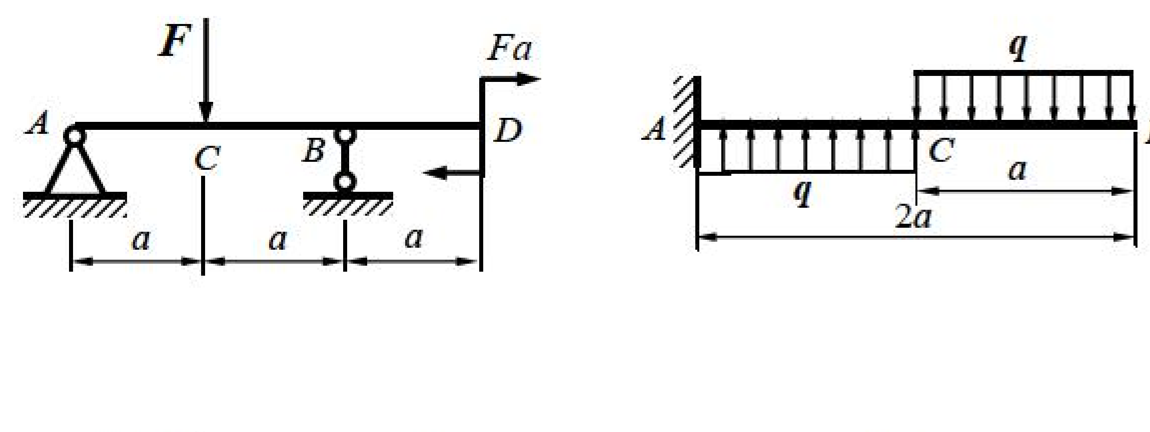
习题 4.6 图

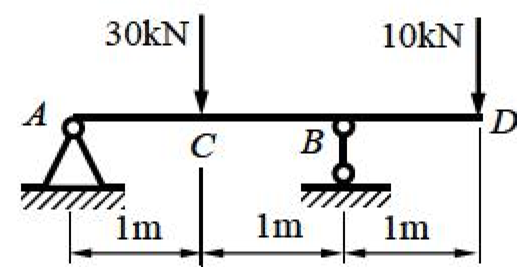
4.7　已知梁的弯矩图如习题 4.7 图所示，试作梁的剪力图和载荷图。

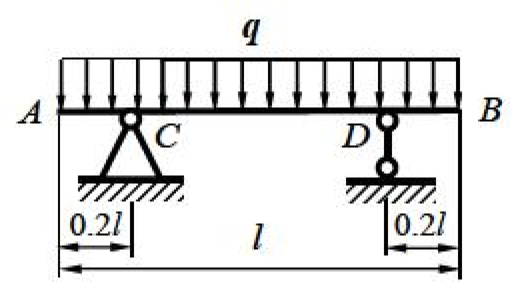


习题 4.7 图

4.8 试用叠加法作出习题 4.8 图所示各梁的弯矩图。

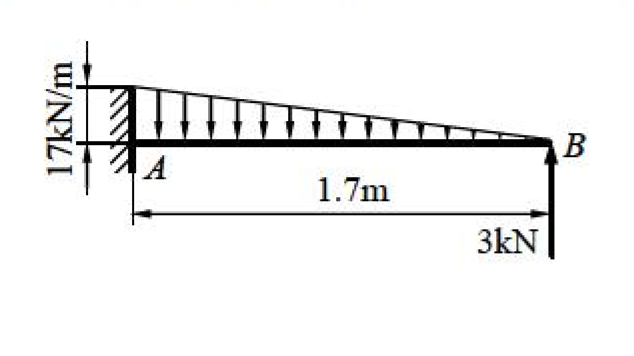


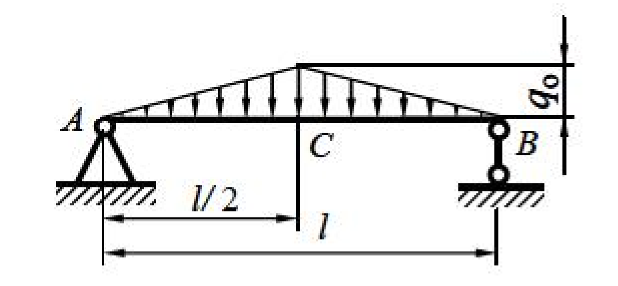


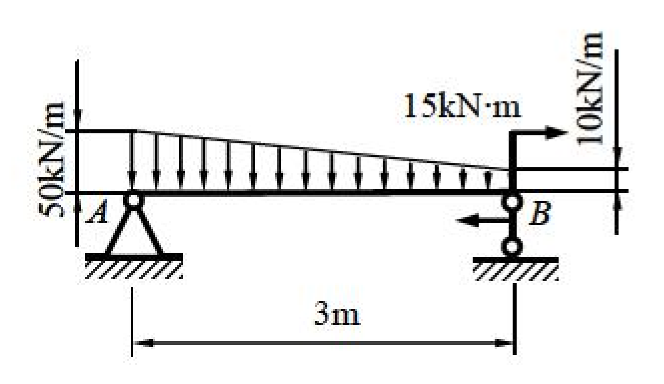


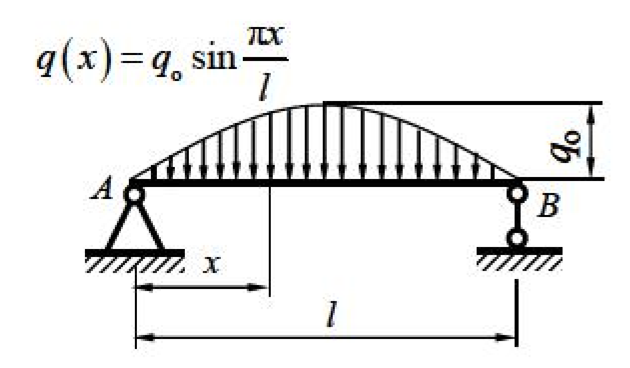
习题 4.8 图

4.9 试选择适当的方法，作出习题 4.9 图所示各梁的剪力图和弯矩图。



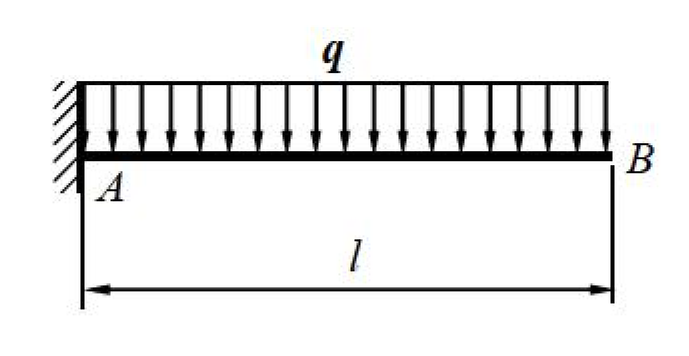


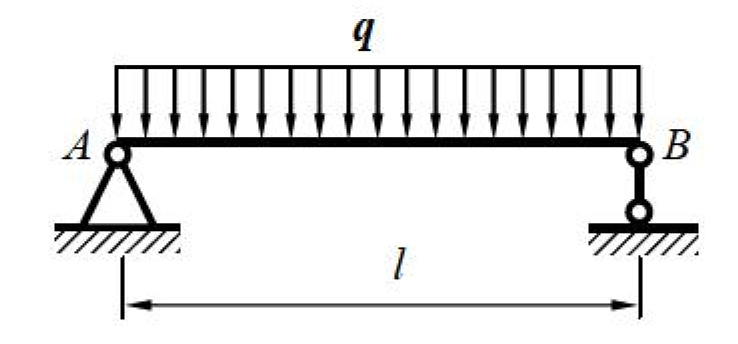


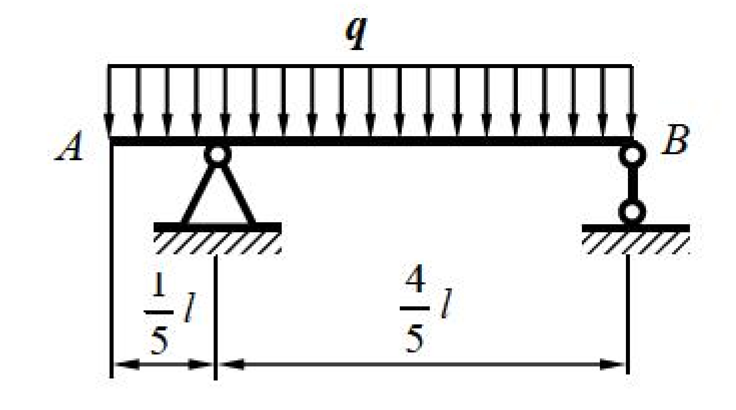


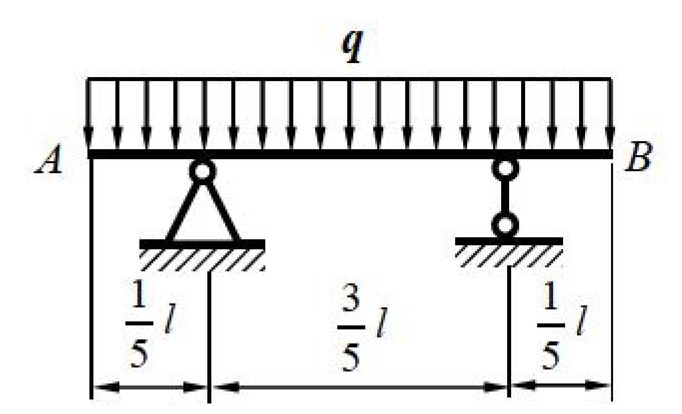
习题 4.9 图

4.10 长度相同、承受同样的均布载荷 q 作用的梁，有如习题 4.10 图所示的 4 种支承方式，如果要使梁上的最大弯矩最小，试确定最合理的支承方式，并说明理由。



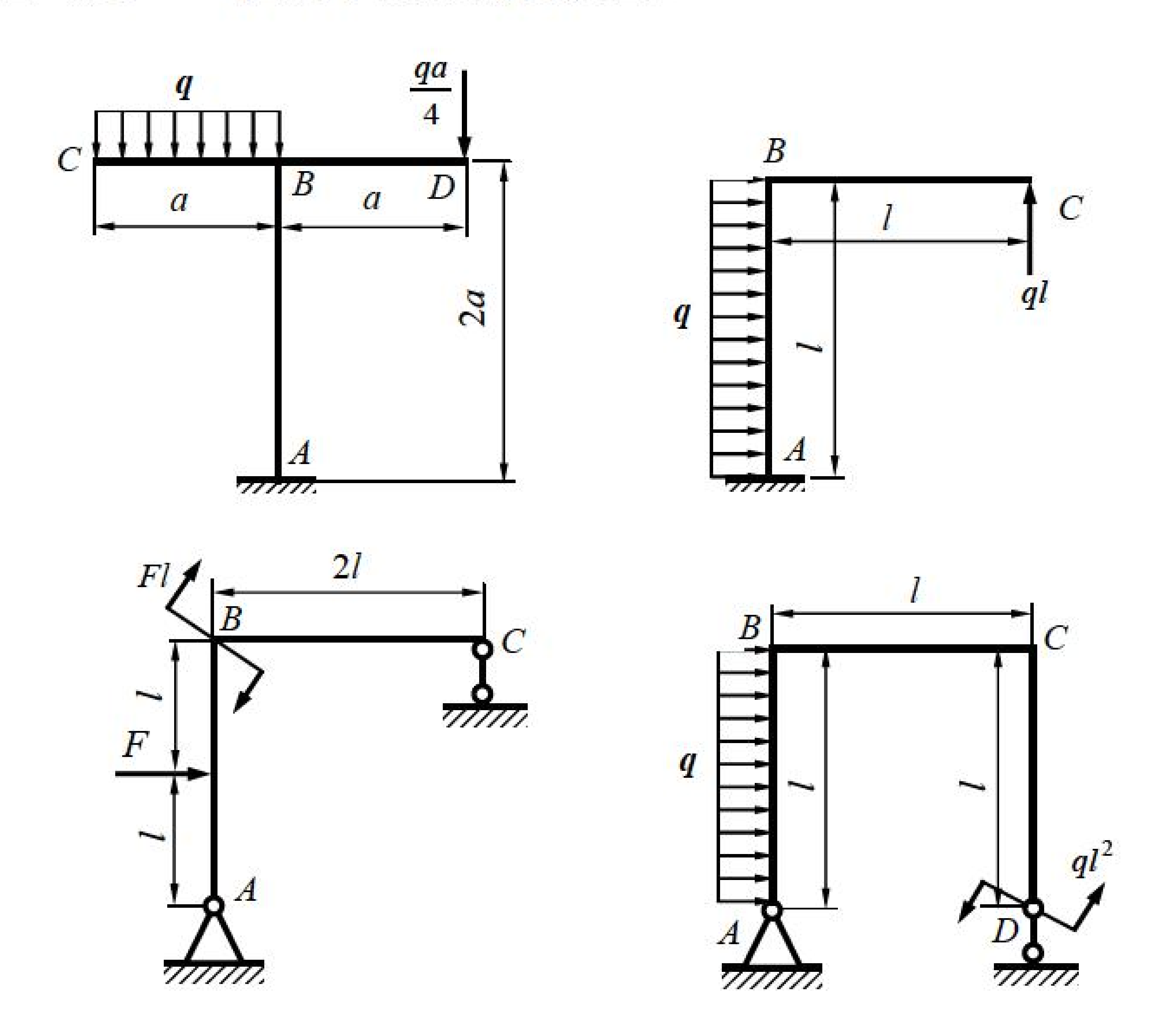






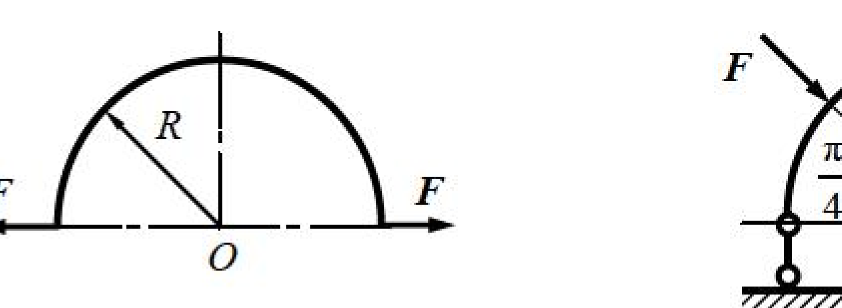
习题 4.10 图

4.11　试作出习题 4.11 图所示刚架的内力图。



习题 4.11 图

4.12　圆弧形曲杆受力如习题 4.12 图所示，已知圆弧半径为 R。试写出各曲杆的轴力、剪力和弯矩的方程，并作出曲杆的轴力图、剪力图和弯矩图。



习题 4.12 图

第 5 章　弯 曲 应 力

【本章学习重点】

本章主要学习梁弯曲时横截面上的正应力和切应力及其强度条件。研究提高梁弯曲强度的措施。

【本章学习目标】

- 掌握梁弯曲时横截面上的正应力分布规律，熟记矩形截面、圆截面的惯性矩和弯曲截面系数并能计算横截面内任意点的正应力和最大正应力。
- 根据正应力强度条件，进行强度校核、截面设计和许可载荷的计算。
- 掌握梁弯曲时横截面上的正应力分布规律，计算横截面内任意点的切应力和最大切应力。在一些特定情况下进行切应力强度校核。
- 熟悉提高梁的承载能力、合理设计弯曲梁常用的措施。

5.1　弯曲时梁横截面上的正应力

5.1.1　纯弯曲和横力弯曲的概念

我们知道，平面弯曲时梁的横截面上一般存在两个内力分量，即剪力和弯矩。但也有的弯曲在梁的横截面上只有弯矩一个内力分量，如图 5.1 中几种梁受弯曲时，梁上 *AB* 段弯矩为常量，剪力等于零，则该段梁上的弯曲称为**纯弯曲**。而在图 5.1(c)、(d)中的 *CA*、*BD* 梁段上，梁横截面上既有弯矩又有剪力，这种弯曲称为**横力弯曲**。大多数梁的弯曲为横力弯曲。

由静力学可知，弯矩 M 是横截面上法向分布内力系组成的合力偶矩，而剪力 F_s 是横截面上切向分布的内力系组成的合力。因此，梁横截面上的正应力只与弯矩 M 相关，而梁横截面的切应力只与剪力 F_s 相关。由此可知，纯弯曲中，梁横截面内只有正应力而无切应力；而横力弯曲中既有正应力也有切应力。因此，在分析梁横截面上正应力时先从纯弯曲开始。

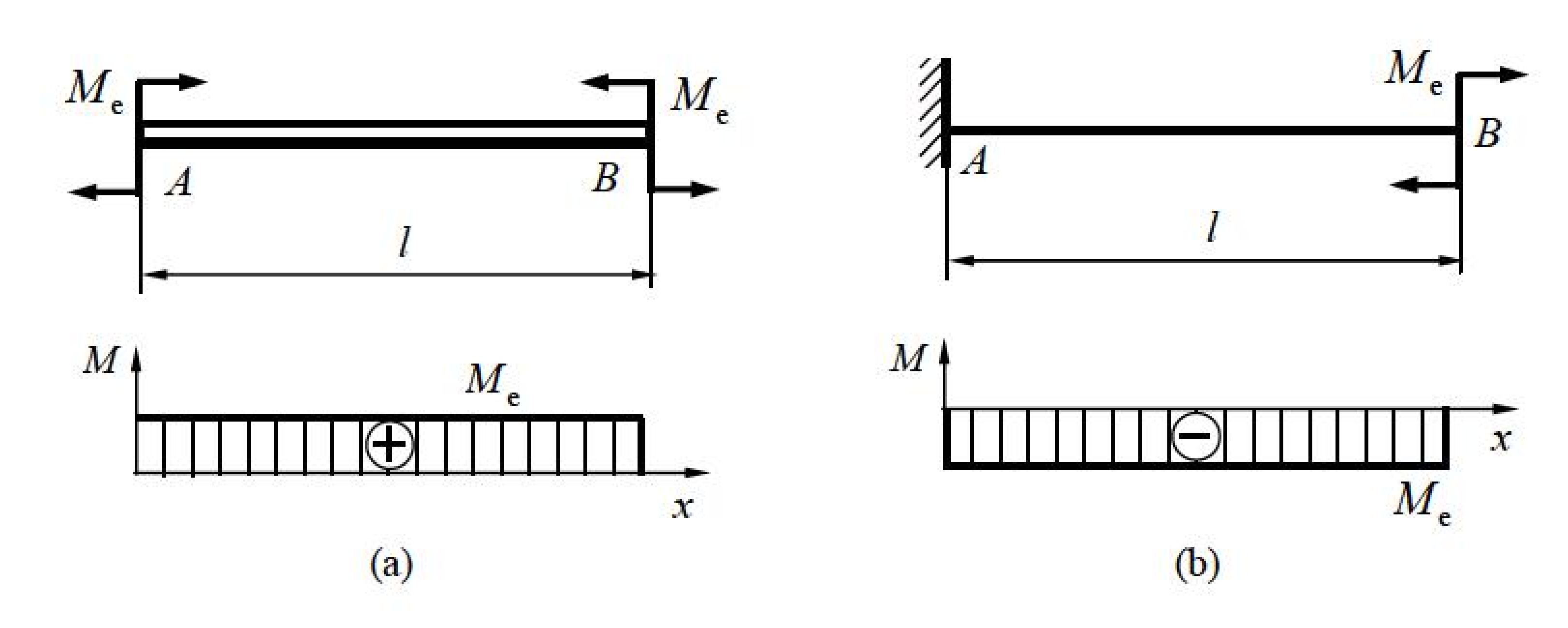


图 5.1

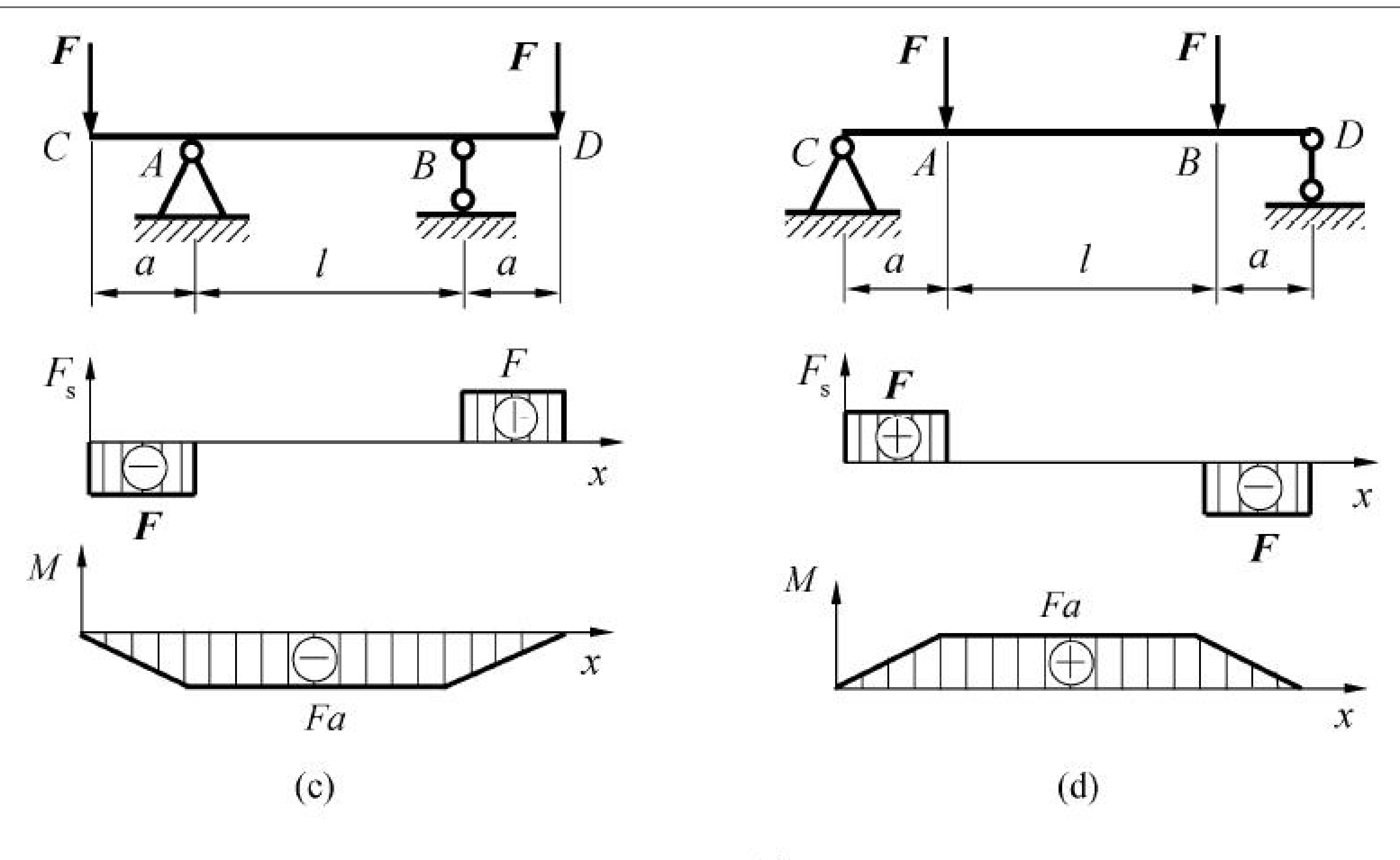


图 5.1(续)

5.1.2　纯弯曲时梁横截面上的正应力

1．纯弯曲试验与平面假设

如果用容易产生变形的材料如橡胶、海绵等，制成矩形截面梁的模型。在试验前，在矩形梁的侧面画上纵向线 ab、cd，并作出与纵向线垂直的横向线 1—1、2—2，如图 5.2(a)所示。试验中在梁的两端施加一对大小相等、方向相反的力偶，使之产生纯弯曲，可观察到图 5.2(b)所示的变形。

(1)　各纵向线变成圆弧线，变形后靠底层的纵向线 $a'b'$ 伸长，靠顶层的纵向线 $c'd'$ 缩短。

(2)　各横向线变形后仍为直线，横向线 $1'—1'$、$2'—2'$ 仍与纵向线 $a'b'$、$c'd'$ 正交且相对转过了一个角度。

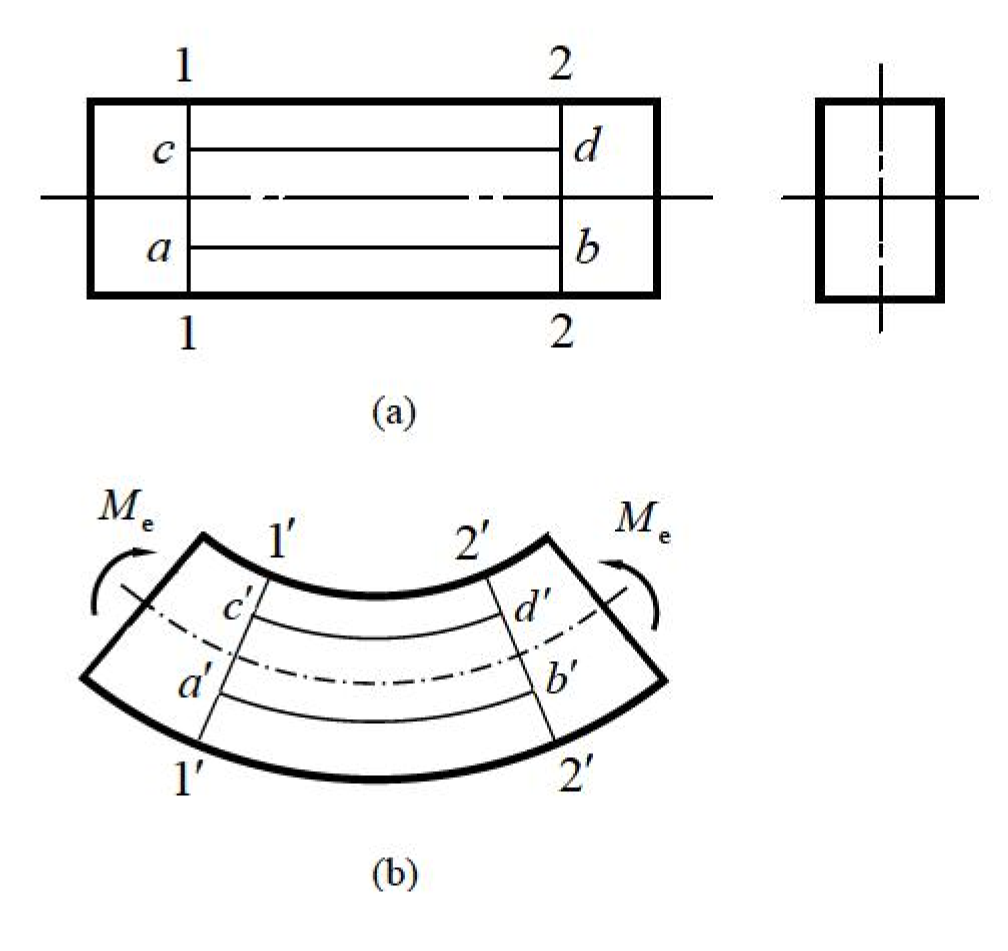


图 5.2

根据上述试验现象，对梁的纯弯曲中的变形和梁内应力提出以下假设：梁变形后，其



横截面仍保持为平面，且仍垂直于变形后的梁轴线，这称为弯曲平面假设；如设想梁由许多的纵向纤维所组成，纤维伸长时受拉应力，纤维缩短时受压应力，纤维之间不存在正应力，这称为单向应力假设。

从纯弯曲变形中还可以看到，底层纤维的伸长逐渐变为顶层纤维的缩短，在伸长区和缩短区之间必有一层既不伸长也不缩短的纤维层，这一纤维层称为**中性层**，如图 5.3 所示。中性层与横截面的交线称为**中性轴**。

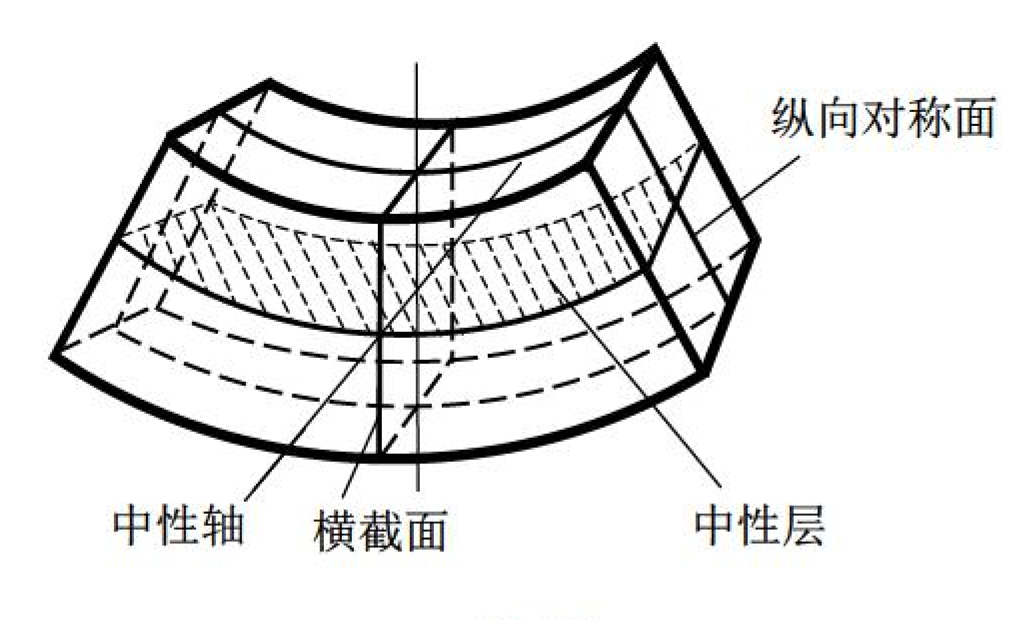


图 5.3

2. 纯弯曲变形的应变分布

如图 5.4(a)所示，在受纯弯曲的梁段上，用相邻两个横截面 1—1、2—2 截取长度为 dx 的微段，并以梁横截面沿高度方向的对称轴为 y 轴(设向下为正)，沿梁的轴线方向取为 x 轴，两轴坐标原点取在中性轴上。现分析微段上与中性层距离为 y 的那一层的纵向线应变。

设微段变形前中性层长度 O_1O_2，与中性层距离为 y 的那一层长度为 ab，显然 $O_1O_2=ab$。微段受弯矩 M 后，根据弯曲平面假设，变形后的两相邻横截面仍为平面，只是绕各自的中性轴转动，产生了相对转角 $d\theta$，如图 5.4(b)所示。中性层长度 O_1O_2 由直线变为圆弧线 $O_1'O_2'$，

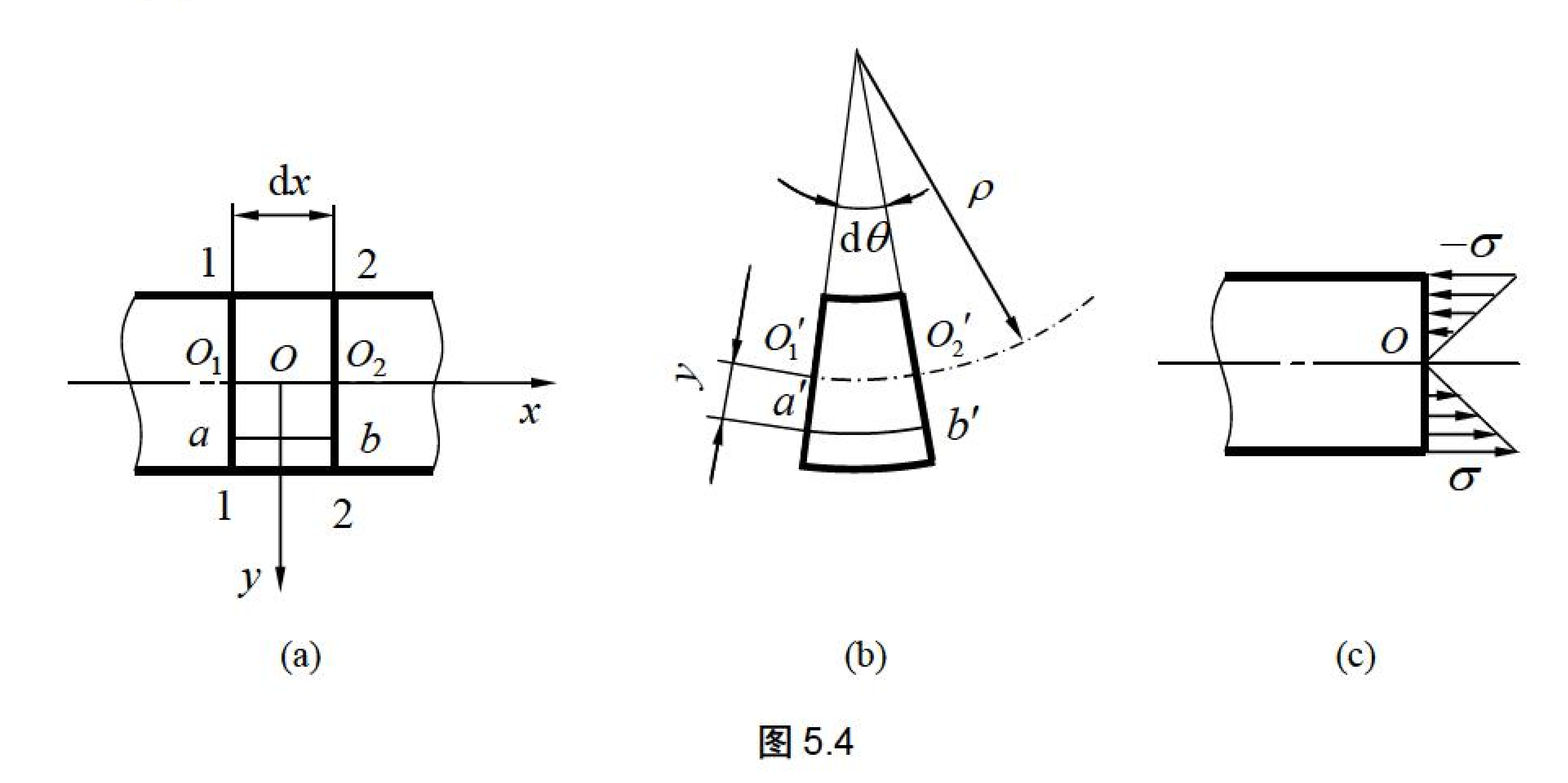


图 5.4

其曲率半径为 ρ；与中性层距离为 y 的那一层长度 ab 由直线变为圆弧线 $a'b'$，曲率半径为 $\rho + y$。该层纤维的纵向线应变为

$$\varepsilon=\frac{\overline{a'b'}-\overline{ab}}{\overline{ab}}=\frac{\overline{a'b'}-\overline{O_1O_2}}{\overline{O_1O_2}}=\frac{(\rho+y)\mathrm{d}\theta-\rho\cdot\mathrm{d}\theta}{\rho\cdot\mathrm{d}\theta}=\frac{y}{\rho} \tag{5.1}$$

由式(5.1)可知，梁上各层纤维的线应变与该层至中性层的距离 y 成正比。

3．纯弯曲变形的应力分布

由纯弯曲单向应力假设，梁上各层纤维都为单向拉伸或压缩。当应力不超过材料的比例极限时遵循胡克定律，则正应力沿横截面高度分布的数学式为

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho} \tag{5.2}$$

可见，在横截面上任意点的弯曲正应力与该点至中性轴的距离 y 成正比。弯曲正应力沿横截面高度呈线性分布，如图 5.4(c)所示。

4．纯弯曲变形的中性轴位置和正应力计算

如图 5.5(a)所示，在弯曲梁的横截面上建立一空间坐标系，取中性轴为 z 轴。由上述正应力分布可知，在横截面上由正应力形成无数个法向微内力 $\sigma\mathrm{d}A$，这些微内力组成了 x 方向的空间平行力系。这一空间力系可简化为 3 个内力分量(见图 5.5(b))，即

$$F_x=\int_A\sigma\mathrm{d}A，\quad M_y=\int_A z\sigma\mathrm{d}A，\quad M_z=\int_A y\sigma\mathrm{d}A$$

纯弯曲中只有一个外力 M_e，它与 3 个内力分量构成空间平衡力系，平衡方程为

$$\sum F_x=0，\quad F_x=\int_A\sigma\mathrm{d}A=0 \tag{5.3}$$

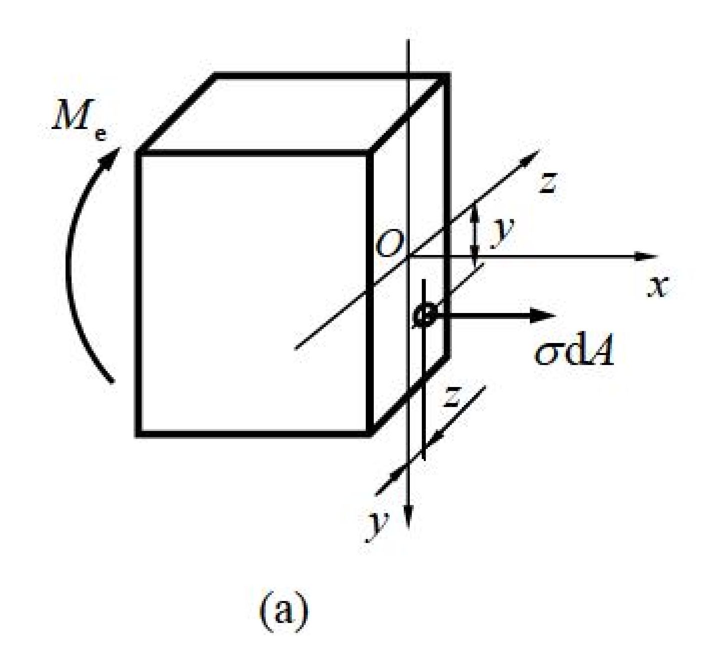
$$\sum M_y=0，\quad M_y=\int_A z\sigma\mathrm{d}A=0 \tag{5.4}$$

$$\sum M_z=0，\quad M_z-M_\mathrm{e}=\int_A y\sigma\mathrm{d}A-M_\mathrm{e}=0$$

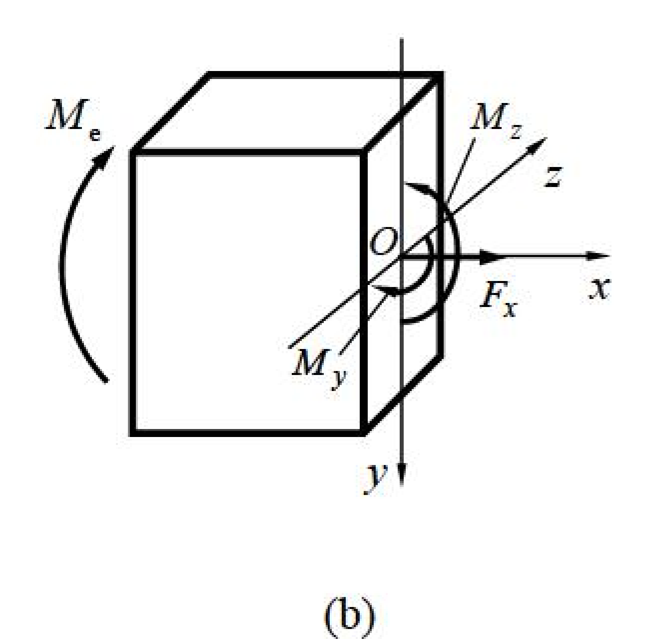
因纯弯曲中 $M=M_\mathrm{e}$，故有

$$M=\int_A y\sigma\mathrm{d}A \tag{5.5}$$

将式(5.2)代入式以式(5.3)～式(5.5)，可得



(a)



(b)

图 5.5

$$\int_A\sigma\mathrm{d}A=\frac{E}{\rho}\int_A y\mathrm{d}A=0 \tag{5.6}$$

$$\int_A z\sigma\mathrm{d}A=\frac{E}{\rho}\int_A yz\mathrm{d}A=0 \tag{5.7}$$

$$M = \int_A y\sigma \mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 \mathrm{d}A \tag{5.8}$$

在式(5.6)中，$\frac{E}{\rho}=$ 常量 $\neq 0$，则必须有$\int_A y\mathrm{d}A = S_z = 0$，即横截面对 z 轴的静矩等于零。由附录 A.1 可知，z 轴必须通过截面形心。这一结论确定了平面弯曲中中性轴的位置，中性轴 z 轴通过截面形心。

同理，在式(5.7)中，必须有$\int_A yz\mathrm{d}A = I_{yz} = 0$，$I_{yz}$ 为截面对 y 轴和 z 轴的惯性积。由附录 A.2 可知，由于 y 轴是横截面的对称轴，$I_{yz} = 0$。

$\int_A y^2\mathrm{d}A = I_z$ 为横截面对 z 轴(中性轴)的惯性矩，式(5.8)可变为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z} \tag{5.9}$$

式中，$\frac{1}{\rho}$ 为梁轴线在纯弯曲变形后的曲率。式(5.9)表明，EI_z 越大，则曲率 $\frac{1}{\rho}$ 越小。EI_z 称为**弯曲刚度**。

将式(5.9)代入式(5.2)，得到纯弯曲时梁横截面上正应力的计算公式为

$$\sigma = \frac{My}{I_z} \tag{5.10}$$

式中，惯性矩 I_z 的单位为 m^4。由附录 A.2 可知，对于高为 h、宽为 b 的矩形截面，$I_z = \frac{bh^3}{12}$；对于直径为 d 的圆截面，$I_z = \frac{\pi d^4}{64}$；对于型钢截面，I_z 可从附录 B 型钢表中查到。

5. 最大弯曲正应力

由式(5.10)可知，弯曲时横截面上离中性轴最远的各点处正应力值最大。最大弯曲正应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z} \tag{5.11}$$

如果中性轴 z 为横截面对称轴时，如矩形梁、圆截面梁、方形梁、工字梁等截面，其最大拉应力和最大压应力数值相等。可令式(5.11)中

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \tag{5.12}$$

则有

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} \tag{5.13}$$

式中，W_z 为弯曲截面系数(m^3)，其值只与截面的形状和尺寸有关。对于高为 h、宽为 b 的矩形截面：$W_z = \frac{bh^2}{6}$；对于直径为 d 的圆截面：$W_z = \frac{\pi d^3}{32}$。

如果中性轴为非对称轴的横截面，如 T 形截面(见图 5.6(a))，则其最大拉应力和最大压应力的数值不相等(见图 5.6(b))，应分别以横截面上受拉和受压部分距中性轴最远的距离

$y_{t,max}$、$y_{c,max}$ 直接代入式(5.10)进行计算。

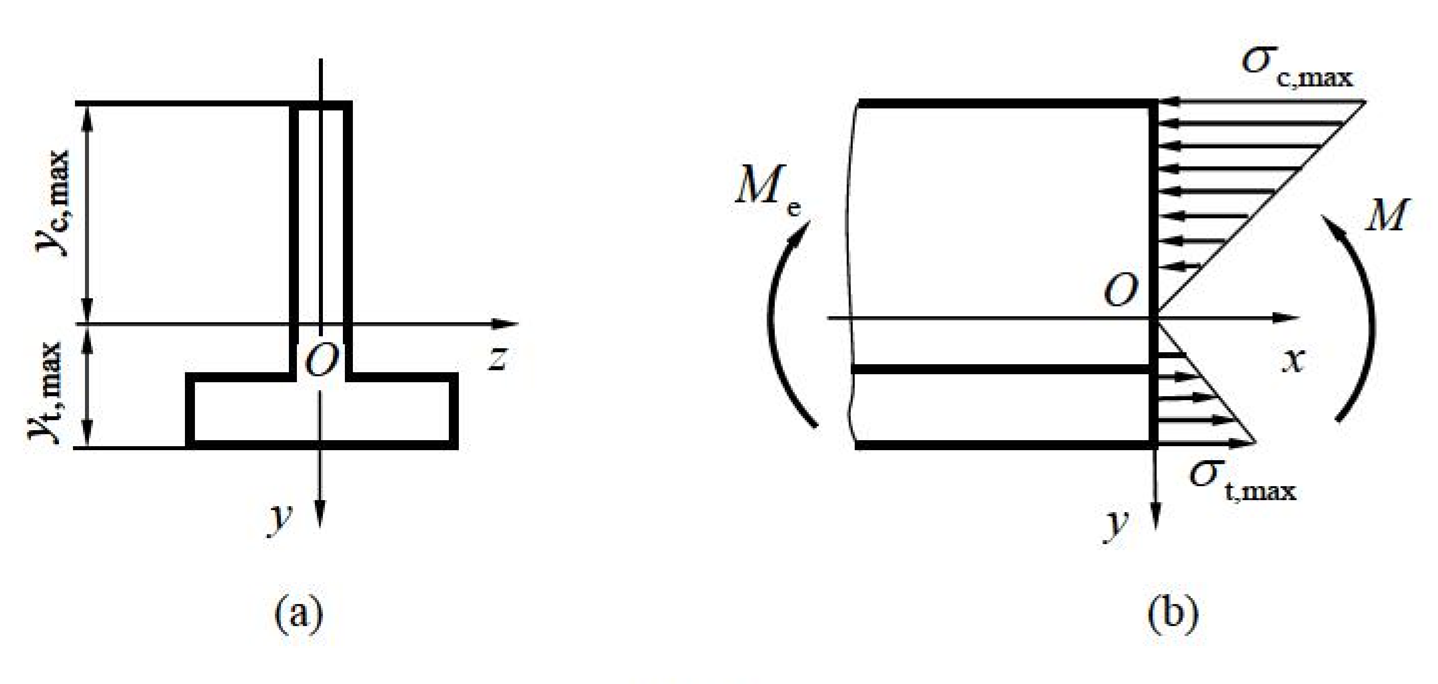


图 5.6

5.1.3　横力弯曲时梁横截面上的正应力

工程中常见的弯曲问题多为横力弯曲。当梁上有横向力作用时，梁的横截面上不仅有正应力，还有切应力。由于切应力的存在，梁的横截面将产生翘曲。此外，横向力还会引起纤维层之间形成一定的挤压应力。因此，梁在纯弯曲时所做的平面假设和单向应力假设均不能成立。然而，弹性理论的分析结果表明，在均布载荷作用下的矩形截面简支梁，当梁跨度与横截面高度之比 $l/h>5$ 时，横截面上的最大正应力按纯弯曲时的式(5.11)来计算，其误差不超过 1%。对于其他横力弯曲的梁，所得结果的误差虽然略偏大，但能够满足工程问题所需要的精度要求，且梁的跨高比 l/h 越大，其误差越小。

根据上述结论，式(5.10)仍可作为横力弯曲时的正应力计算公式，但由于弯矩不再为常量，式中弯矩 M 须用相应截面上的弯矩 $M(x)$ 代替，即

$$\sigma=\frac{M(x)y}{I_z} \tag{5.14}$$

横力弯曲时，梁的最大正应力为

$$\sigma=\frac{M_{\max}y_{\max}}{I_z} \tag{5.15}$$

横截面为对称形状的梁，其最大正应力可表示为

$$\sigma=\frac{M_{\max}}{W_z} \tag{5.16}$$

例 5.1　承受均布载荷的简支梁如图 5.7 所示。已知：梁的横截面为矩形，矩形的高度 $h=30\text{mm}$，宽度 $b=20\text{mm}$；梁的跨度 $l=450\text{mm}$；均布载荷集度 $q=10\text{kN/mm}$。试求梁最大弯矩截面上 1、2 两点处的正应力。

解： (1)　确定最大弯矩截面及最大弯矩值。

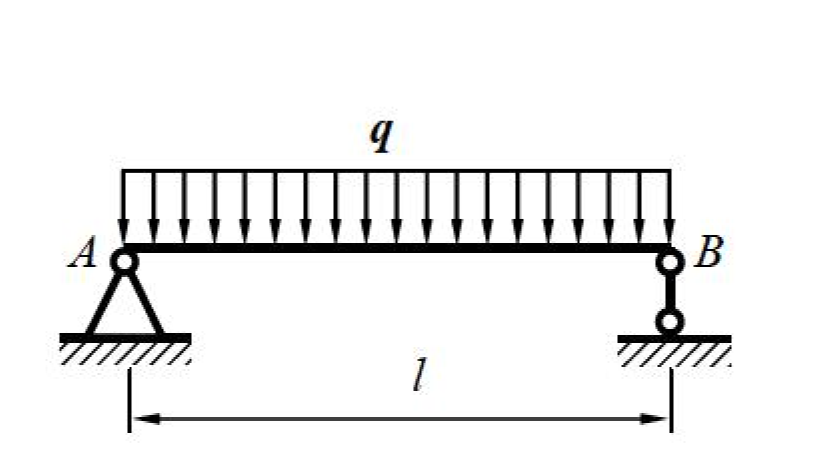
在梁跨中点处横截面上弯矩值最大，其弯矩值为

$$M_{\max}=\frac{ql^2}{8}=\frac{10\times10^3\times(450\times10^{-3})^2}{8}\text{N}\cdot\text{m}=235\text{N}\cdot\text{m}$$

(2)　计算横截面对中性轴的惯性矩。

对于矩形截面，对中性轴 z 的惯性矩为

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{20\times10^{-3}\times(30\times10^{-3})^3}{12}\mathrm{m}^4 = 4.5\times10^{-8}\mathrm{m}^4$$



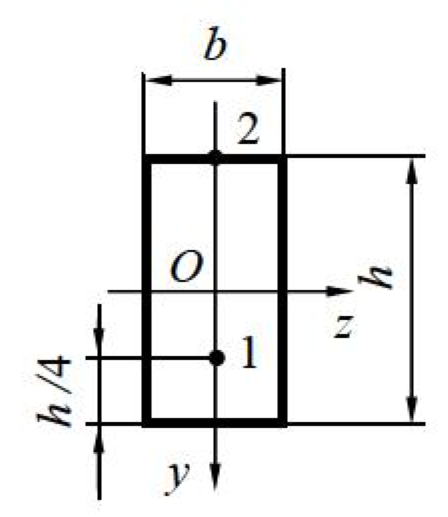


图 5.7

(3) 计算最大弯矩截面上 1、2 两点的正应力。

1、2 两点到中性轴的距离分别为

$$y_1 = h/4 = 30\times10^{-3}\mathrm{m}/4 = 7.5\times10^{-3}\mathrm{m}$$
$$y_2 = h/2 = 30\times10^{-3}\mathrm{m}/2 = 15\times10^{-3}\mathrm{m}$$

因梁受正弯矩，可以确定出 1 点受拉应力，2 点受压应力。由式(5.14)，1、2 两点的正应力分别为

$$\sigma(1) = \frac{M_{\max}y_1}{I_z} = \frac{235\times7.5\times10^{-3}}{4.5\times10^{-8}}\mathrm{Pa} = 42.2\times10^6\mathrm{Pa} = 42.2\mathrm{MPa} \quad (拉)$$

$$\sigma(2) = \frac{M_{\max}y_2}{I_z} = \frac{235\times15\times10^{-3}}{4.5\times10^{-8}}\mathrm{Pa} = 84.3\times10^6\mathrm{Pa} = 84.3\mathrm{MPa} \quad (压)$$

例 5.2 如图 5.8(a)所示 T 形截面的简支梁，在中点作用有集中力 $F = 32\mathrm{kN}$，梁的跨度 $l = 2\mathrm{m}$，T 形截面尺寸见图 5.8(b)。试求最大弯矩截面上的最大拉应力和最大压应力。

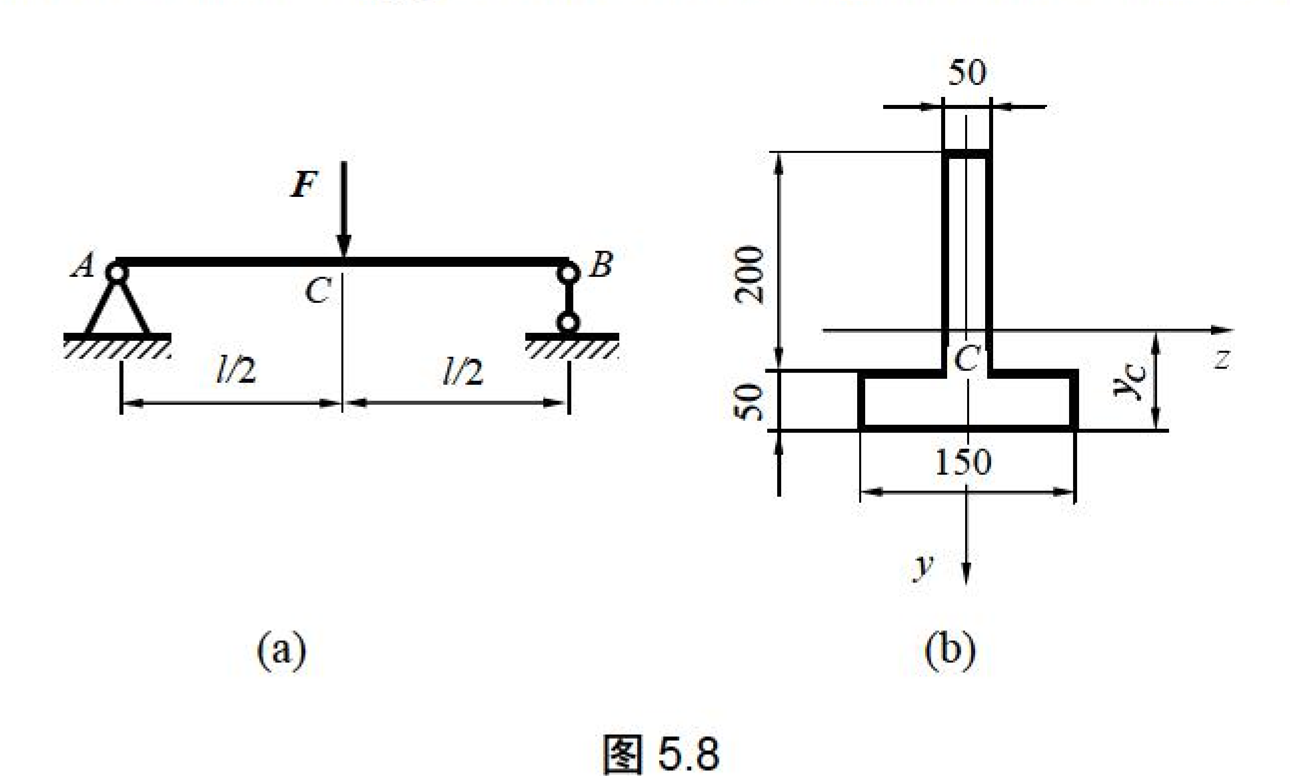


图 5.8

解：(1) 确定最大弯矩截面及最大弯矩值。

在梁跨中点 C 处横截面上弯矩值最大，其弯矩值为

$$M_{\max} = \frac{Fl}{4} = \frac{32\times10^3\times2}{4}\mathrm{N\cdot m} = 16\times10^3\mathrm{N\cdot m}$$

(2) 确定中性轴的位置。

T 形截面只有一根对称轴 y 轴，中性轴必通过截面形心并垂直于 y 轴。根据形心坐标

公式(参见附录 A.1 中式(A.5(a))及图 5.8(b)所示尺寸，中性轴的位置 y_C 为

$$y_C = \frac{150\times 50\times 25 + 50\times 200\times (200/2+50)}{150\times 50 + 50\times 200}\text{mm} = 96.4\text{mm}$$

(3) 计算横截面对中性轴的惯性矩。

根据附录 A.3 中的平行移轴公式(式 A.12(b))，横截面对中性轴的惯性矩 I_z 为

$$I_z = \frac{150\times 50^3}{12}\text{mm}^4 + 150\times 50\times\left(96.4-\frac{50}{2}\right)^2\text{mm}^4 + \frac{50\times 200^3}{12}\text{mm}^4$$

$$+50\times 200\times (150-96.4)^2\text{mm}^4$$

$$=1.02\times 10^8(\text{mm}^4) = 1.02\times 10^{-4}\text{m}^4$$

(4) 确定最大拉应力和最大压应力所在层面至中性轴的距离。

由图 5.8(b)所示截面尺寸，可以确定最大拉应力和最大压应力所在层面至中性轴的距离为

$$y_{\text{c,max}} = (200+50-96.4)\text{mm} = 153.6\text{mm}$$

$$y_{\text{t,max}} = 96.4\text{mm}$$

(5) 计算最大弯矩截面上的最大拉应力和最大压应力。

由式(5.14)可得最大拉应力和最大压应力为

$$\sigma_{\text{t,max}} = \frac{M_{\max} y_{\text{t,max}}}{I_z} = \frac{16\times 10^3\times 96.4\times 10^{-3}}{1.02\times 10^{-4}}\text{Pa} = 15.12\times 10^6\text{Pa} = 15.12\text{MPa}$$

$$\sigma_{\text{c,max}} = \frac{M_{\max} y_{\text{c,max}}}{I_z} = \frac{16\times 10^3\times 153.6\times 10^{-3}}{1.02\times 10^{-4}}\text{Pa} = 24.09\times 10^6\text{Pa} = 24.09\text{MPa}$$

5.2　弯曲时梁横截面上的切应力

梁在横力弯曲时，横截面上同时存在弯曲正应力和弯曲切应力。弯曲正应力已在 5.1 节中研究过，现在来介绍几种常见截面梁的弯曲切应力计算公式。

5.2.1　矩形梁横截面上的切应力

关于矩形截面梁弯曲切应力的分布情况，通常采用以下两条基本假设。

① 横截面上各点处的切应力均平行于侧边，且与该截面上剪力方向一致。

② 切应力沿截面宽度均匀分布，即距中性轴等距离各点处的切应力相等。

弹性力学表明，对于高度大于宽度的矩形截面梁，以上两条假设是足够准确的。在这两条假设的前提下，切应力的研究大为简化，仅通过静力平衡条件即可导出切应力公式。

如图 5.9(a)所示，一宽度为 b、高度为 h 且 $h > b$ 的矩形截面梁，在梁的纵向对称面内承受任意载荷作用而使梁发生横力弯曲。首先用相距 dx 的两个横截面 m—m 和 n—n 从梁中截取一微段。该微段左、右侧横截面上分别作用有内力 M、M+dM、F_s，其正应力和切应力如图 5.9(b)所示，正应力的分布规律已经知道，但切应力的分布规律尚不得而知。为求得距中性层距离为 y 处横截面上的切应力 τ ，在该处假设用纵截面 efe_1f_1 将微段的下

部切出(见图 5.9(b))。由切应力互等定理可知，纵截面 efe_1f_1 上存在切应力 τ'，且 $\tau=\tau'$。因此，若能确定 τ'，则 τ 也随之确定。

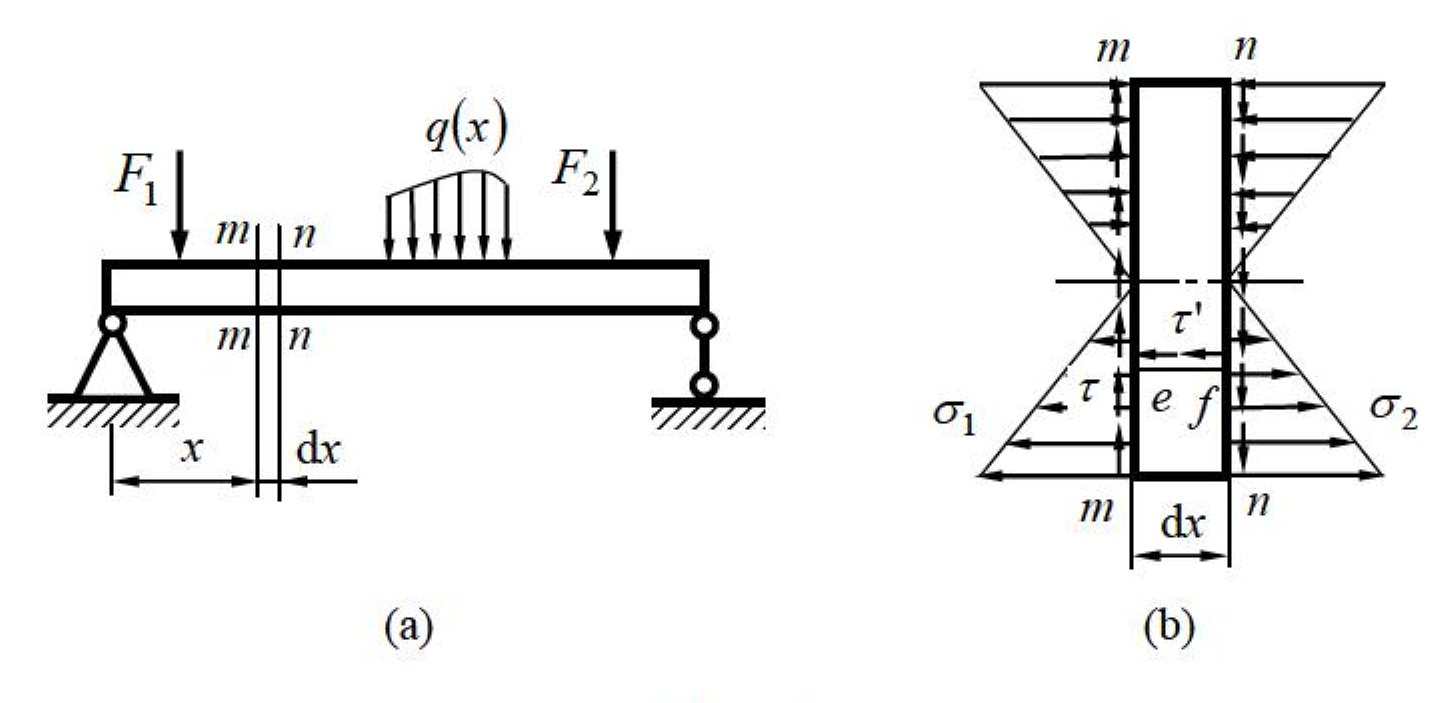


图 5.9

如图 5.10(a)所示，设微段梁下部横截面面积 A^*，其左、右侧面横截面上分别作用有无数个微内力 $\sigma_1 \mathrm{d}A$、$\sigma_2 \mathrm{d}A$，纵截面 efe_1f_1 上作用有无数个微内力 $\tau'\mathrm{d}A$，构成了一个 x 方向的平行力系。力系可简化为 3 个合力，即 F_{N1}^*、F_{N2}^*、$\mathrm{d}F_{\mathrm{s}}'$，其大小分别为

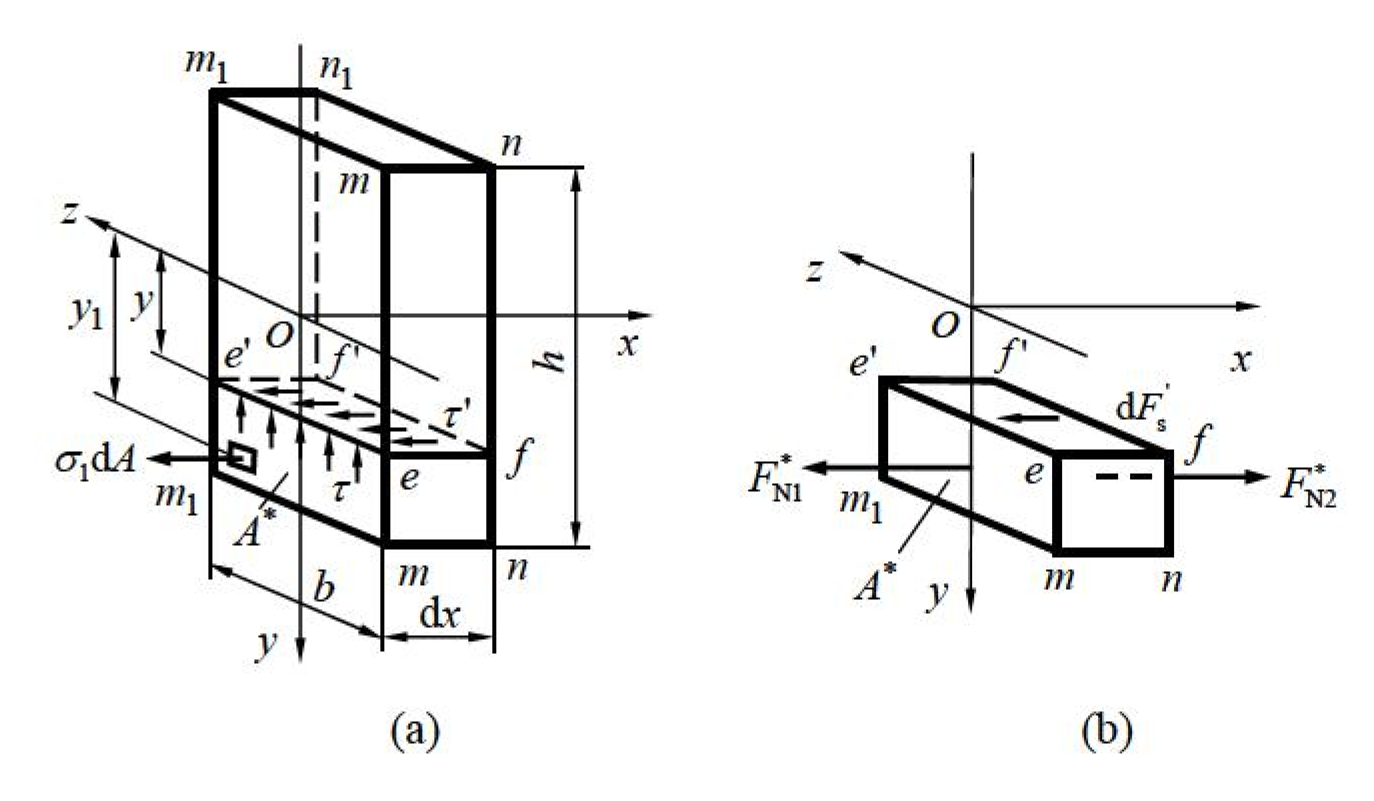


图 5.10

$$F_{\mathrm{N1}}^* = \int_{A^*} \sigma_1 \mathrm{d}A = \int_{A^*} \frac{M y_1}{I_z} \mathrm{d}A = \frac{M}{I_z} \int_{A^*} y_1 \mathrm{d}A = \frac{M}{I_z} S_z^*$$

$$F_{\mathrm{N2}}^* = \int_{A^*} \sigma_2 \mathrm{d}A = \int_{A^*} \frac{(M+\mathrm{d}M) y_1}{I_z} \mathrm{d}A = \frac{(M+\mathrm{d}M)}{I_z} \int_{A^*} y_1 \mathrm{d}A = \frac{(M+\mathrm{d}M)}{I_z} S_z^*$$

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{s}}' = \tau' b \mathrm{d}x = \tau b \mathrm{d}x$$

将上述三式代入平衡方程，即

$$\sum F_x = 0,\quad F_{\mathrm{N1}}^* - F_{\mathrm{N2}}^* + \mathrm{d}F_{\mathrm{s}}' = 0$$

经整理后得

$$\tau = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{S_z^*}{I_z b}$$

由弯矩与剪力的微分关系 $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} = F_{\mathrm{s}}$，上式为

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z b} \tag{5.17}$$

式中，F_s 为横截面上的剪力；I_z 为横截面对中性轴的惯性矩；b 为矩形截面的宽度；S_z^* 为横截面上距中性轴为 y 的横线以外部分的面积对中性轴的静矩。式(5.17)即为矩形截面梁的弯曲切应力计算公式。

式(5.17)中的 F_s、I_z 和 b 对某一横截面而言均为常量，因此横截面上的切应力 τ 的变化规律由 S_z^* 确定性，而 S_z^* 的大小与坐标 y 有关，所以 τ 随坐标 y 而变化。如图 5.11(a)所示，取微面积 $\mathrm{d}A = b \cdot \mathrm{d}y$，静矩为

$$S_z^* = \int_{A^*} y_1 \mathrm{d}A = \int_y^{\frac{h}{2}} y_1 b \mathrm{d}y_1 = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

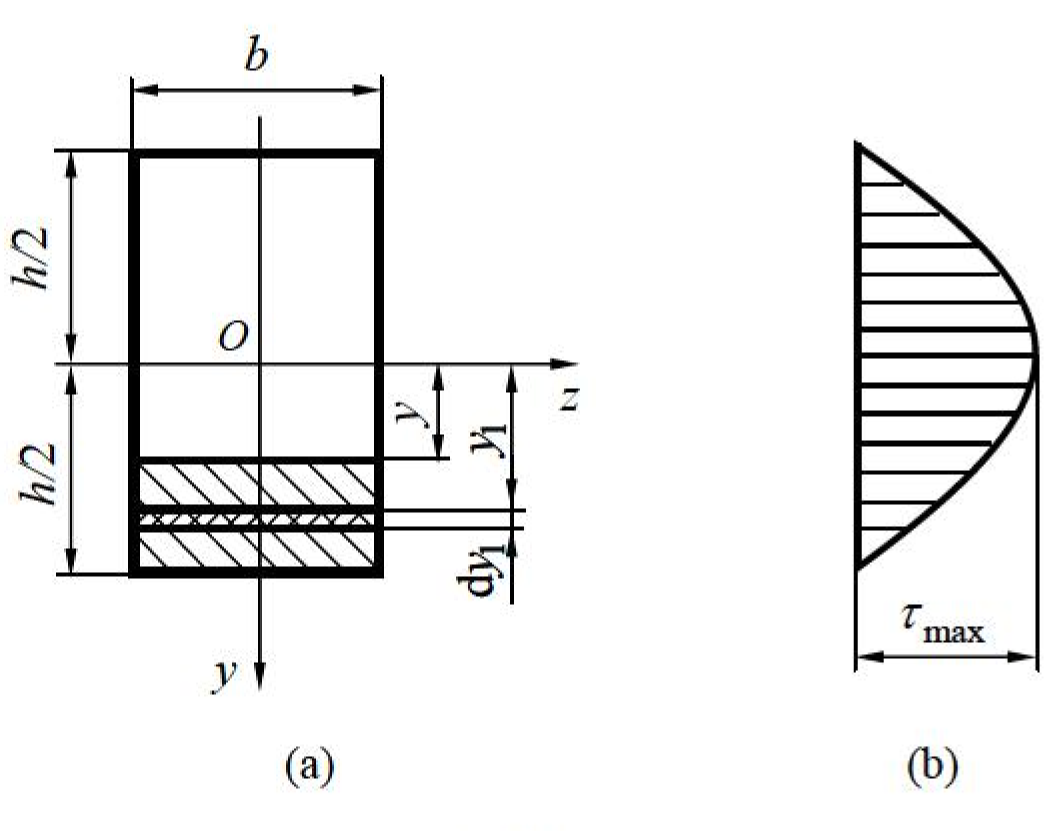


图 5.11

S_z^* 也可按附录 A.1 中式(A.3)计算，即 S_z^* 等于横线以外部分面积与该面积形心至中性轴距离的乘积。S_z^* 为

$$S_z^* = \left[b\left(\frac{h}{2} - y\right)\right] \cdot \left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right] = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

将静矩 S_z^* 计算式代入式(5.17)，矩形截面梁的弯曲切应力计算公式可写成

$$\tau = \frac{F_s}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \tag{5.18}$$

从式(5.18)中可以看出，切应力 τ 沿截面高度按二次抛物线规律变化，如图 5.11(b)所示。当 $y = \pm h/2$ 时，$\tau = 0$，这表明截面上、下缘各点处的切应力等于零；当 $y = 0$ 时，切应力为最大值 $\tau_{\max}$，即最大切应力在中性轴上，$\tau_{\max}$ 为

$$\tau_{\max} = \frac{F_s h^2}{8I_z}$$

将 $I_z = \dfrac{bh^3}{12}$ 代入上式，可得

$$\tau_{max} = \frac{3F_s}{2bh} = \frac{3F_s}{2A} \tag{5.19}$$

式中，A 为矩形截面面积。可见，矩形截面梁的最大切应力为平均切应力 F_s/A 的 1.5 倍。

5.2.2 工字形截面梁

工字形截面是由上、下翼缘及中间腹板组成的，腹板和翼缘上均存在着切应力。

1. 腹板上的切应力

由于腹板是狭长矩形，完全可以采用前述关于矩形截面梁的两条假设。于是可以从式(5.17)直接求得

$$\tau = \frac{F_s S_z^*}{I_z d} \tag{5.20}$$

式中，F_s 为截面上的剪力；d 为腹板厚度；I_z 为工字形截面对中性轴 z 的惯性矩；S_z^* 为距中性轴 z 距离为 y 的横线以外部分的横截面面积 A^* (即图 5.12(a)中的阴影线面积)对中性轴 z 的静矩。对于轧制工字钢截面，式(5.20)中的 $I_z/S_{z,max}^*$ 可从型钢表中直接查得。

切应力沿腹板高度的分布规律如图 5.12(a)所示，仍是按抛物线规律分布，最大切应力 τ_{max} 仍发生在截面的中性轴上，但最大切应力与最小切应力相差不大。

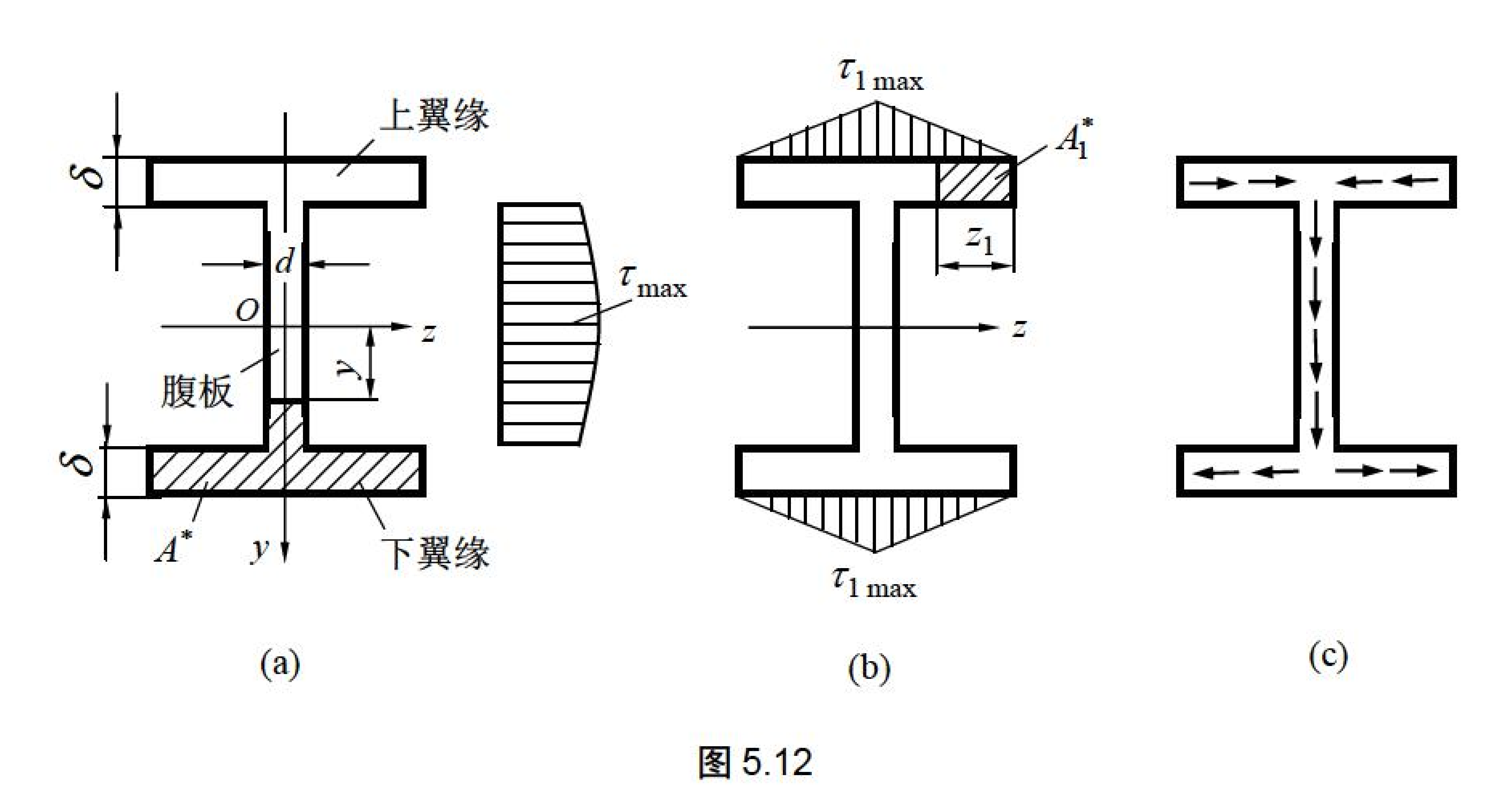


图 5.12

2. 翼缘上的切应力

翼缘上切应力情况比较复杂，既存在竖向切应力又存在水平切应力。

竖向切应力很小(远小于腹板上的切应力)，分布情况又很复杂，故一般不予考虑。

水平切应力通常假定沿翼缘厚度 δ 均匀分布，于是可经过与矩形截面梁切应力公式相似的推导过程得到

$$\tau_1 = \frac{F_s S_z^*}{I_z \delta} \tag{5.21}$$

式中，F_s 为横截面上的剪力；δ 为翼缘的厚度；I_z 为横截面对中性轴 z 的惯性矩；S_z^* 为翼

缘上欲求应力点到翼缘边缘间的面积 A_1^* (即图 5.12(b)中画阴影线的面积)对中性轴 z 的静矩。显然，S_z^* 是翼缘上点的位置坐标 z_1 的线性函数，所以 τ_1 沿翼缘长度方向呈线性分布，如图 5.12(b)所示。其最大值 $\tau_{\max}$ 也比腹板上的最小切应力小得多，所以在一般情况下可不必计算。至于水平切应力的方向，当横截面上剪力 F_s 方向竖直向下时，工字形截面腹板和翼缘上切应力方向如图 5.12(c)所示，它们组成“切应力流”。

5.2.3　其他形状截面梁

1. 槽形截面梁

槽形截面梁腹板和翼缘上切应力的计算公式与工字形截面梁腹板和翼缘上的切应力计算公式相同。“切应力流”如图 5.13(a)所示(设横截面上剪力 F_s 方向竖直向下)。最大切应力仍发生在截面的中性轴上。

2. T 形截面梁

T 形截面可视为由两个狭长矩形组成，下面的狭长矩形与工字形截面的腹板相似，该部分上的切应力仍用式(5.20)计算。“切应力流”如图 5.13(b)所示。最大切应力仍发生在截面的中性轴上。

3. 圆形及薄壁环形截面梁

圆形与薄壁环形截面的最大竖向切应力也都发生在截面的中性轴上，并且沿中性轴均匀分布，其值也可按式(5.17)计算，最终计算结果分别为

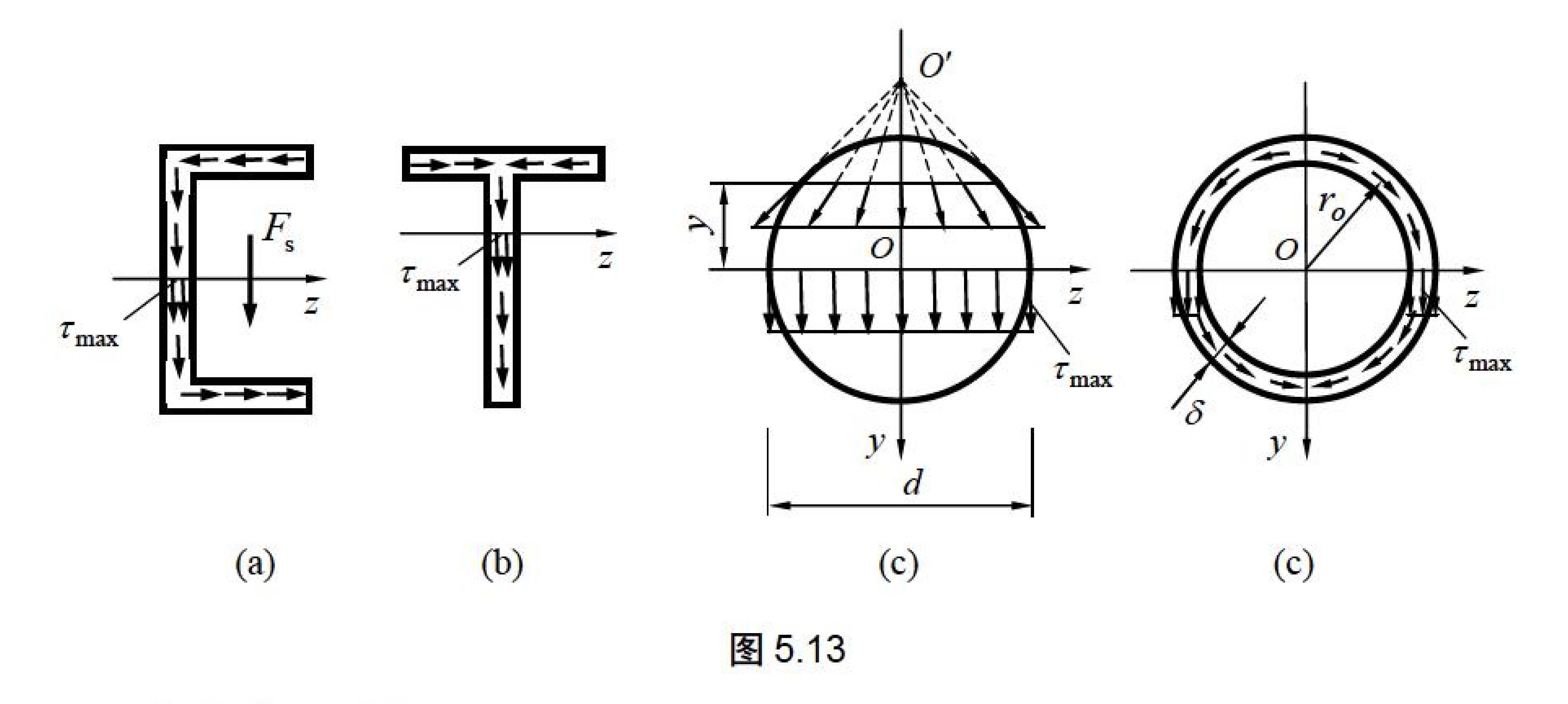


图 5.13

对于，圆形截面，有

$$S^*_{z\max}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi d^2}{4}\right)\times\frac{2d}{3\pi}=\frac{d^3}{12}$$

$$\tau_{\max}=\frac{F_s S^*_{z\max}}{I_z b}=\frac{F_s d^3/12}{(\pi d^4/64)d}=\frac{3}{4}\times\frac{F_s}{A_1} \tag{5.22}$$

对于薄壁环形截面($r_o >> \delta$)，有

$$\tau_{max} = 2\frac{F_s}{A_2} \tag{5.23}$$

式中，F_s为横截面上的剪力；A_1、A_2分别为圆形截面和薄壁环形截面的面积。圆形截面和薄壁环形截面“切应力流”分别如图 5.13(c)、(d)所示。

5.3 梁的强度条件

当梁的横截面上同时存在弯矩和剪力时，其上既有正应力也有切应力。进一步分析可知，通常横截面上最大正应力处，切应力等于零，最大弯曲正应力可视为单向拉(压)应力；而横截面上最大切应力处(中性轴上各点)，正应力等于零，最大弯曲切应力可视为纯剪切应力。因此，可参照拉(压)正应力强度条件和扭转切应力强度条件分别建立梁的强度条件。

5.3.1 弯曲正应力强度条件

梁的最大弯曲正应力σ_{max}不得超过材料的许用弯曲正应力$[\sigma]$，弯曲正应力强度条件为

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \leqslant [\sigma] \tag{5.24}$$

式(5.24)可用来校核梁的强度，确定梁的截面尺寸或梁的许可载荷。

对抗拉和抗压强度相等的材料(如碳钢)，只要绝对值最大的正应力不超过材料的许用弯曲正应力(略大于许用拉应力)，梁的强度就足够。而对于抗拉和抗压强度不相等的材料(如铸铁)，则要求梁的最大拉应力和最大压应力分别不超过材料的许用拉应力和许用压应力，即

$$\sigma_{t,max} \leqslant [\sigma_t]\ , \qquad \sigma_{c,max} \leqslant [\sigma_c]$$

例 5.3 槽形截面铸铁梁的载荷及尺寸如图 5.14(a)所示。已知梁的截面形心位置，$I_z = 5943\times10^{-8}\text{m}^4$，铸铁的许用拉应力$[\sigma_t]=30\text{MPa}$，许用压应力$[\sigma_c]=90\text{MPa}$。试校核梁的强度。

解：(1) 绘弯矩图，确定危险截面。

弯矩图如图 5.14(b)所示，最大正弯矩在截面 C 上，有

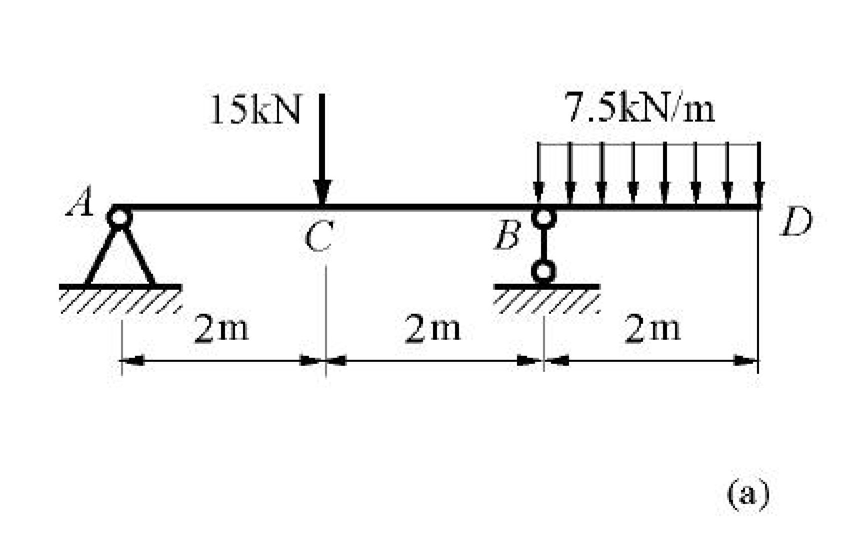
$$M_C = 7.5\text{kN}\cdot\text{m}$$

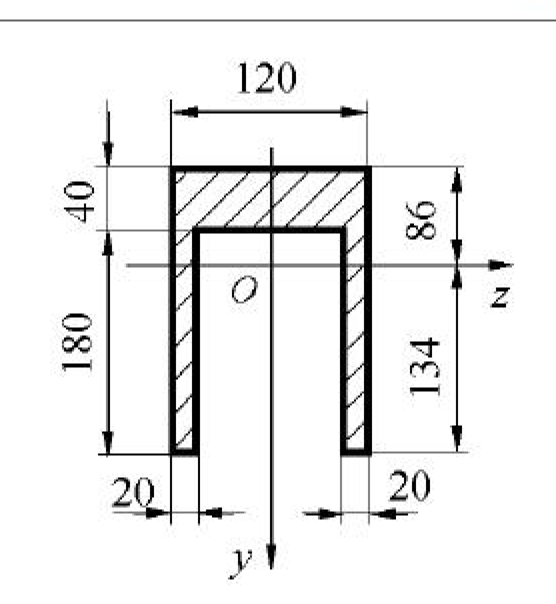
最大负弯矩在截面 B 上，有

$$M_B = 15\text{kN}\cdot\text{m}$$

(2) 判断危险点。

对于最大正弯矩的截面 C，最大拉应力大于最大压应力，梁的强度由最大拉应力控制。最大负弯矩在截面 B，最大压应力大于最大拉应力，其比值为 86∶134，而许用拉应力和许用压应力的比值为 1∶3，故梁的强度仍由最大拉应力控制。危险点在截面 C 的底层和截面 B 的顶层。





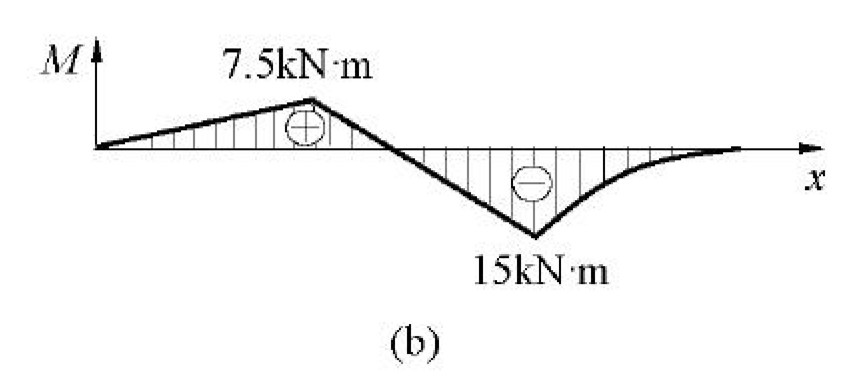


图 5.14

(3) 强度校核。

对于截面 C，有

$$\sigma_{\mathrm{t,max}}=\frac{M_C y_1}{I_z}=\frac{7.5\times10^3\times134\times10^{-3}}{5943\times10^{-8}}\mathrm{Pa}=16.9\times10^6\mathrm{Pa}=16.9\mathrm{MPa}\leqslant[\sigma_{\mathrm{t}}]$$

对于截面 B，有

$$\sigma_{\mathrm{t,max}}=\frac{M_B y_1}{I_z}=\frac{15\times10^3\times86\times10^{-3}}{5943\times10^{-8}}\mathrm{Pa}=21.7\times10^6\mathrm{Pa}=21.7\mathrm{MPa}\leqslant[\sigma_{\mathrm{t}}]$$

可见，梁满足强度条件。

例 5.4　螺栓压板夹紧装置如图 5.15(a)所示。已知板长 $3a=150\mathrm{mm}$，压板材料的弯曲许用应力 $[\sigma]=140\mathrm{MPa}$。试计算压板传给工件的最大允许压紧力 F。

解：(1) 绘制力学简图和弯矩图。

压板可简化为图 5.15(b)所示的外伸梁。弯矩图如图 5.15(c)所示，最大弯矩为

$$M_{\max}=M_B=Fa$$

(2) 确定危险截面并计算弯曲截面系数。

压板夹紧装置中最大弯矩出现在截面 B，且截面 B 的惯性矩最小，是最危险截面。其惯性矩和弯曲截面系数为

$$I_z=\frac{30\times10^{-3}\times(20\times10^{-3})^3}{12}-\frac{14\times10^{-3}\times(20\times10^{-3})^3}{12}\mathrm{m}^4=1.07\times10^{-8}\mathrm{m}^4$$

$$W_z=\frac{I_z}{y_{\max}}=\frac{1.07\times10^{-8}}{10\times10^{-3}}\mathrm{m}^3=1.07\times10^{-6}\mathrm{m}^3$$

(3) 由弯曲正应力强度条件确定最大允许压紧力 F。

由式(5.24)有

$$M_{\max}\leqslant W_z[\sigma]$$

于是有

$$Fa\leqslant W_z[\sigma]$$

$$F \leqslant \frac{W_z[\sigma]}{a} = \frac{1.07 \times 10^{-6} \times 140 \times 10^{6}}{50 \times 10^{-3}} \text{N} = 3 \times 10^{3} \text{N} = 3\text{kN}$$

压板传给工件的最大允许压紧力为 3kN。

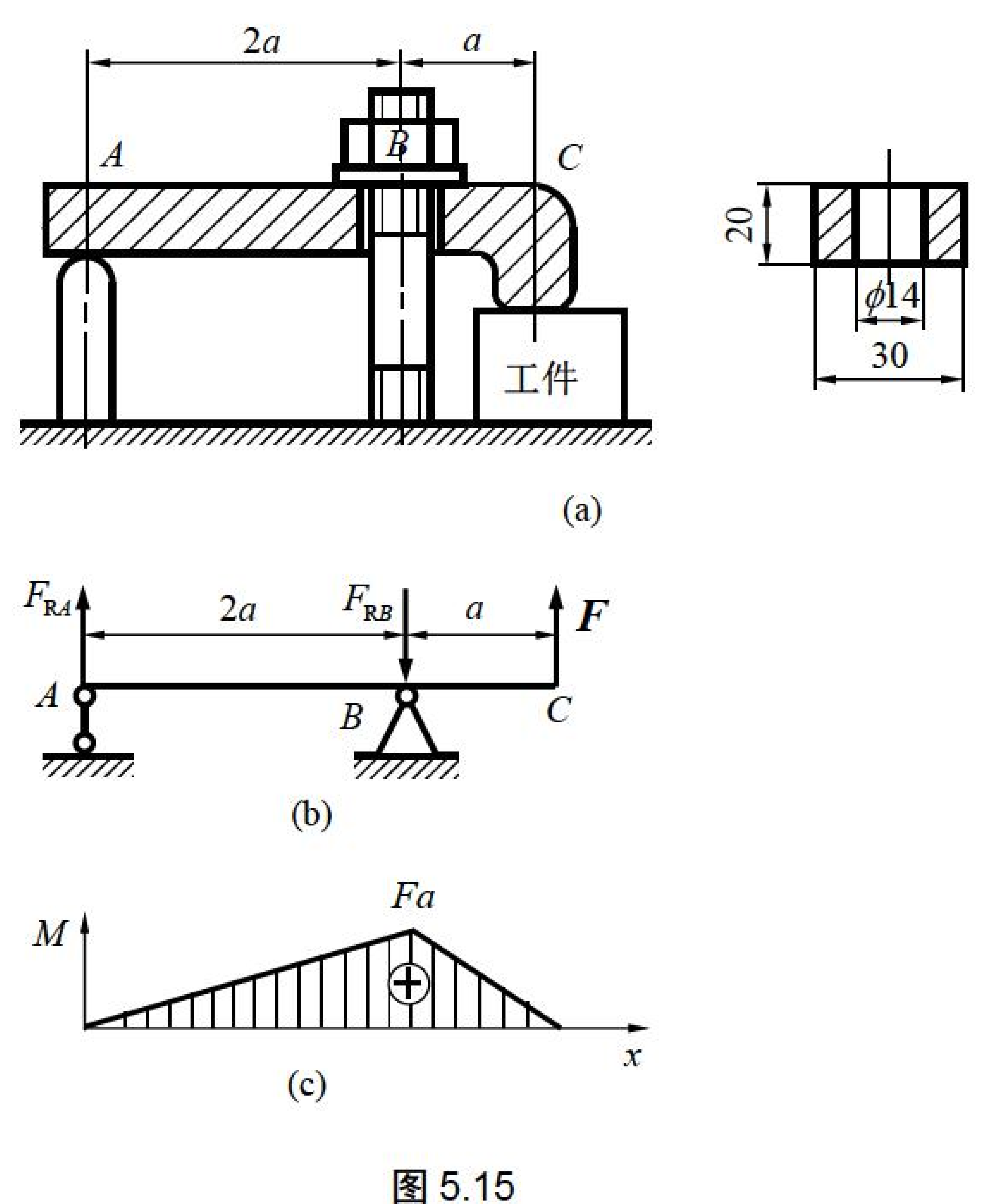


图 5.15

5.3.2 弯曲切应力强度条件

梁的最大切应力 $\tau_{\max}$ 不得超过材料的许用切应力$[\tau]$，弯曲切应力强度条件为

$$\tau_{\max} = \frac{F_{\mathrm{s}\max} S_{z\max}^{*}}{I_z b} \leqslant [\tau] \tag{5.25}$$

梁在载荷的作用下，须同时满足正应力强度条件和切应力强度条件。但对于常见的细长梁(梁跨度 l 与高度 h 之比大于 5)，在一般受力情况下，切应力远小于正应力，梁在满足弯曲正应力强度条件下，切应力强度条件通常都能满足。因此，细长梁的强度大多由正应力控制，不需再按切应力强度条件进行强度校核。只有在下述一些情况下，要进行梁的弯曲切应力强度校核。

(1) 梁的最大弯矩较小，而最大剪力却较大。如梁的跨度不大，而横力载荷较大；有较大的载荷作用在支座附近。

(2) 一些焊接工字梁(非型钢)中，如果腹板设计太薄而高度较大，其宽高比例小于工字型钢的比值时，要对腹板进行切应力强度校核。

(3) 在梁的不同方向上，许用切应力$[\tau]$值相差较大。例如，木材、竹材等各向异性材料的梁，弯曲时可能由于中性层抗剪能力差而导致沿中性层破坏；一些由多层材料经焊接、铆接或铰接而成的梁，接合面上的许用切应力比材料本身的许用切应力小得多。

在上述情况下进行梁的强度校核时，也是先按正应力强度条件进行计算，再按切应力

强度条件进行校核。

例 5.5　简支梁 AB 如图 5.16(a)所示。$l=2\text{m}$，$a=0.2\text{m}$；梁上载荷 $F=200\text{kN}$，$q=10\text{kN/m}$；材料的许用正应力 $[\sigma]=150\text{MPa}$，许用切应力 $[\tau]=100\text{MPa}$。试选择适用的工字钢型号。

解：(1)　计算支座反力。

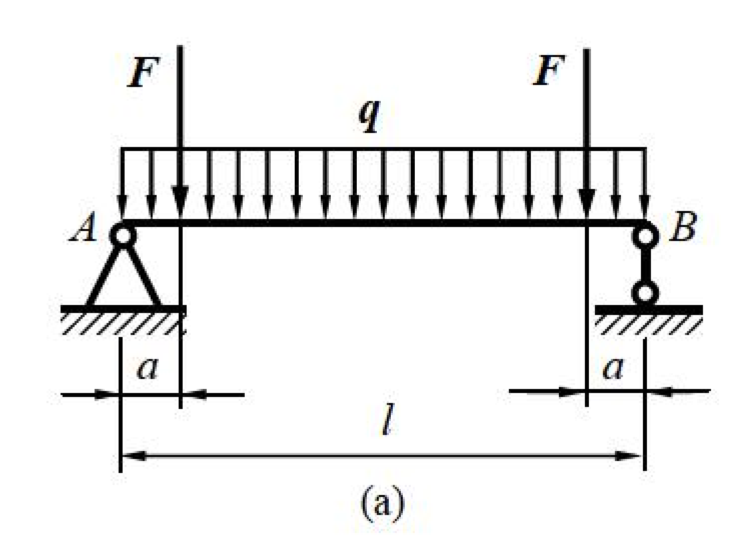
$$F_{RA}=F_{RB}=F+ql/2=200+10\times2/2=210(\text{kN})$$

(2)　绘制剪力图和弯矩图，确定最大剪力和最大弯矩。

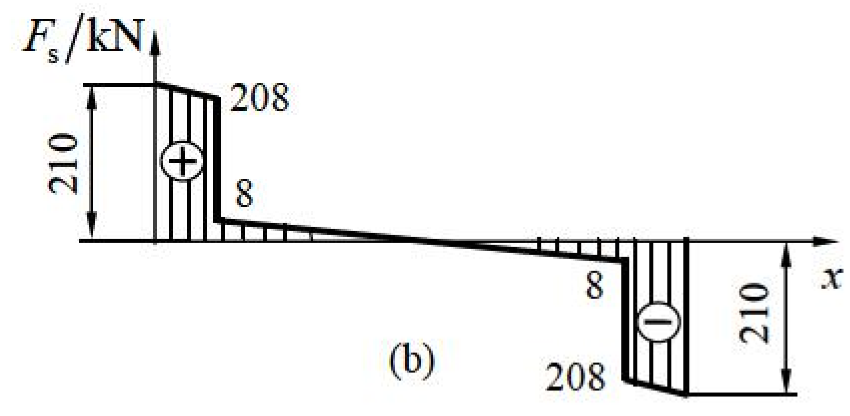
剪力图如图 5.16(b)所示，弯矩图如图 5.16(c)所示。由图可知

$$F_{s\max}=210\text{kN}$$

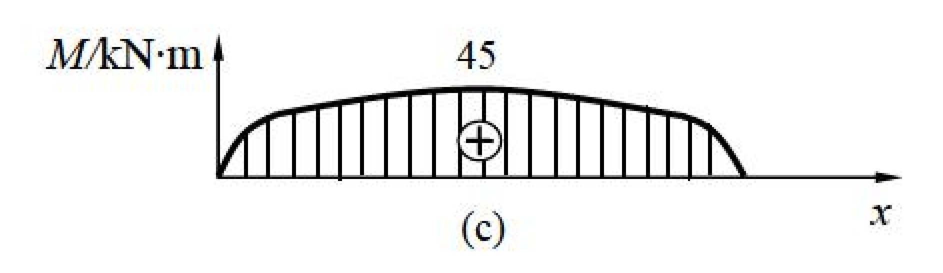
$$M_{\max}=45\text{kN}\cdot\text{m}$$



(a)



(b)



(c)

图 5.16

(3)　按正应力强度条件选择工字钢型号。

由式(5.24)有

$$W_z\geqslant\frac{M_{\max}}{[\sigma]}=\frac{45\times10^3}{150\times10^6}\text{m}^3=281\times10^{-6}\text{m}^3=281\text{cm}^3$$

查型钢表，选用 22a 工字钢，其 $W_z=309\text{cm}^3$。

(4)　按切应力强度条件进行校核。

由型钢表查得 22a 工字钢中 $\dfrac{I_z}{S^*_{z\max}}=18.9\text{cm}$，腹板宽度 $d=7.5\text{mm}$。由式(5.25)有

$$\tau_{\max}=\frac{F_{s\max}S^*_{z\max}}{I_z d}=\frac{210\times10^3}{18.9\times10^{-2}\times7.5\times10^{-3}}\text{Pa}=148\times10^6\text{Pa}$$
$$=148\text{MPa}>[\tau]=100\text{MPa}$$

$\tau_{\max}$超过$[\tau]$很多，应重新选择更大截面的工字钢，试选 25b 工字钢，由型钢表查得

$$\frac{I_z}{S_{z\max}^*}=21.3\text{cm}，\ d=10\text{mm}$$

再次进行切应力强度校核，有

$$\tau_{\max}=\frac{F_{\text{s}\max}S_{z\max}^*}{I_z d}=\frac{210\times10^3}{21.3\times10^{-2}\times10\times10^{-3}}\text{Pa}=98.6\times10^6\text{Pa}=98.6\text{MPa}<[\tau]$$

因此，要同时满足正应力强度条件和切应力强度条件，应选用 25b 工字钢。

5.4 提高弯曲强度的措施

一般情况下，梁的强度是由弯曲正应力控制的，所以弯曲正应力强度条件为

$$\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}\leqslant[\sigma]$$

这往往是设计梁的主要依据。从这个条件可以看出，减小最大弯矩、增大弯曲截面系数，或局部加强弯矩较大的梁段，能降低梁的最大正应力，从而提高梁的承载能力，实现既经济又安全的合理设计。

5.4.1 减小最大弯矩值

1. 合理配置载荷

合理配置载荷，可以降低梁的最大弯矩值。

图 5.17 所示的 3 根简支梁，承受相同量的载荷，因载荷的作用方式不同，最大弯矩值也不相同。由此可知，载荷相同的情况下，分散载荷比集中载荷产生的最大弯矩值要小。

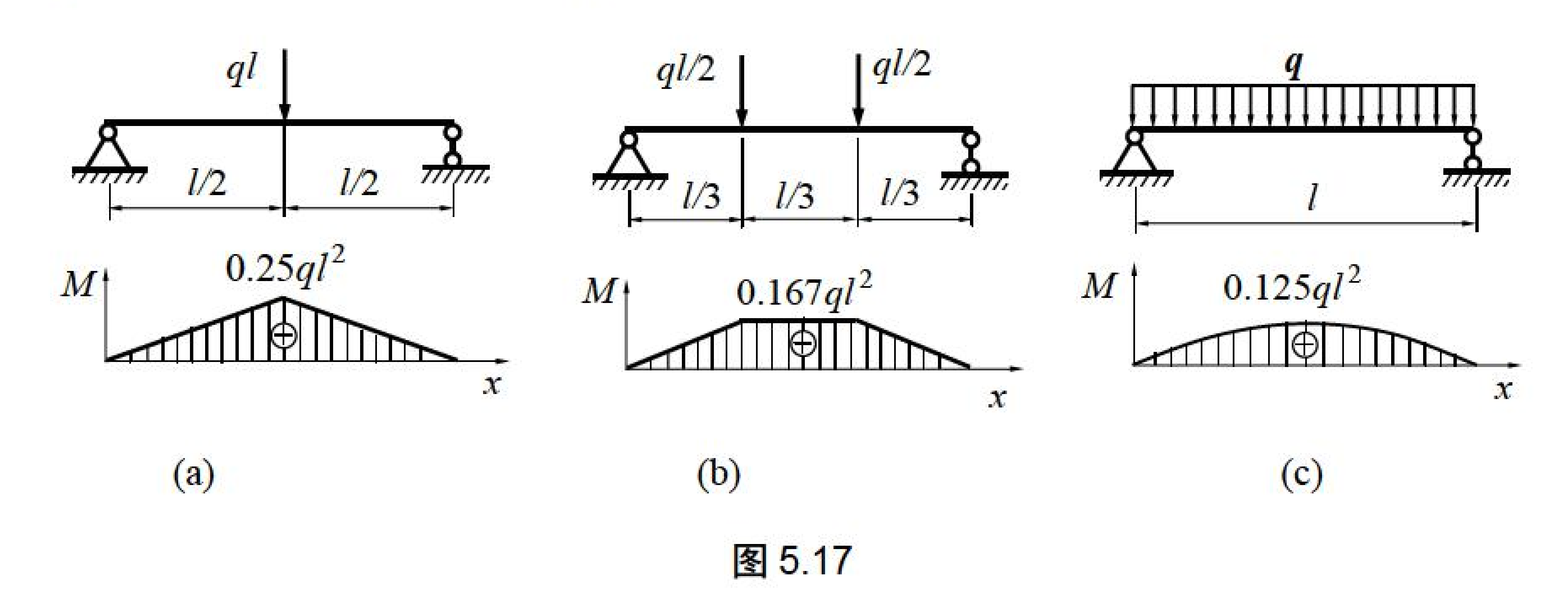
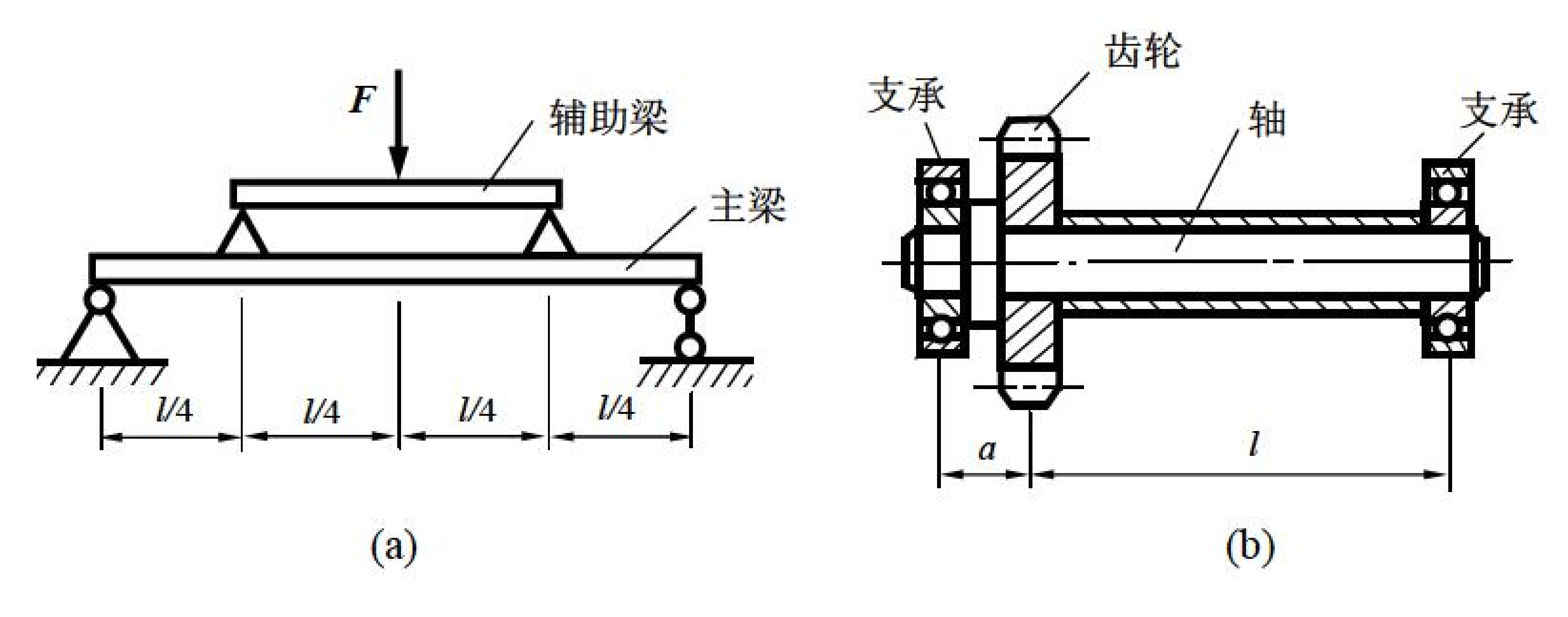


图 5.17

工程实际中，常常通过合理布置载荷达到减小最大弯矩的目的。如在主梁上增加辅助梁(见图 5.18(a))，可减小最大弯矩。图 5.18(b)所示的齿轮轴，让齿轮尽可能靠近支座，所产生的最大弯矩比齿轮放置在中间要小得多。

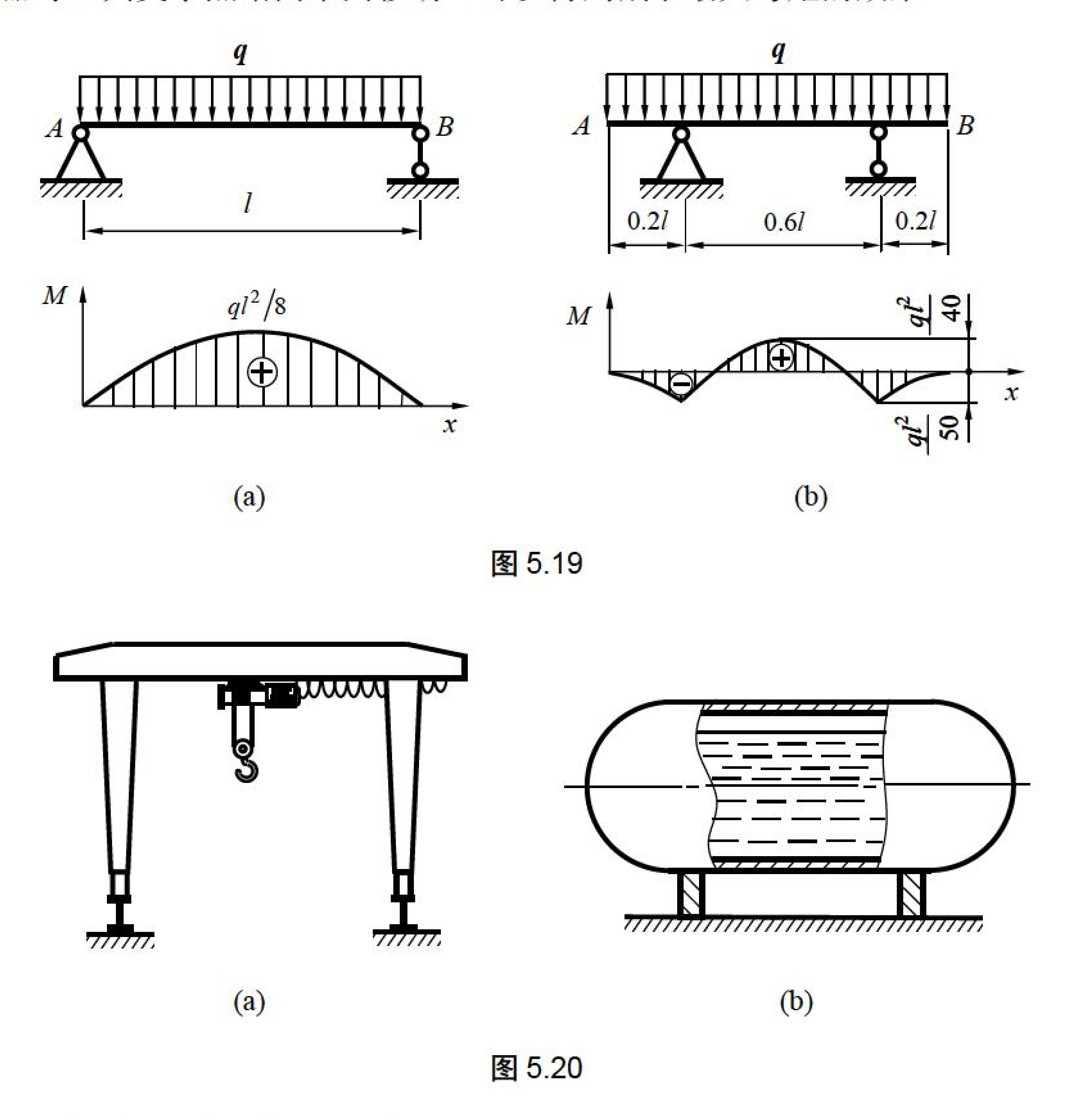


(a)　　(b)

图 5.18

2. 合理安置支座

合理设置支座的位置，也可以降低梁内的最大弯矩值。例如，如图 5.19(a)所示的梁，若将其支座各向内移动 $0.2l$，如图 5.19(b)所示，则后者的最大弯矩值仅为前者的 1/5，所以，后者支座安置较为合理。如图 5.20(a)所示的龙门式起重机的大梁、如图 5.20(b)所示的圆筒形容器等，其支承点略向中间移动，可以得到减小最大弯矩的效果。



(a)　　(b)

图 5.19

(a)　　(b)

图 5.20

5.4.2　选择合理的截面形状

增大弯曲截面系数可提高梁的强度，弯曲截面系数 W_z 的大小与截面面积和形状有关。

分析截面形状的合理性，就要在截面面积相同的条件下，比较不同形状截面的 W_z 值。从强度方面考虑，W_z 值越大的截面越经济合理。

下面是几种常见形状截面在截面面积相同时的 W_z 值，设矩形截面尺寸 $h:b=3:2$。

从表 5.1 中可以看到，截面面积相同时，矩形比方形好，方形比圆形好，矩形截面横向放置时 W_z 值最小。因此，大多数梁的截面形状采用矩形且竖向放置。

表 5.1　几种常见形状截面在相同截面面积下的 W_z 值

截面形状	h, b, z	a, z	d, z	b, h, z
截面面积	$A=hb=\frac{2}{3}h^2$	$A=a^2=\frac{2}{3}h^2$	$A=\frac{\pi d^2}{4}=\frac{2}{3}h^2$	$A=hb=\frac{2}{3}h^2$
截面尺寸	$b=\frac{2}{3}h$	$a=\sqrt{\frac{2}{3}}h$	$d=\sqrt{\frac{8}{3\pi}}h$	$b=\frac{2}{3}h$
W_z 计算式	$W_z=\frac{bh^2}{6}$	$W_z=\frac{a^3}{6}$	$W_z=\frac{\pi d^3}{32}$	$W_z=\frac{hb^2}{6}$
W_z 值	$0.111h^3$	$0.091h^3$	$0.077h^3$	$0.074h^3$

可进一步分析相同截面面积下不同截面形状的 W_z 值不同的原因。由于梁受弯曲时，横截面上的应力沿高度方向线性分布，离中性轴越远的点上应力值越大，离中性轴越近的点上应力值越小，这样，梁横截面中性轴附近的材料没有充分发挥作用。因此，为了充分利用好这部分材料性能，在不破坏截面整体性的前提下，可以将横截面中性轴附近的材料移到离中性轴较远的位置，从而形成“合理截面”。

图 5.21 所示的矩形梁在不增大截面积的情况下变成工字梁，其 W_z 值进一步增大。工程中常将受弯曲构件的横截面进行合理设计，如工字梁、桥梁中的箱梁(见图 5.22(a))、飞机机翼的翼梁(见图 5.22(b))等。

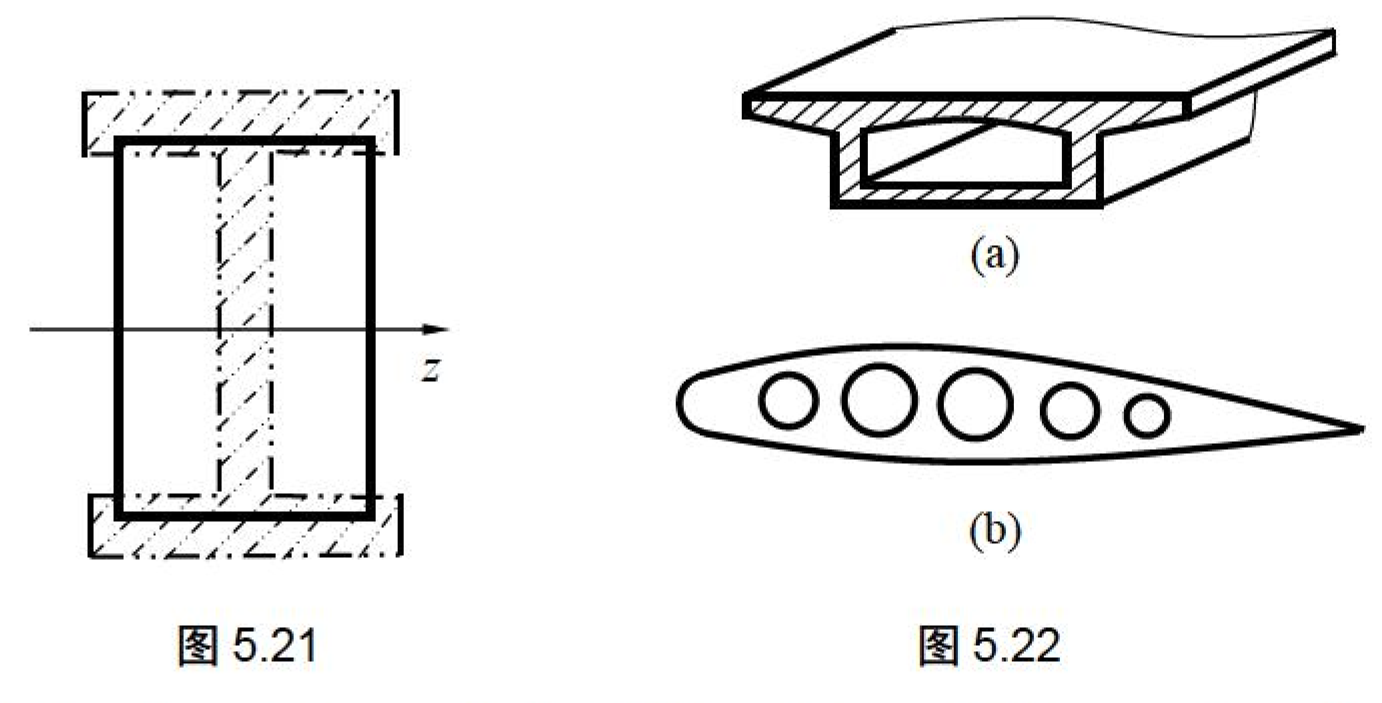


图 5.21　　图 5.22

在选择合理截面时，还应考虑材料的特性。对于抗拉强度低于抗压强度的脆性材料(如铸铁)，宜采用偏于受拉一侧截面的形状，如图 5.23 所示的一些截面。

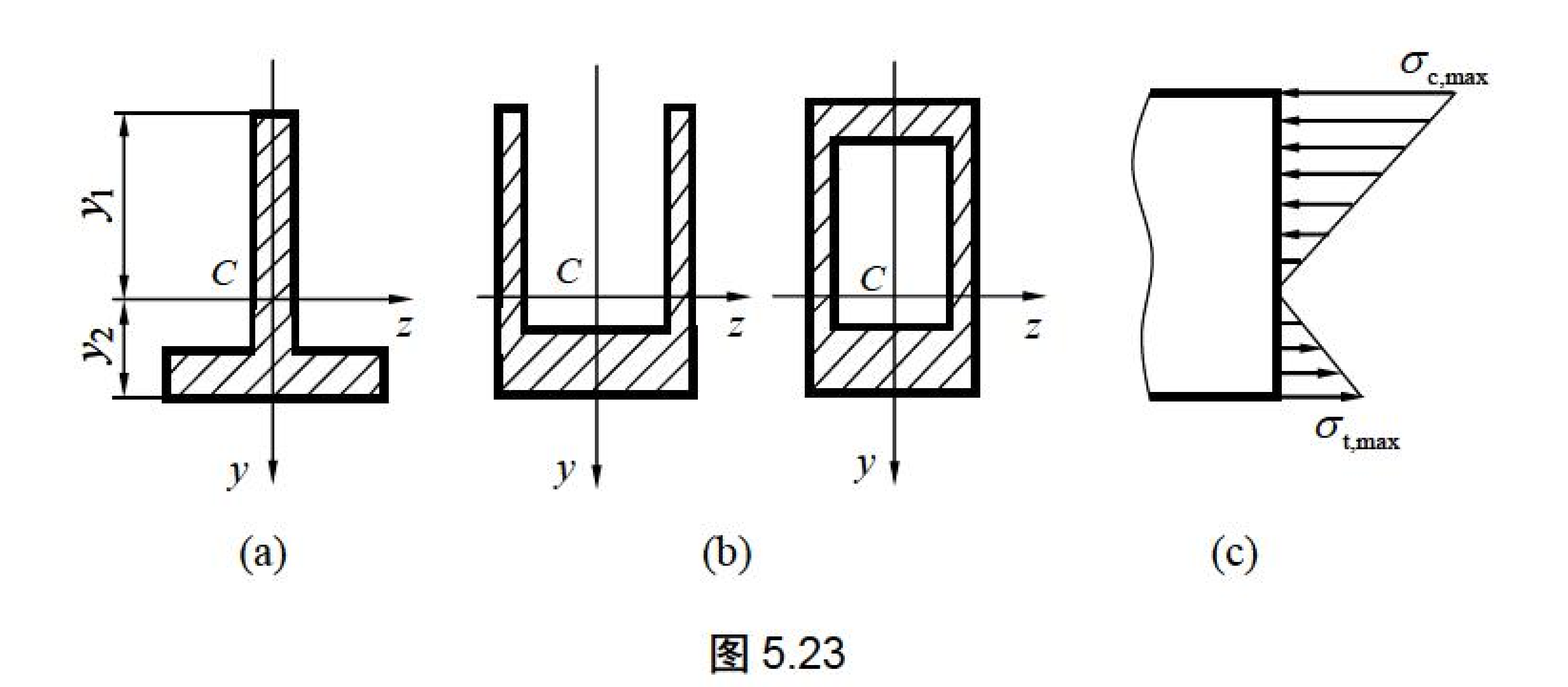


图 5.23

5.4.3　采用变截面梁或等强度梁

在进行梁的强度计算时，是根据危险截面上最大弯矩设计截面的。一般情况下，其他截面上的弯矩都小于最大弯矩，如果采用等截面梁，对于弯矩较小的地方，材料没有充分发挥作用。因此，在弯矩较大的地方采用较大的截面，在弯矩较小的地方采用较小的截面，这种横截面沿梁的轴线变化的梁称为变截面梁。例如，图 5.24(a)中的摇臂钻床采用了变截面悬臂梁，图 5.24(b)中传动轴通常做成阶梯形状的变截面梁。

最理想的变截面梁，是使梁的各个截面上的最大正应力都相等且等于材料的许用应力，这种梁称为等强度梁。设梁在任一截面上的弯矩为$M(x)$，该截面上的弯曲截面系数为$W(x)$。由等强度梁的要求有

$$\sigma_{\max}=\frac{M(x)}{W(x)}=[\sigma]$$

上式可写成

$$W(x)=\frac{M(x)}{[\sigma]} \tag{5.26}$$

式(5.26)为等强度梁各截面的弯曲截面系数$W(x)$沿梁轴线的变化规律。

现以图 5.25(a)所示的矩形截面悬臂梁受集中力 F 为例，说明等强度的设计方法。设梁的截面高度不变，而宽度 b 为 x 的函数，即

$$b=b(x)\ (0\leqslant x\leqslant l)$$

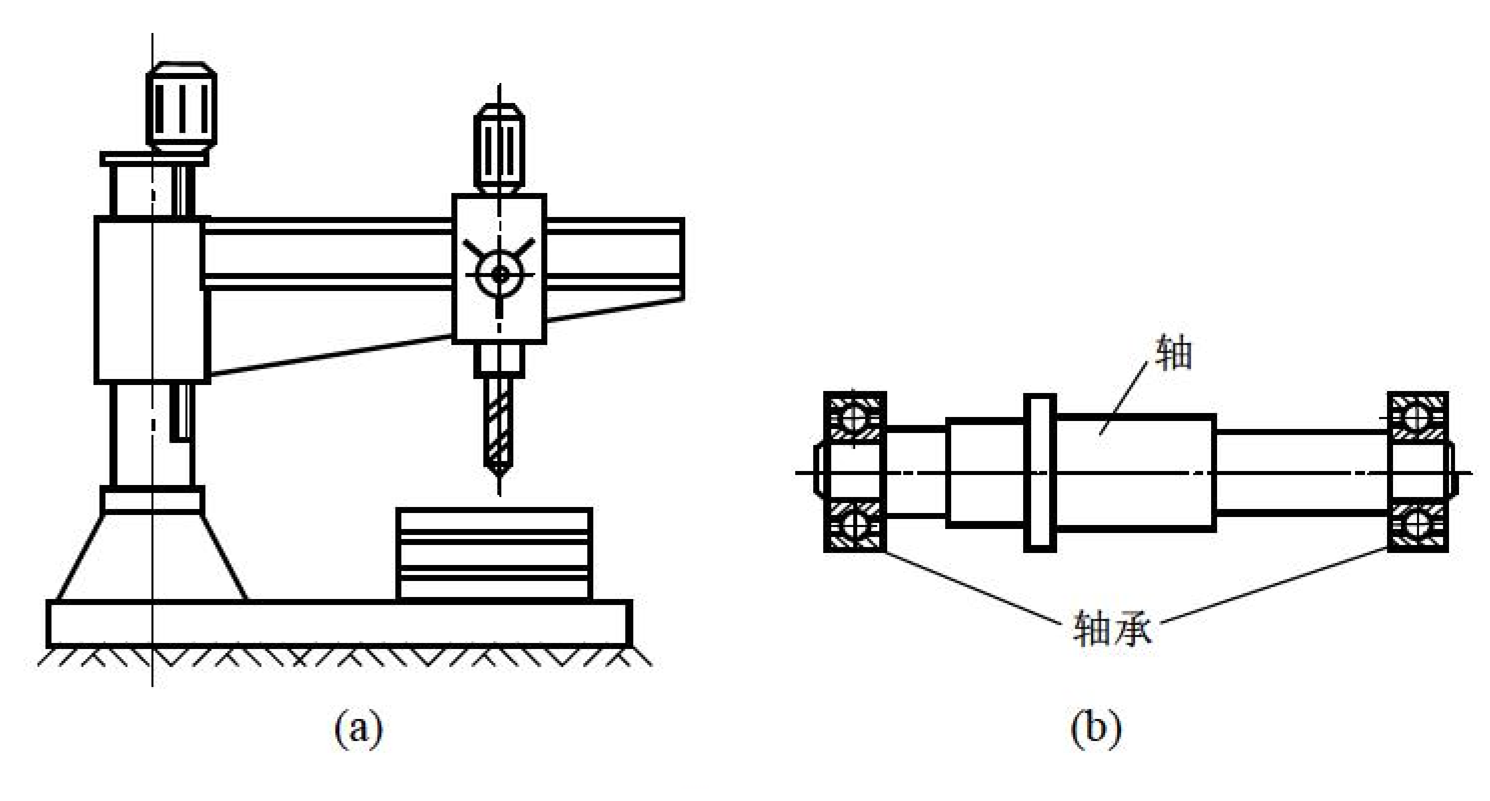


图 5.24

由式(5.26)有

$$W(x)=\frac{b(x)h^2}{6}=\frac{M(x)}{[\sigma]}=\frac{Fx}{[\sigma]}$$

于是

$$b(x)=\frac{6F}{h^2[\sigma]}x$$

由上式可以看出，截面宽度是 x 的一次函数，该等强度梁的形状如图 5.25(b)所示。等强度梁在工程中也常常应用，如城市高架桥所采用的空心鱼腹梁(见图 5.26)等。

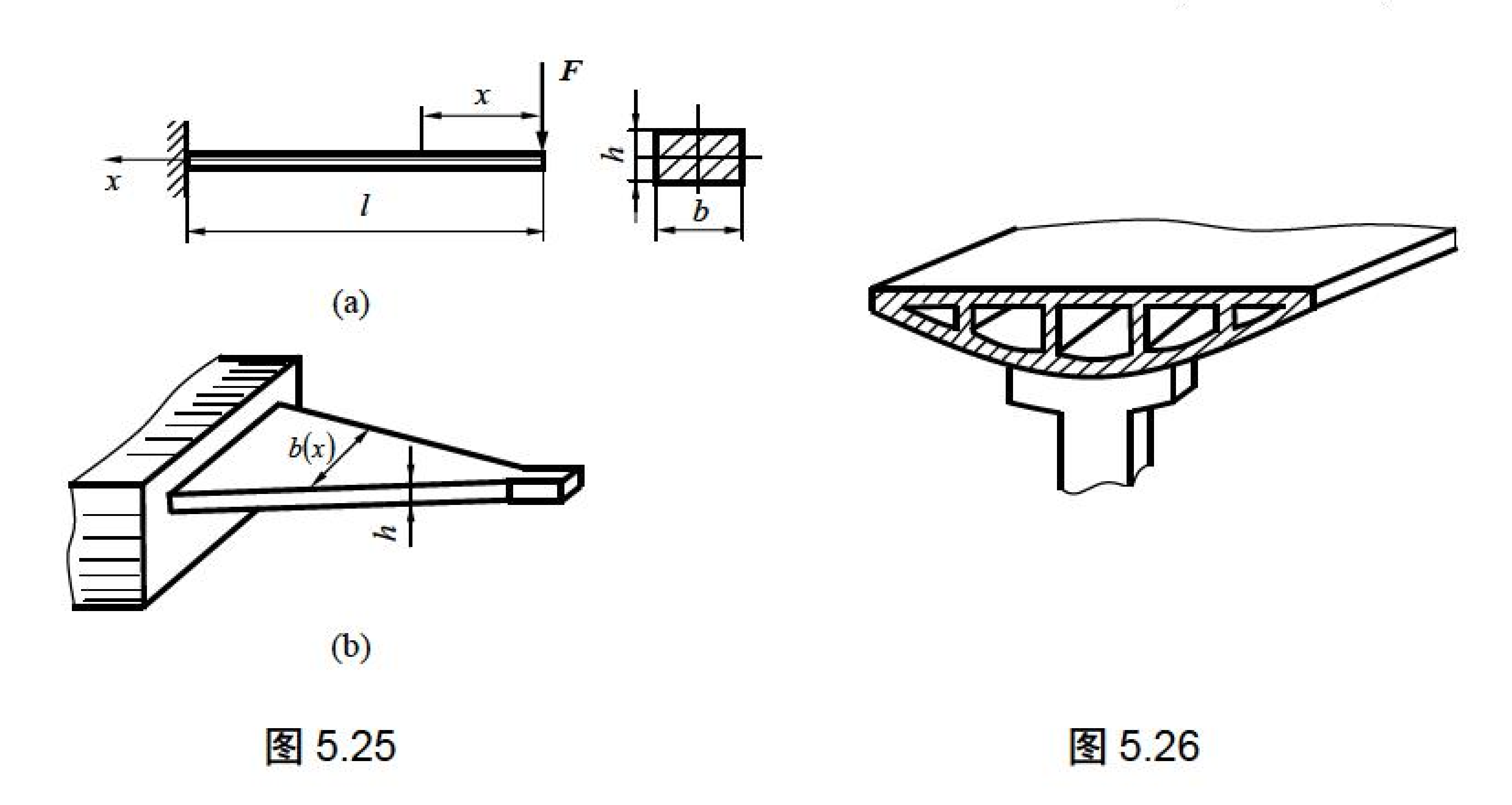


图 5.25　　图 5.26

5.5　弯曲中心的概念

试验结果表明，若开口薄壁截面梁有纵向对称面，且横向力作用于对称面内，则梁只可能在纵向对称面内发生平面弯曲，不会发生扭转。若横向力作用面不是纵向对称面，即使是形心主惯性平面，如图 5.27(a)所示，梁除发生弯曲变形外，还将发生扭转变形。只有当横向力通过截面内某一特定点 A 时，如图 5.27(b)所示，梁才只有弯曲而无扭转变形。横截面内的这一特定点 A 称为截面的弯曲中心或剪切中心。

现以槽形截面悬臂梁为例来分析截面的弯曲中心。如图 5.28(a)所示，若横向外力 F 作用在形心主惯性平面 xy 内时，在梁的任一横截面 m—n 上将产生弯曲切应力，如图 5.28(b)所示，与该切应力对应的分布内力将合成为该截面上的剪力 F_s。显然，F_s 作用线将与 y 轴平行，并经过 z 轴上某一点 A。现从截面 m—n 截取一段梁为研究对象，如图 5.28(c)所示，当外力 F' 与截面 m—n 上剪力 F_s 不在同一个纵向平面内时，该段梁不仅发生弯曲，还会发生扭转。若将力 $\boldsymbol{F}'$ 沿 z 轴平移至该截面上的 A' 点，使 $\boldsymbol{F}$ 与 F_s 在同一纵向对称面内，则该段梁将只发生弯曲，而不会发生扭转。如果横向外力 $\boldsymbol{F}$ 作用在形心主惯性平面 xz 内，当外力作用线沿对称轴 z 轴作用时，梁才会只发生弯曲而不发生扭转。此时，横截面上的剪力 F_s 作用线必定与 z 轴重合。由此可知，梁在两相互垂直平面内发生平面弯曲时，横截面上的相应剪力 F_s(弯曲切应力对应的分布内力的合力)的交点 A 就是截面 m—n 的弯曲中心，A' 点即为自由端截面的弯曲中心。这一结论也给出了确定截面弯曲中心位置的方法。

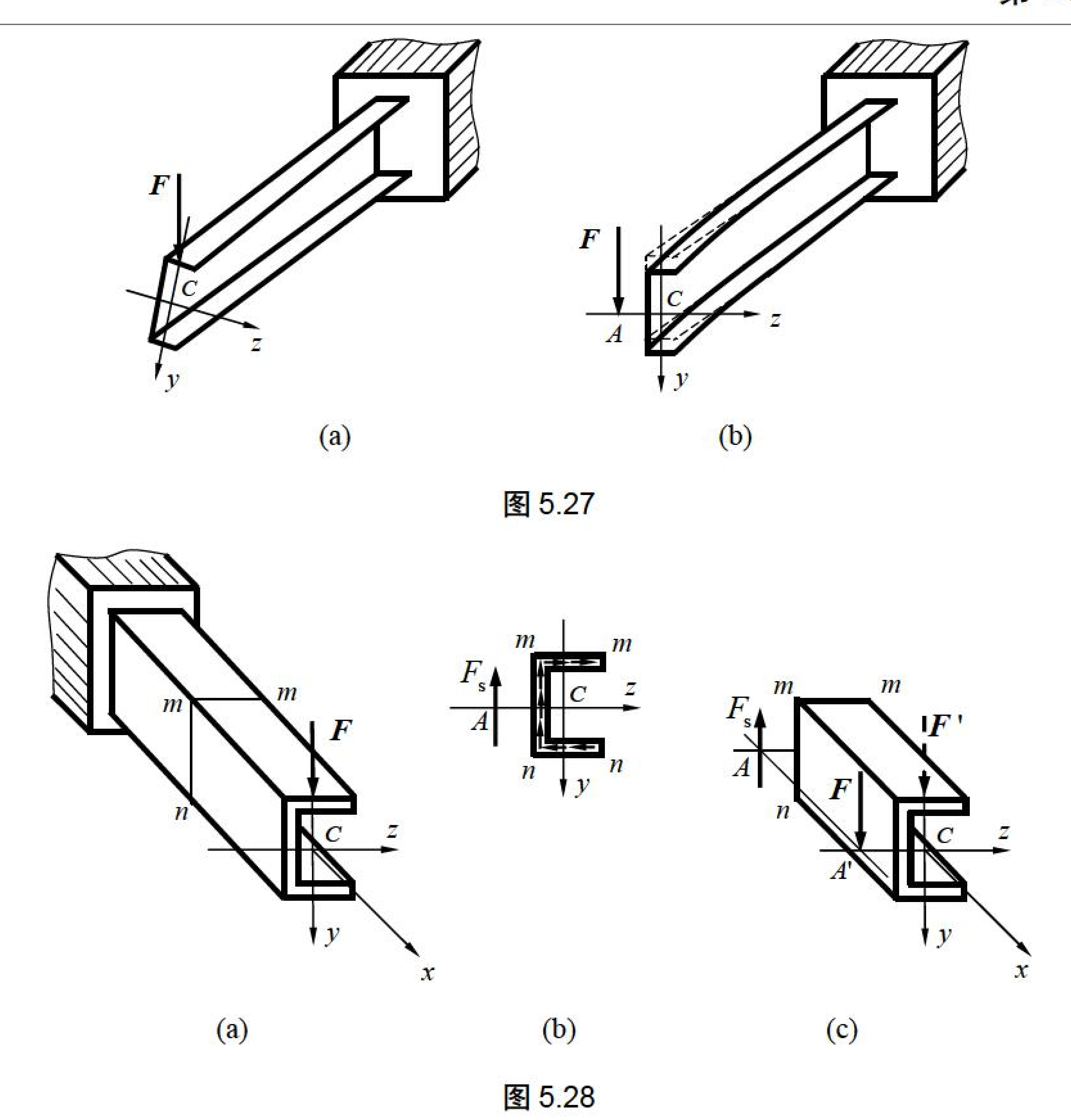


图 5.27

图 5.28

对于具只有一条对称轴的截面，其弯曲中心必在截面的对称轴上，通过确定其垂直于对称轴的剪力作用线求得截面的弯曲中心；对于有两条对称轴的截面，则两对称轴的交点(截面形心)就是弯曲中心；对于角钢、T 形等由汇交于一点的两个狭长矩形组成的截面，剪力作用线与狭长矩形长边壁厚中线重合，其弯曲中心就是壁厚中线的交点。

表 5.2 列出了一些常见截面的弯曲中心位置。由表中结果可见，弯曲中心的位置仅与横截面的几何特征有关，与外力及材料均无关。截面的弯曲中心也属于截面图形的几何性质之一。

表 5.2　常见截面的弯曲中心位置

截面形状				
弯曲中心 A 的位置	$e=\dfrac{b^2h^2\delta}{4I_z}$	$e=r_o$	两个狭长矩形中线的交点	与形心重合

本 章 小 结

平面弯曲有纯弯曲(梁段上各横截面上弯矩为常量，剪力等于零)和横力弯曲(梁段上既有弯矩，又有剪力)。大多数梁的弯曲为横力弯曲。

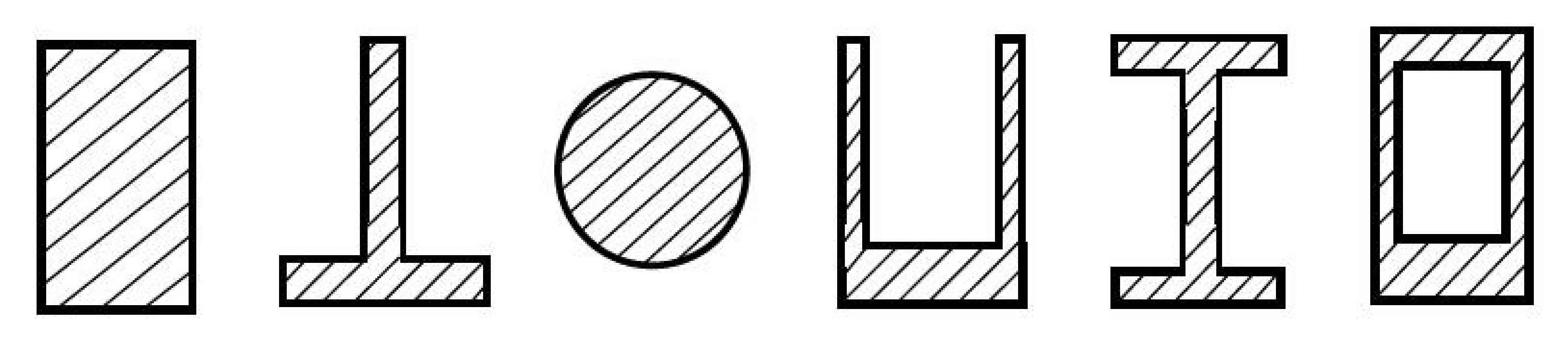
梁纯弯曲中提出了弯曲平面假设、单向应力假设。梁上有一层既不伸长、也不缩短的纤维层称为中性层；中性层与横截面的交线称为中性轴，中性轴 z 轴通过截面形心。

其他形状截面梁如工字梁、槽形截面梁、T 字形截面梁、圆形与薄壁环形截面梁等，其最大切应力仍发生在截面的中性轴上。切应力方向沿剪力形成 “切应力流”。

习　　题

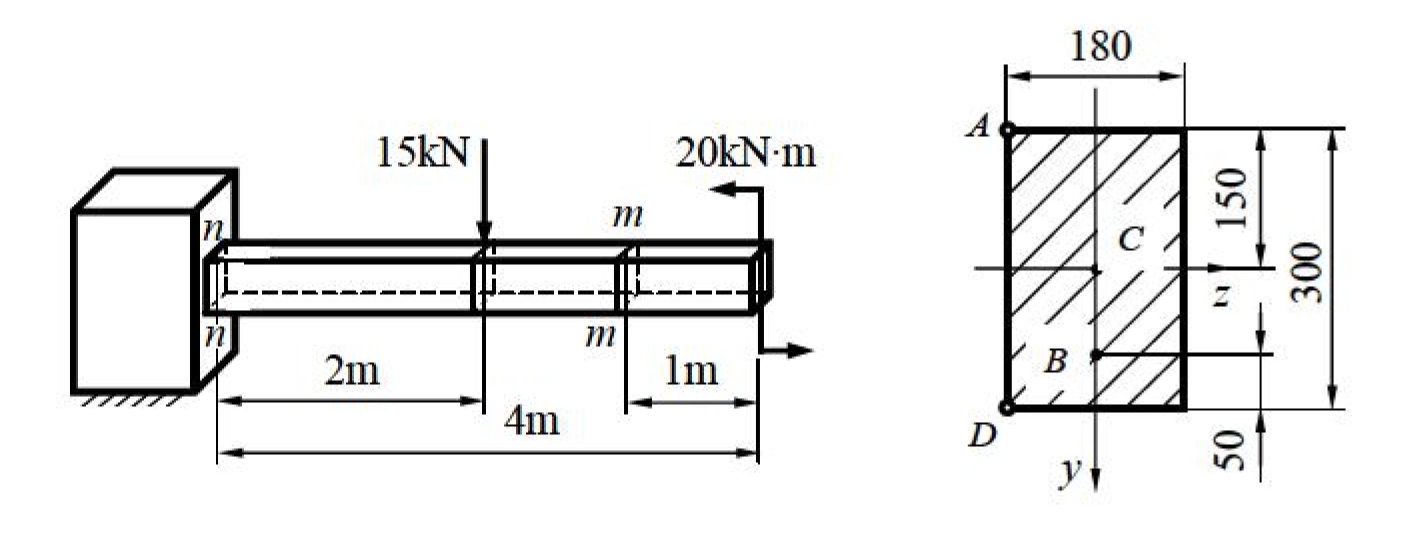
5.1　将直径 $d = 1\text{mm}$ 的钢丝绕在直径为 2m 的卷筒上，设钢丝弹性模量 $E = 200\text{MPa}$ 。试计算钢丝中产生的最大弯曲正应力。

5.2　一简支梁在其纵向对称面内受铅垂向下的载荷作用而产生弯曲，当梁具有习题 5.2 图所示各种不同形状的横截面时，试分别绘出各横截面上的正应力沿高度变化的图。



习题 5.2 图

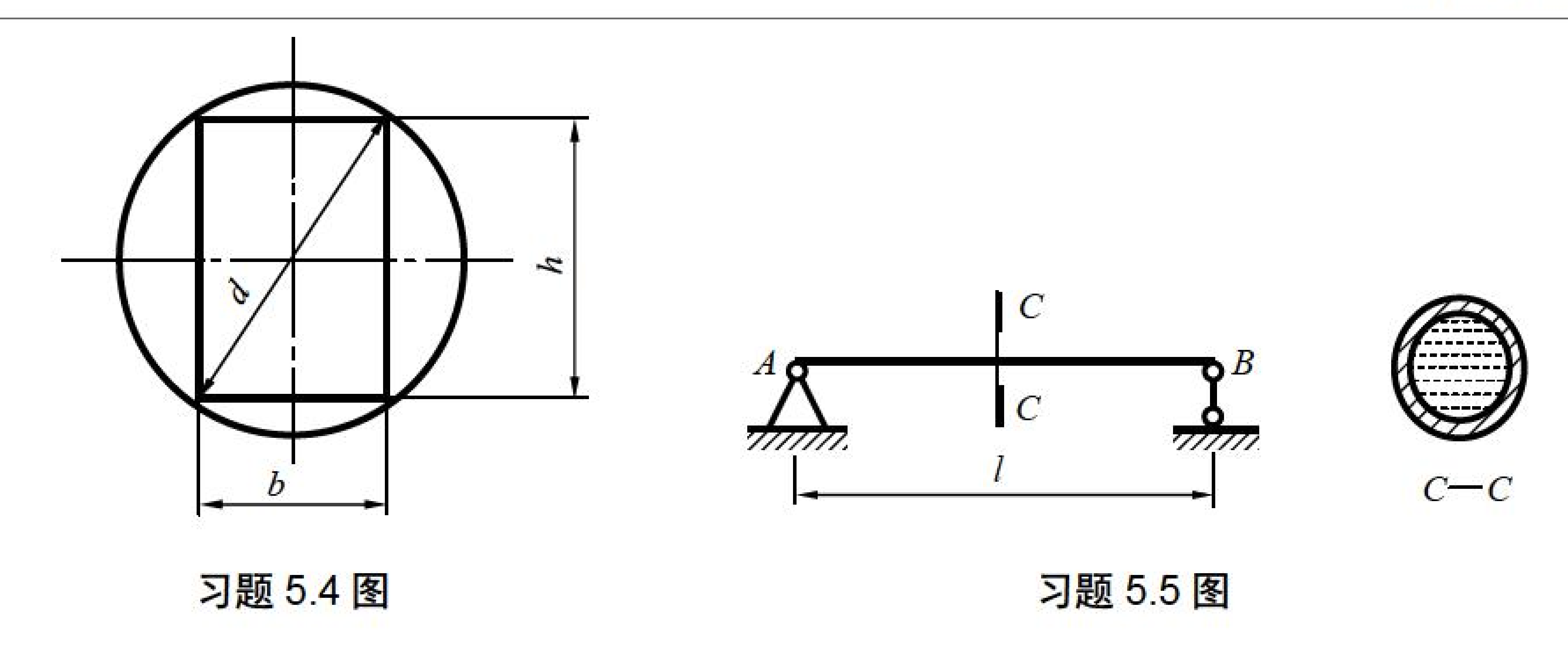
5.3　如习题 5.3 图所示矩形截面的悬臂梁受集中力和集中力偶作用。试求截面 m—m 和固定端截面 n—n 上 A、B、C、D 四点处的正应力。



习题 5.3 图

5.4　我国宋朝李诫所著《营造法式》中，规定木梁截面的高宽比 $h/b = 3/2$ (见习题 5.4 图)。试从弯曲强度的观点证明：从圆木锯出的矩形截面梁，上述尺寸比例接近最佳比值。

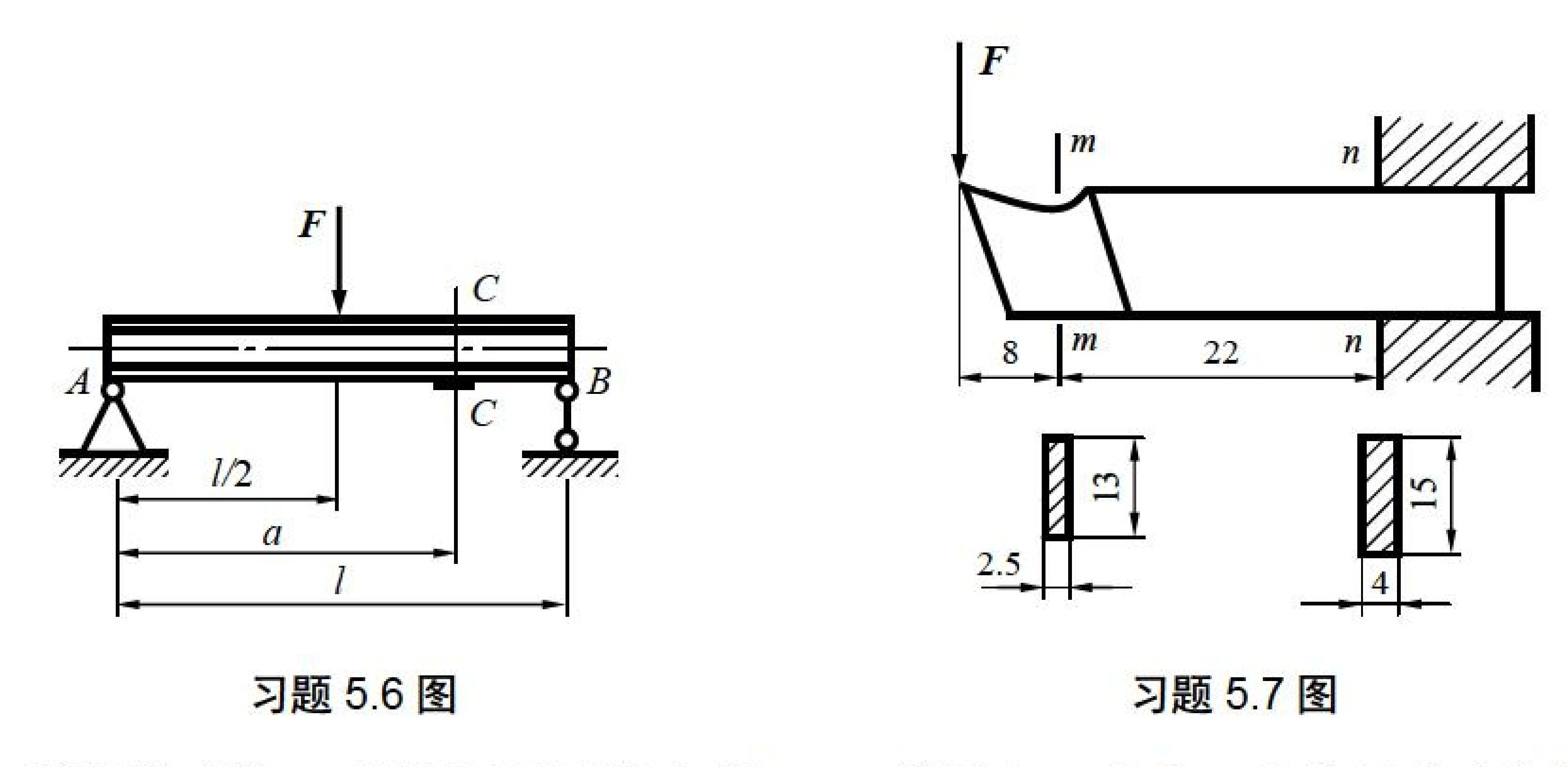
5.5　一外径为 250mm 、壁厚为 10mm 、长度 $l = 12\text{m}$ 的铸铁水管，两端放在支座上，管中充满着水，如习题 5.5 图所示。铸铁的密度 $\rho_1 = 7.7\times10^3\text{kg/m}^3$ ，水的密度 $\rho_2 = 1\times10^3\text{kg/m}^3$ 。试求管内最大拉、压应力的数值。



习题 5.4 图　　　　习题 5.5 图

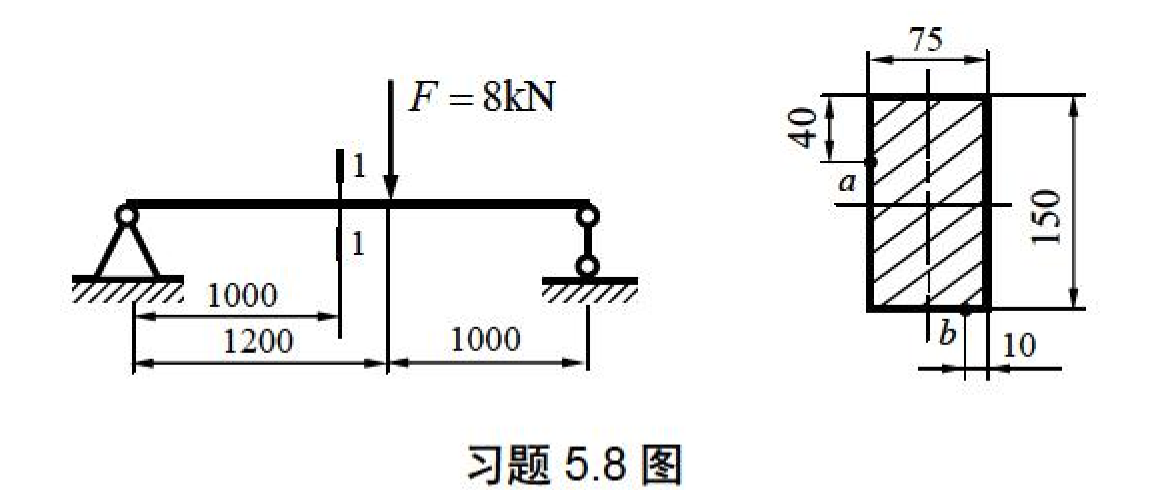
5.6　习题 5.6 图所示由一 16 号工字钢制成的简支梁承受集中载荷 F。在梁的截面 C—C 处下边缘上，用应变仪量得标距 $s = 20\text{mm}$ 长度上的纵向伸长量 $\Delta s = 0.008\text{mm}$，已知梁的跨长 $l = 1.5\text{m}$，$a = 1\text{m}$，弹性模量 $E = 210\text{GPa}$。试求力 F 的大小。

5.7　切断刀在切割工件时，受到 $F = 1\text{kN}$ 的切削力作用，割刀尺寸如习题 5.7 图所示。试求切断刀内的最大弯曲正应力。



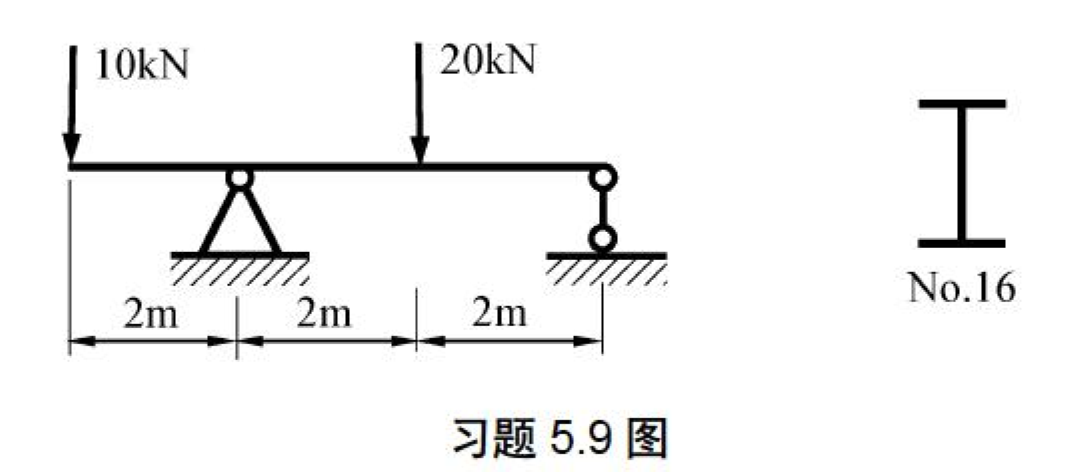
习题 5.6 图　　　　习题 5.7 图

5.8　试计算习题 5.8 图所示矩形简支梁 1—1 截面上 a 点和 b 点的正应力和切应力。



习题 5.8 图

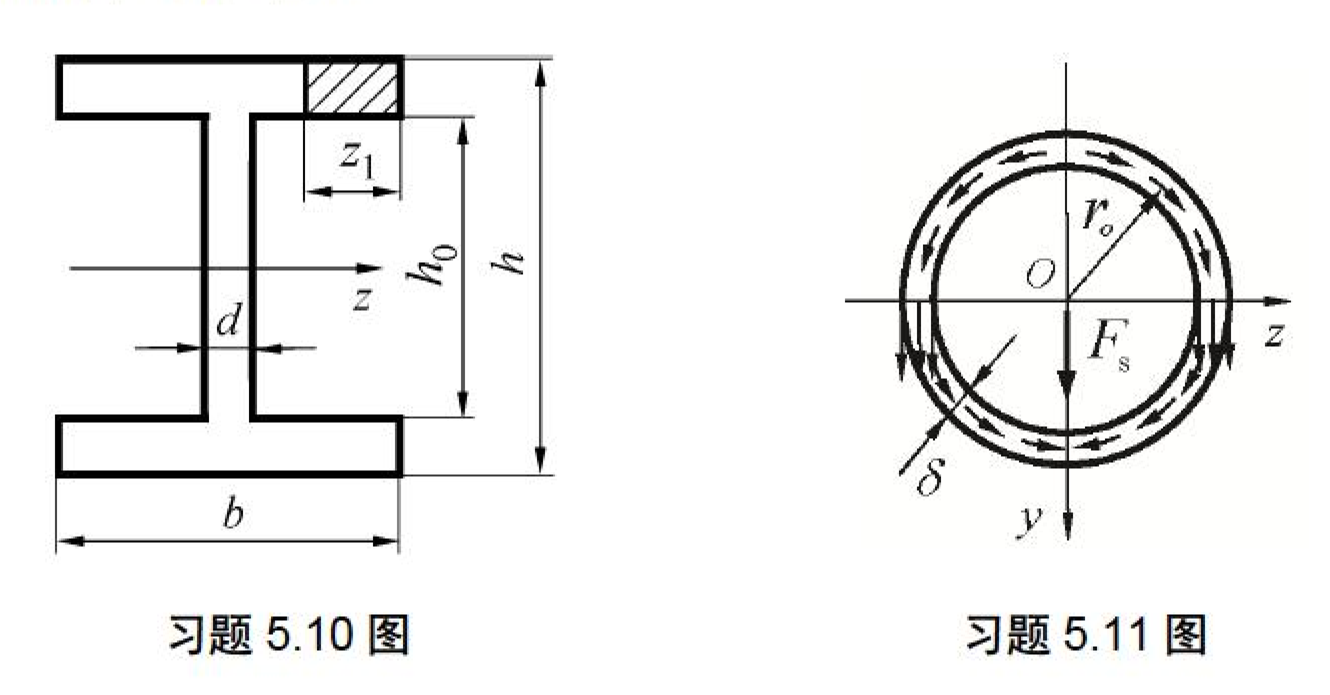
5.9　试计算习题 5.9 图所示工字形梁截面内的最大弯曲正应力和最大切应力。



习题 5.9 图

5.10 如习题 5.10 图所示，若梁的截面为宽翼缘工字形，横截面上的剪力为F_s，试求翼缘上平行于z轴的切应力的分布规律，并求最大切应力。

5.11 如习题 5.11 图所示，若圆环形截面梁的壁厚δ远小于平均半径r_o，已知剪力为F_s，试求截面上的最大切应力。



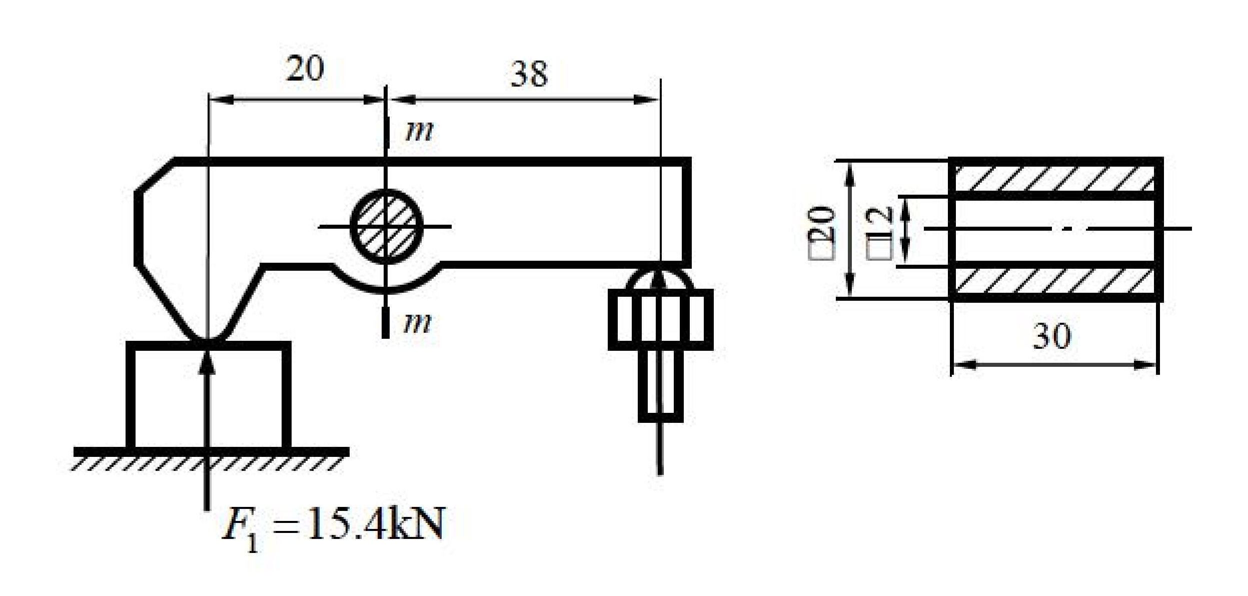
习题 5.10 图　　习题 5.11 图

5.12 如习题 5.12 图所示，已知梁横截面上的剪力方向向下，当截面为图示各种形状时，试分别画出横截面上切应力流的方向。



习题 5.12 图

5.13 压板的尺寸和载荷情况如习题 5.13 图所示。材料为 45 钢，$\sigma_s = 380\text{MPa}$，取安全系数$n = 1.7$。试校核压板的强度。



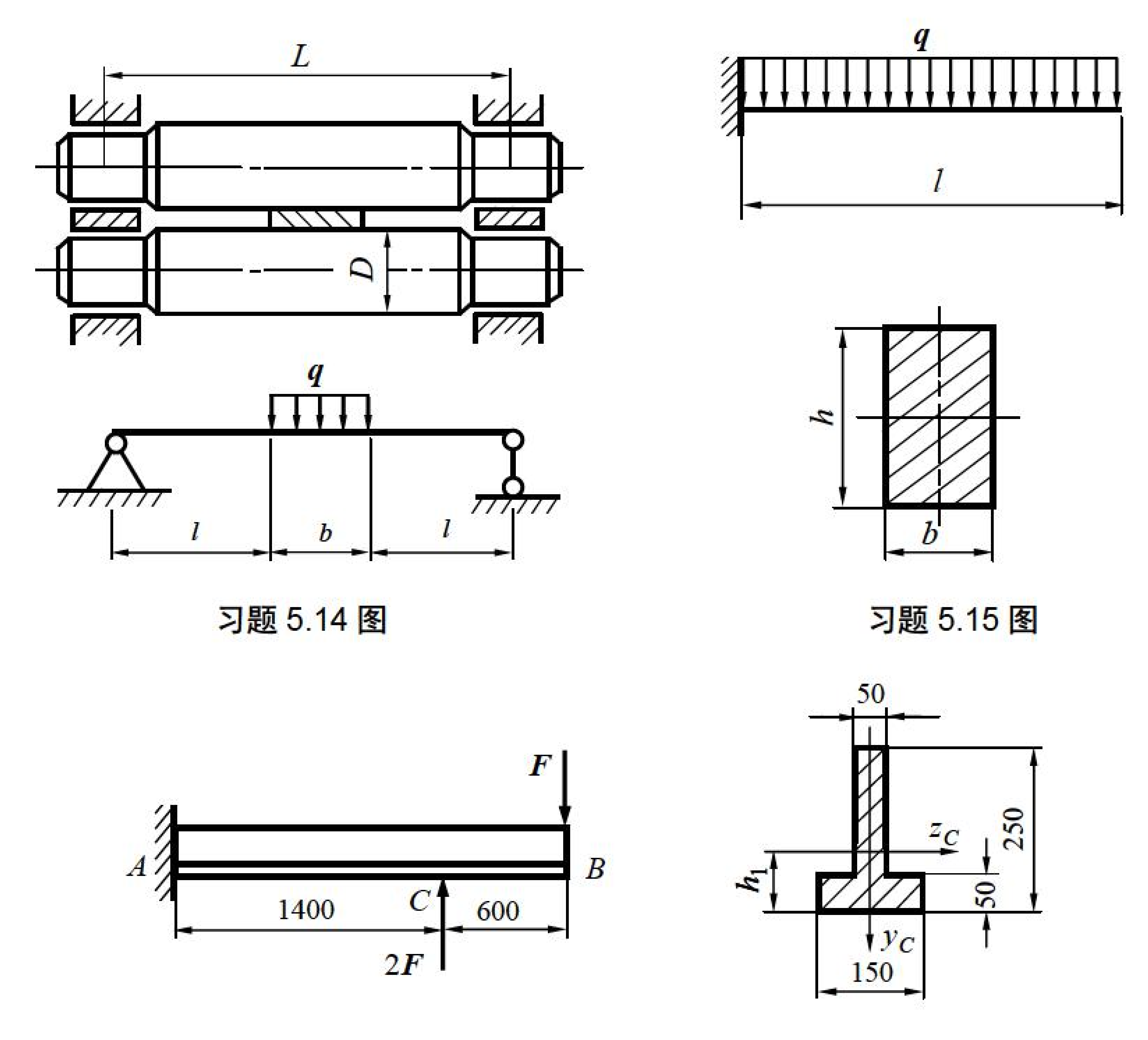
习题 5.13 图

5.14 如习题 5.14 图所示，轧辊轴直径$D = 280\text{mm}$，跨长$L = 1000\text{mm}$，$l = 1000\text{mm}$，$b = 1000\text{mm}$。轧辊材料的许用弯曲应力$[\sigma] = 100\text{MPa}$。试求轧辊能承受的最大轧制力。

5.15 矩形截面悬壁梁如习题 5.15 图所示，已知$l = 4\text{m}$，$h:b = 3:2$，$q = 10\text{kN/m}$，$[\sigma] = 10\text{MPa}$。试确定此梁横截面的尺寸。

5.16 T 形截面铸铁悬壁梁，尺寸及载荷如习题 5.16 图所示。若截面对形心轴z_C的惯性矩$I_{z_C} = 10180 \times 10^4 \text{mm}^4$，$h_1 = 96.4\text{mm}$，材料的拉伸许用应力$[\sigma_t] = 50\text{MPa}$，压缩许

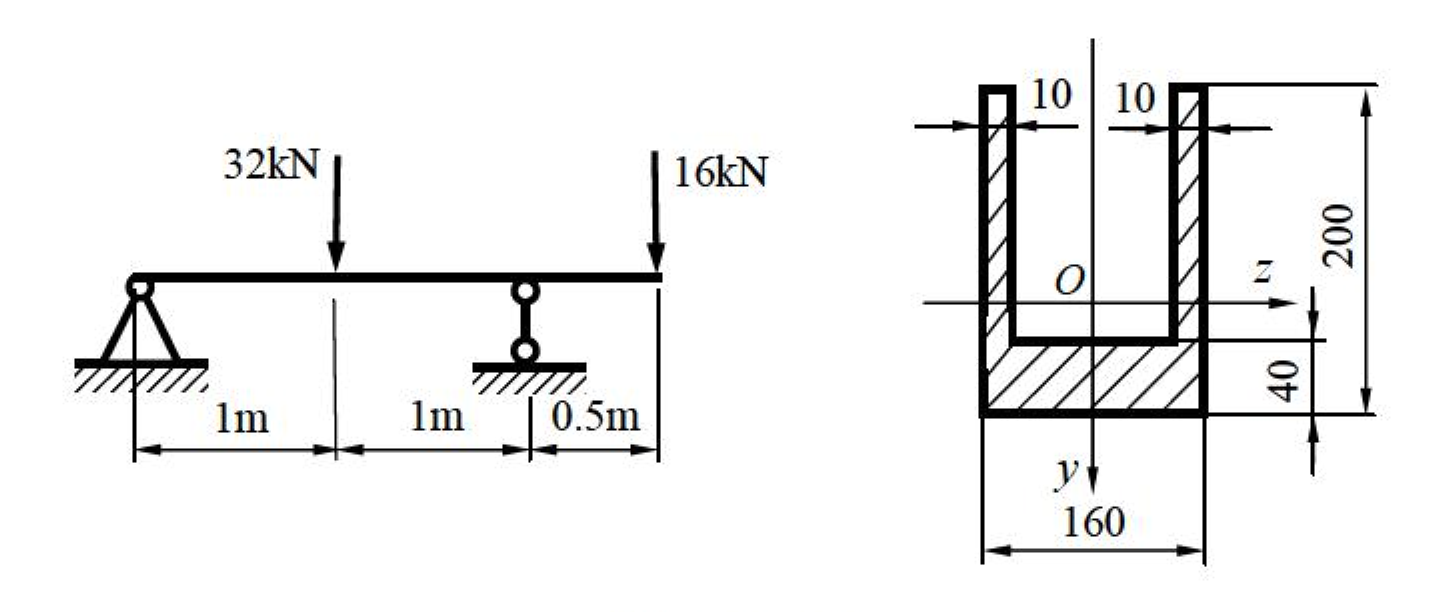
用应力$[\sigma_c]=160\text{MPa}$。试计算梁的许可载荷F。



习题 5.14 图　　习题 5.15 图

习题 5.16 图

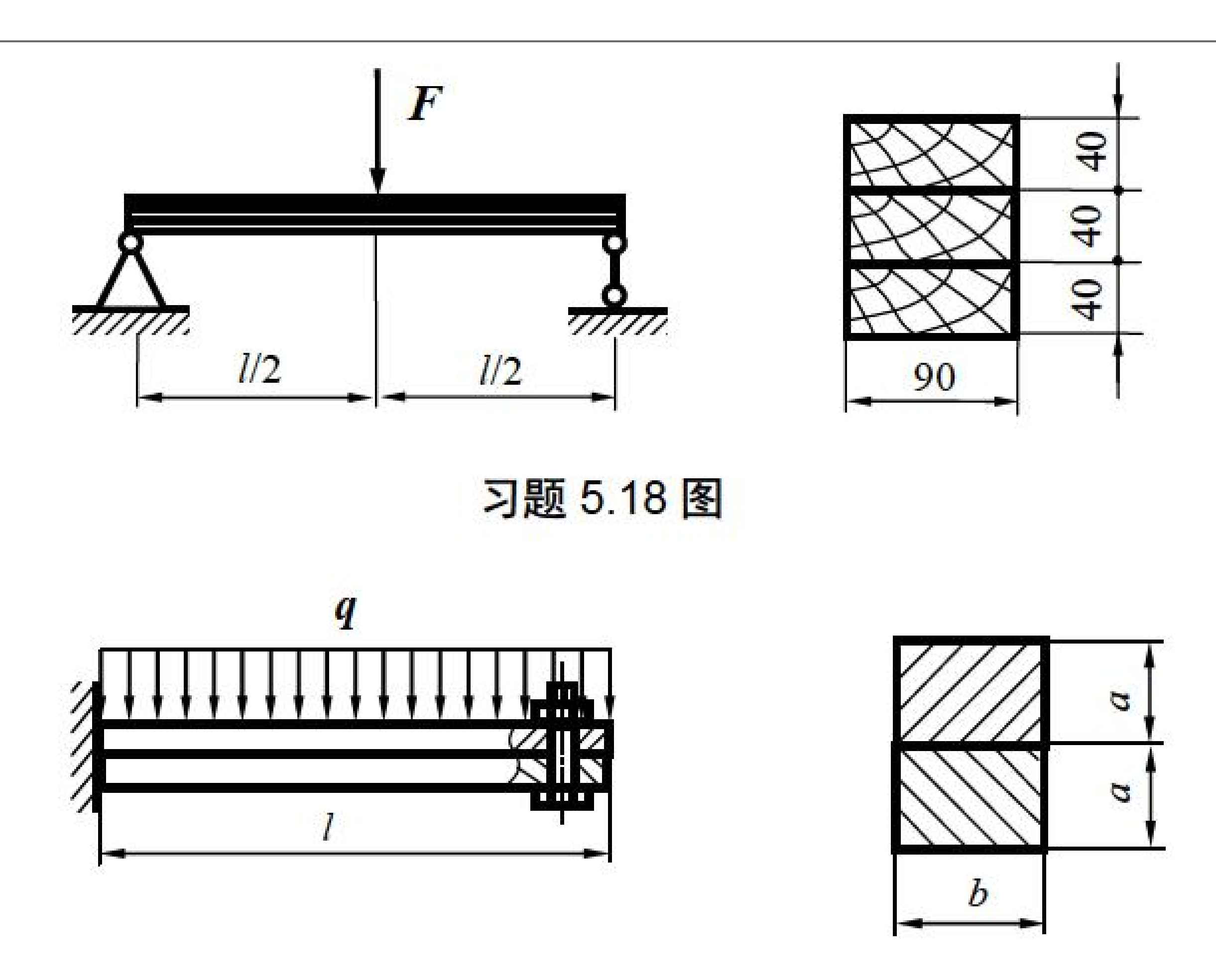
5.17　一铸铁梁如习题 5.17 图所示，已知材料的拉伸强度极限$\sigma_t=150\text{MPa}$，压缩强度极限$\sigma_c=630\text{MPa}$。试求梁的安全因数。



习题 5.17 图

5.18　习题 5.18 图所示简支梁由 3 块截面为$40\text{mm}\times90\text{mm}$的木板胶合而成，已知$l=3\text{m}$，胶缝的许用切应力$[\tau]=0.5\text{MPa}$。试按胶缝的切应力强度确定梁所能承受的最大载荷$F$。

5.19　习题 5.19 图所示悬臂梁由两块钢板组成，两钢板左端嵌固，右端用螺栓连接，梁上作用有均布载荷。已知$l=2\text{m}$，$a=80\text{mm}$，$b=100\text{mm}$，$q=2\text{kN/m}$，螺栓的许用切应力$[\tau]=80\text{MPa}$，试求螺栓的直径(不考虑两梁间的摩擦)。

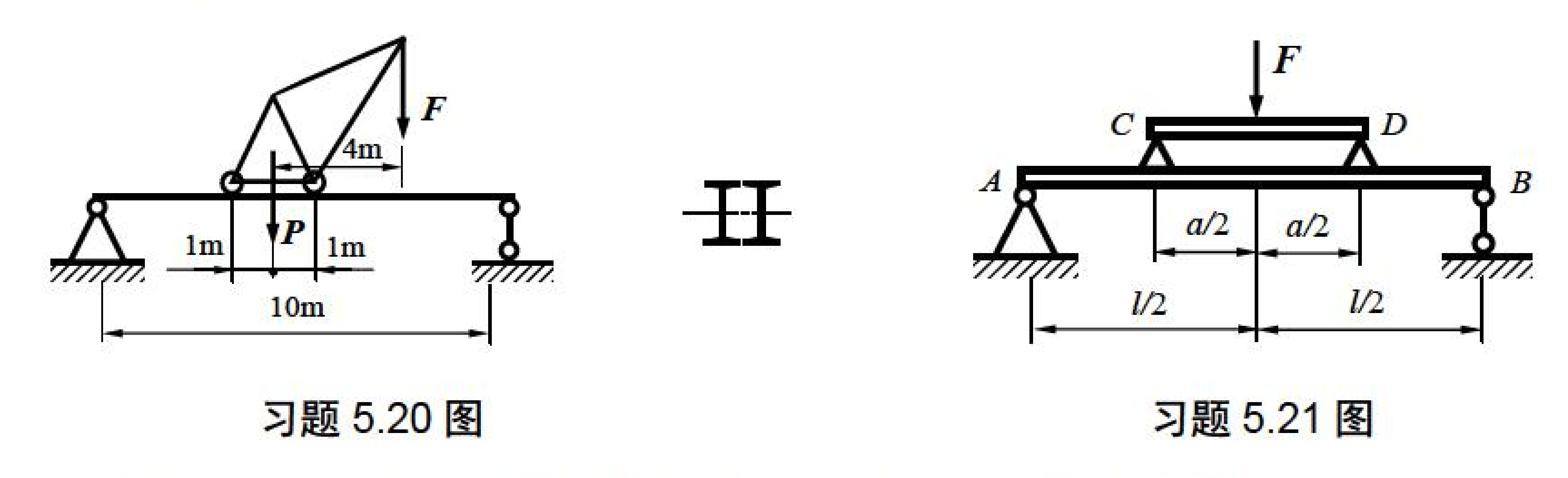


习题 5.18 图

习题 5.19 图

5.20 如习题 5.20 图所示起重机下的梁由两根工字钢组成，起重机自重 $P=50\text{kN}$，最大起重量 $F=50\text{kN}$。钢的许用正应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$，许用切应力 $[\tau]=100\text{MPa}$。试先不考虑梁的自重影响按正应力强度条件选择工字钢型号，然后再考虑梁的自重影响进行强度校核。

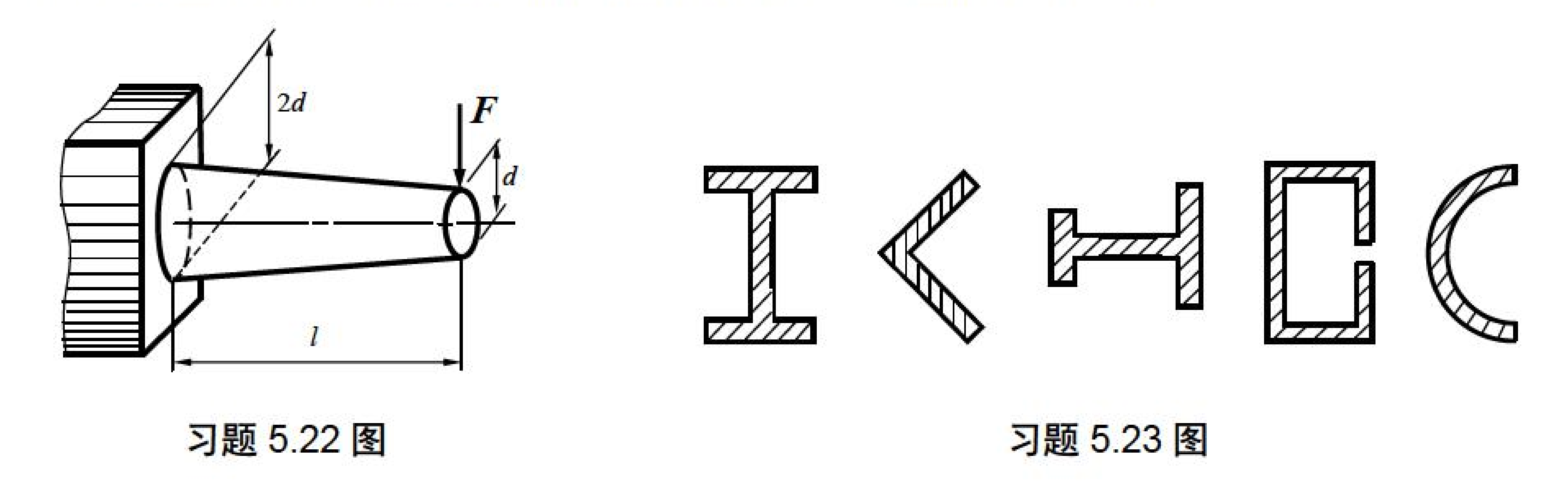
5.21 当载荷 $\boldsymbol{F}$ 直接作用在跨长为 $l=6\text{m}$ 的简支梁 AB 的中点时，梁内最大正应力超过允许值 30%。为了消除此过载现象，拟配置如习题 5.21 图所示的辅助梁 CD，试求此辅助梁的最小跨长 a。



习题 5.20 图　　　习题 5.21 图

5.22 习题 5.22 图所示圆截面锥形悬臂梁，在自由端受集中力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，A、B 两端截面直径分别为 d 和 $2d$，梁的长度为 l。求梁中最大弯曲正应力。

5.23 试判断习题 5.23 图所示各截面的弯曲中心的大致位置。



习题 5.22 图　　　习题 5.23 图

第6章　弯 曲 变 形

【本章学习重点】

本章重点学习用积分法、叠加法求梁的挠度和转角。建立梁的刚度条件。通过例题介绍简单超静定梁的解法。

【本章学习目标】

- 掌握梁的挠度、转角的概念及其正负号的规定。
- 通过挠曲线近似微分方程，会用积分法求简单载荷下梁的挠曲线方程和转角方程、确定积分常数、求梁上指定横截面挠度和转角。
- 利用已知各单一载荷作用下的挠度和转角结果，会用叠加原理求几种载荷同时作用下的挠度和转角。
- 会确定梁的最大挠度和转角，进行梁的刚度校核。
- 了解提高梁刚度的措施，能求解简单梁的超静定问题。

6.1　弯曲变形的概念

工程中对受弯杆件除有强度要求外，还有刚度要求，即要求杆件的变形不能太大。如机器中的传动轴变形较大时，会影响到轴与齿轮的啮合或轴承的配合，造成磨损加快，增大机器的振动和噪声；吊车梁变形过大，将使梁上小车行走困难；建筑物中梁的变形太大，会导致楼板开裂。因此，工程设计中往往要求杆件的变形不能超过允许值。

图 6.1(a)中的悬臂梁和图 6.1(b)所示的简支梁在集中载荷 $\boldsymbol{F}$ 作用下，其轴线会变形成曲线，该曲线称为梁的挠曲线。横截面形心在垂直于轴线方向的线位移称为该截面的挠度，用 w 表示。另外，在弯曲变形过程中，梁横截面上任意点不仅具有挠度，同时还伴随着旋转。梁的横截面对其原来位置转过的角度，称为截面转角，简称为转角，用 θ 表示。挠度和转角较直观且便于测量，工程实际中通常用挠度和转角作为度量弯曲变形的两个基本量。

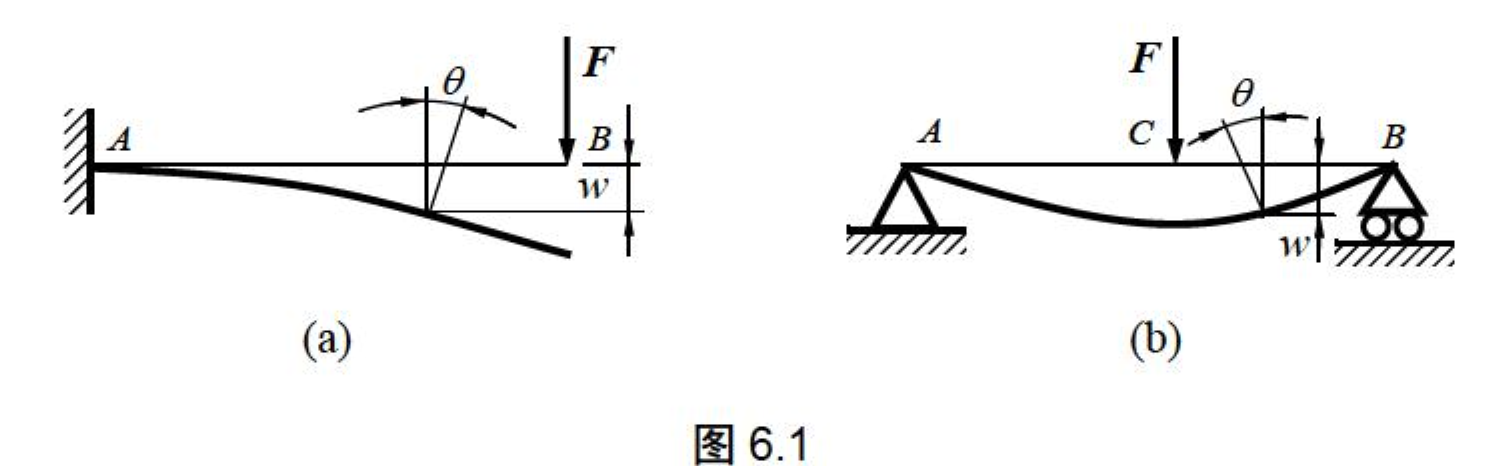


图 6.1

6.2　梁的挠曲线近似微分方程

求解梁挠度和转角的主要方法是基于挠曲线微分方程以及相关的一些数学关系。考虑

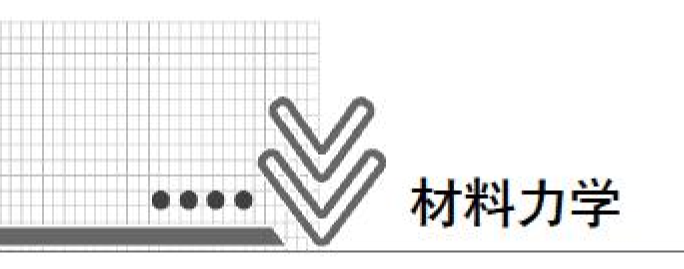


图 6.2 所示的简支梁，在集中载荷 $\boldsymbol{F}$ 作用下，梁轴线会变形成曲线。为便于后续方程的推导，以左端固定铰链为原点，变形前的梁轴线为 x 轴，垂直向上方向为 y 轴，建立直角坐标系。其中，xy 平面为梁的纵向对称面。显然，在直角坐标系中，挠度是梁横截面位置 x 的函数，挠曲线的一般方程可表示为

$$w = f(x) \tag{6.1}$$

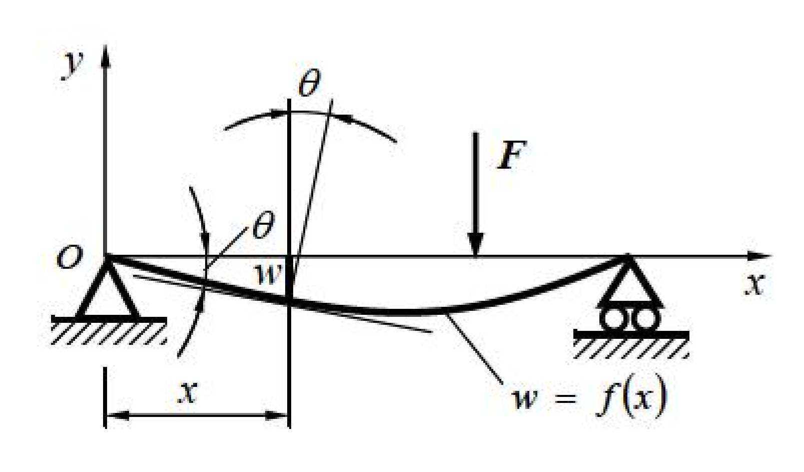


图 6.2

根据平面假设，弯曲变形前垂直于梁轴线(x 轴)的横截面，变形后仍垂直于挠曲线。因此，截面转角就是 x 轴与挠曲线切线的夹角。这时，转角 θ 可表示为

$$\theta \approx \tan\theta = w' = f'(x) \tag{6.2}$$

式(6.2)称为转角方程。由此可见，在求得挠曲线方程后，就可以求出转角方程，从而确定梁任一截面的挠度和转角。

挠度和转角的符号规定如下：在图 6.3 所示的坐标系中，向上的挠度和逆时针方向的转角为正，反之为负。

为求得梁的挠曲线方程，可利用纯弯曲中梁的曲率半径与弯矩 M 之间的关系

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

上式为梁在线弹性范围内纯弯曲情况下的曲率表达式。

在横力弯曲中，梁横截面上有弯矩 $M(x)$、剪力 $F_s(x)$。试验表明，当梁的跨长 l 大于横截面高度 10 倍时，可忽略剪力 $F_s(x)$ 对于梁变形的影响。则梁的曲率 $\dfrac{1}{\rho(x)}$ 可表达为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EI} \tag{6.3}$$

在高等数学中，平面曲线(如挠曲线 $w = f(x)$)上任意一点的曲率表达式为

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} \tag{6.4}$$

式(6.4)代入式(6.3)得

$$\pm\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI} \tag{6.5}$$

在小变形条件下，有

$$\pm w'' = \frac{M(x)}{EI} \tag{6.6}$$

式(6.6)称为梁的挠曲线近似微分方程。方程式中的正、负号则由坐标系的选取和弯矩的正负规定来确定。在图 6.3 所示的坐标系中，当弯矩 $M(x)$ 为正时，梁的挠曲线为向上凹

的曲线(见图 6.3(a))，上凹曲线的二阶导数 $w''>0$，即弯矩 $M(x)$ 与 w'' 同号；当弯矩 $M(x)$ 为负时，梁的挠曲线为向下凹的曲线(见图 6.3(b))，下凹曲线的二阶导数 $w''<0$，弯矩 $M(x)$ 与 w'' 仍然同号。因此有

$$w''=\frac{M(x)}{EI} \tag{6.7}$$

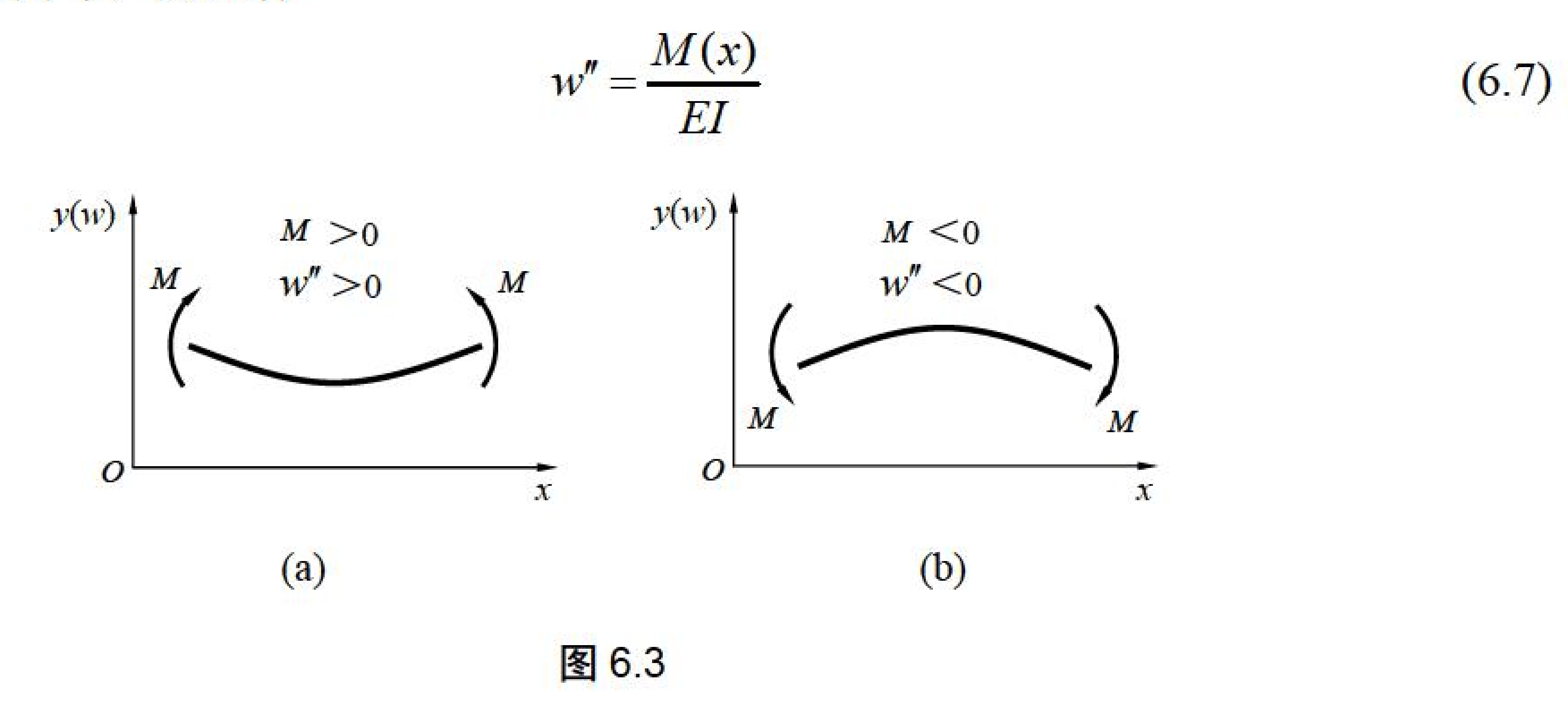


图 6.3

6.3　积分法求梁的弯曲变形

6.2 节推导的梁挠曲线近似微分方程，对于等截面直梁，其弯曲刚度 EI 为常量，将式(6.7)积分一次，可得转角方程为

$$\theta=w'=\frac{1}{EI}\int M(x)\mathrm{d}x+C \tag{6.8a}$$

或

$$EIw'=\int M(x)\mathrm{d}x+C \tag{6.8b}$$

对式(6.8)再积分一次，可得挠曲线方程为

$$w=\frac{1}{EI}\int\left[\int M(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x+Cx+D \tag{6.9a}$$

或

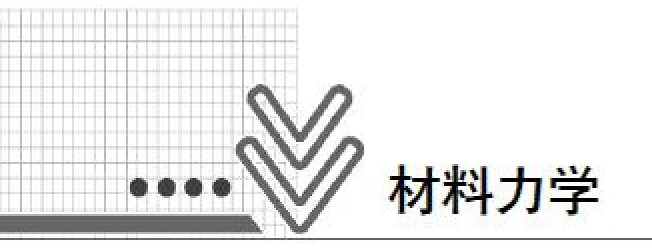
$$EIw=\int\left[\int M(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x+Cx+D \tag{6.9b}$$

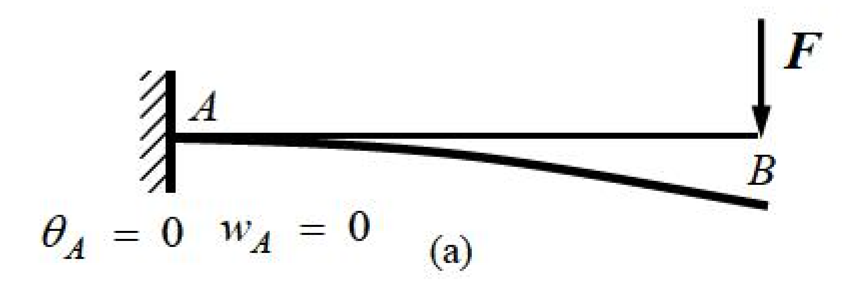
式(6.8)、式(6.9)中的两个积分常数 C 和 D 可根据约束条件确定。约束条件是指梁支座处挠度和转角的已知条件。支座的约束不同，约束条件也不同。3 种常用梁的约束条件如图 6.4 所示。在悬臂梁中，固定端处的挠度和截面转角均等于零。对于简支梁和外伸梁，左、右两个铰支座处的挠度均为零。

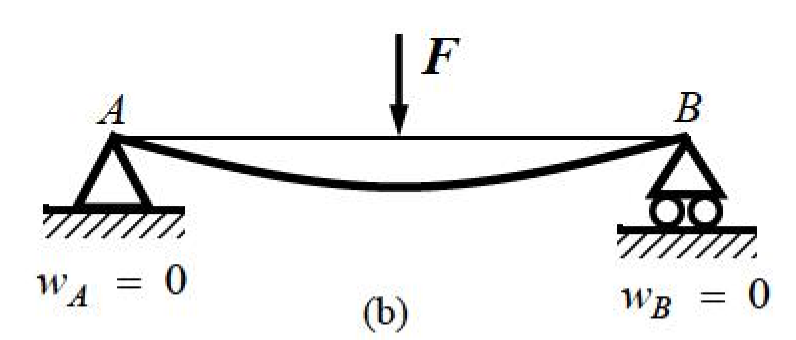
若梁上的载荷不连续，则梁上的弯矩方程须分段列出，梁各段上的挠曲线近似微分方程不同，若梁分为 n 段，就有 $2n$ 个积分常数。为确定这些积分常数，除需利用支座处的约束条件外，还需利用相邻两段梁交界处的位移连续条件。如图 6.5 所示，等直梁在点 C 受到集中载荷 $\boldsymbol{F}$ 作用后变形成曲线，梁的挠曲线是连续的，这就要求两个不同积分区域的挠曲线在 C 点处的挠度必须相等，转角也必须相等，即在 $x=a$ 处有

$$w_{C_1}=w_{C_2}，\ \theta_{C_1}=\theta_{C_2}$$

不论是约束条件还是连续条件，均发生在各段挠曲线的边界处，故统称为边界条件。







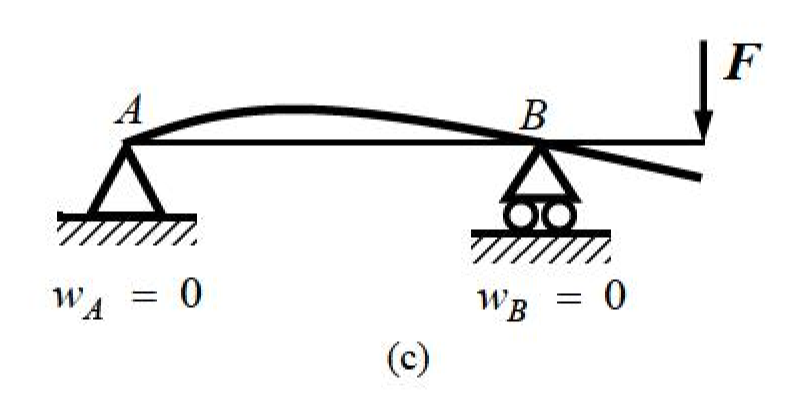


图 6.4

例 6.1 计算图 6.6 所示的等截面悬臂梁 AB 的挠曲线方程，并确定自由端的挠度 w_B 和转角 θ_B。其中梁的弯曲刚度为 EI，长度为 l，均布载荷集度为 q。

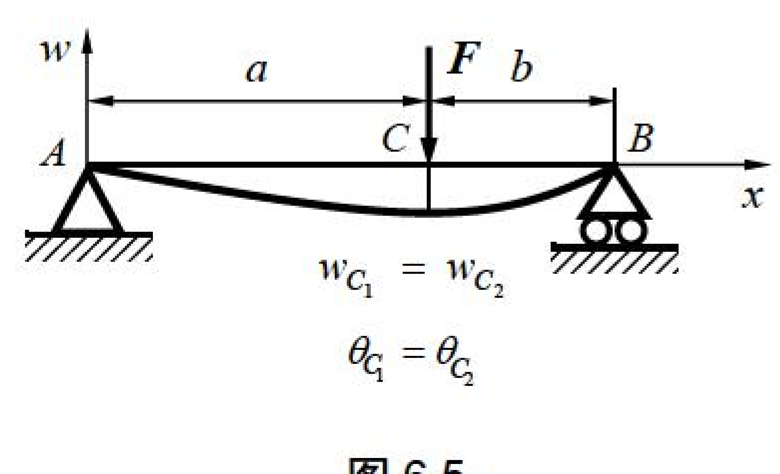


图 6.5

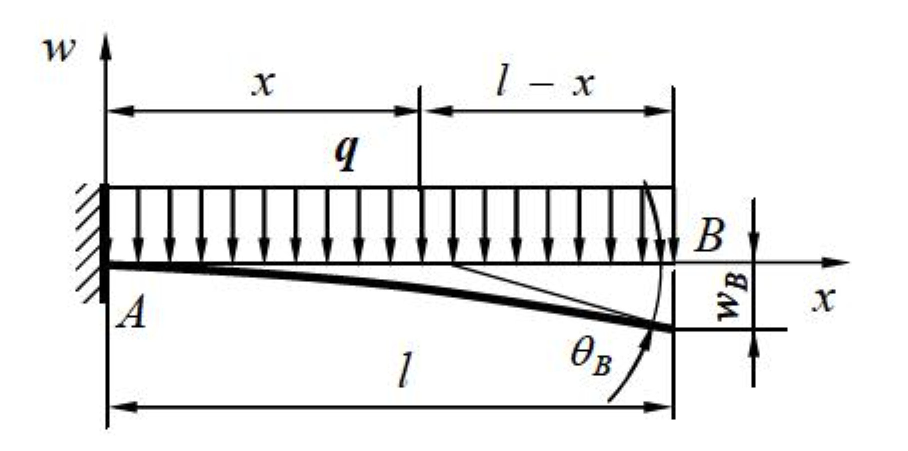


图 6.6

解：(1) 列出梁的弯矩方程。梁任意横截面上的弯矩为

$$M(x) = -\frac{1}{2}q(l-x)^2$$

(2) 求解转角方程和挠曲线方程。由式(6.7)，得挠曲线近似微分方程为

$$EIw'' = -\frac{1}{2}q(l-x)^2$$

积分后得

$$EIw' = \frac{1}{6}q(l-x)^3 + C \tag{a}$$

$$EIw = -\frac{1}{24}q(l-x)^4 + Cx + D \tag{b}$$

由悬壁梁的边界条件

$$x = 0\text{处，}\ w'_A = \theta_A = 0$$
$$x = 0\text{处，}\ w_A = 0$$

代入式(a)、式(b)，得

$$C = -\frac{ql^3}{6}$$

$$D = \frac{ql^4}{24}$$

将所得积分常数 C、D 代入式(a)、式(b)，得转角方程和挠曲线方程分别为

$$EIw' = \frac{1}{6}q(l-x)^3 - \frac{ql^3}{6}$$

$$EIw = -\frac{1}{24}q(l-x)^4 - \frac{1}{6}ql^3x + \frac{ql^3}{24}$$

(3) 计算自由端的挠度 $w(x)$ 和转角 θ_B。以截面 B 的横坐标 $x = l$ 代入以上两式得

$$\theta_B = w'_B = -\frac{ql^3}{6EI}$$

$$w_B = -\frac{ql^4}{8EI}$$

θ_B 为负，表示截面 B 的转角是顺时针转向的；w_B 为负，表示 B 点的挠度向下。

例 6.2 弯曲刚度 EI 为常数的简支梁 AB，在整个跨度 l 上受均布载荷 q 作用，如图 6.7 所示。试求梁 AB 的挠曲线方程，并确定其最大挠度 $w_{\max}$ 和两个支座的转角 θ_A 和 θ_B。

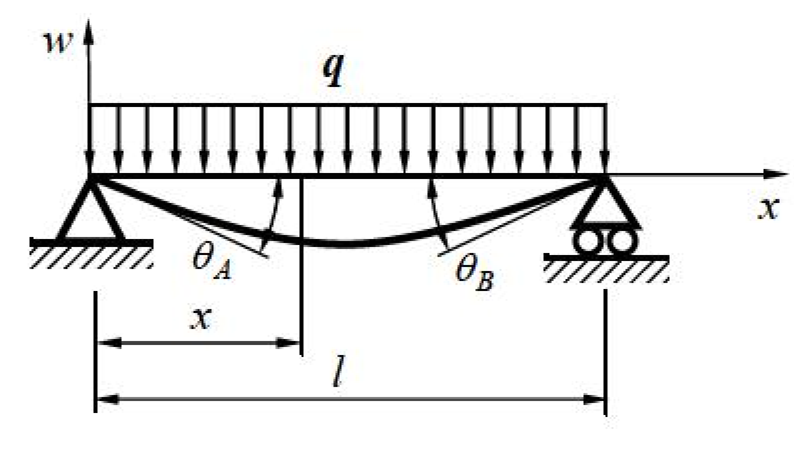


图 6.7

解：(1) 确定支座的支反力，列出梁的弯矩方程。梁的支反力为

$$F_A = F_B = \frac{ql}{2}$$

梁的弯矩方程为

$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{1}{2}qx^2 = \frac{q}{2}(lx - x^2)$$

(2) 求解转角方程和挠曲线方程。将上式代入式(6.8(b))、式(6.9(b))得

$$EIw' = \frac{ql}{4}x^2 - \frac{1}{6}qx^3 + C \tag{a}$$

$$EIw' = \frac{ql}{12}x^3 - \frac{1}{24}qx^4 + Cx + D \tag{b}$$

由简支梁的边界条件

$$x = 0 \text{ 处，} w_A = 0$$

$$x = 0 \text{ 处，} w_B = 0$$

代入式(b)，解得积分常数为

$$C=-\frac{ql^3}{24},\quad D=0$$

于是，梁的转角方程和挠曲线方程分别为

$$EIw'=\frac{ql}{4}x^2-\frac{q}{6}x^3-\frac{ql^3}{24} \tag{c}$$

$$EIw=\frac{ql}{12}x^3-\frac{q}{24}x^3--\frac{ql^3}{24}x \tag{d}$$

(3) 计算最大挠度 w_{max} 和两个支座的转角 θ_A 和 θ_B。

分别以 $x=0$、$x=l$ 代入式(c)得

$$\theta_A=-\theta_B=-\frac{ql^3}{24EI}$$

$w'=\theta=0$ 时，挠度 w 有极值，得

$$x=\frac{l}{2}$$

将 $x=l/2$ 代入式(d)，最大挠度为

$$w_{max}=-\frac{5ql^4}{384EI}$$

例 6.3 弯曲刚度 EI 为常数的简支梁 AB，跨度为 l。在与左支座 A 相距 $a(a\geqslant b)$处承受集中载荷 $\boldsymbol{F}$ 作用，如图 6.8 所示。求梁 AB 的挠曲线方程，支座的转角 θ_A 和 θ_B，中点 C 处的挠度 w_C。

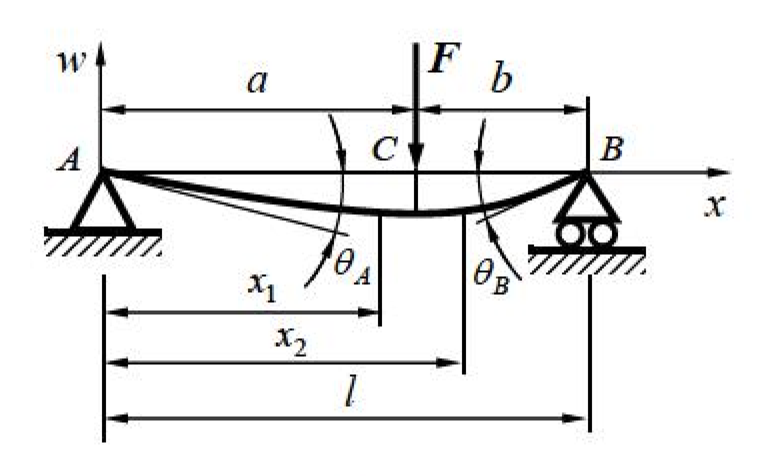


图 6.8

解：(1) 确定支座的支反力，列出梁的弯矩方程。梁的支反力为

$$F_A=\frac{b}{l}F,\quad F_B=\frac{a}{l}F$$

将梁从集中力 $\boldsymbol{F}$ 作用处分为两段，两段梁的弯矩方程分别如下。

对于 AD 段，有 $$M_1=F_Ax=\frac{Fb}{l}x\quad(0\leqslant x\leqslant a) \tag{a}$$

对于 DB 段，有 $$M_2=F_Ax-F(x-a)=F\frac{b}{l}x-F(x-a)\quad(a\leqslant x\leqslant l) \tag{b}$$

(2) 求解转角方程和挠曲线方程。将式(a)、式(b)代入式(6.7)得挠曲线近似微分方程为

$$EIw''=\frac{Fb}{l}x\quad(0\leqslant x\leqslant a) \tag{c}$$

$$EIw'' = F\frac{b}{l}x - F(x-a) \quad (a \leqslant x \leqslant l) \tag{d}$$

将式(c)积分后，得

$$EIw_1' = \frac{Fb}{2l}x^2 + C_1 \tag{e}$$

$$EIw_1 = \frac{Fb}{2l}x^3 + C_1x + D_1 \tag{f}$$

将式(d)积分后，得

$$EIw_2' = \frac{Fb}{2l}x^2 - \frac{F}{2}(x-a)^2 + C_2 \tag{g}$$

$$EIw_2 = \frac{Fb}{6l}x^3 - \frac{F}{6}(x-a)^3 + C_2x + D_2 \tag{h}$$

其中，C_1、D_1、C_2、D_2为积分常数，由支承处的约束条件和 C 截面处的连续条件确定。

在支座 A、B 两处的挠度为零，即

$$x = 0 \text{，} \quad w_1 = 0 \tag{i}$$

$$x = l \text{，} \quad w_2 = 0 \tag{j}$$

在 AC 段与 CB 段梁交界处的转角和挠度必须相等，即

$$x = a \text{，} \quad w_1' = w_2' \tag{k}$$

$$x = a \text{，} \quad w_1 = w_2 \tag{l}$$

将式(i)代入式(f)，得

$$D_1 = 0$$

将式(k)代入式(e)、式(g)，得

$$C_1 = C_2$$

将式(l)代入式(f)、式(h)，得

$$D_2 = 0$$

将式(j)代入式(h)，有

$$\frac{Fb}{6}l^2 - \frac{F}{6}b^3 + C_2l = 0$$

解得

$$C_1 = C_2 = \frac{Fb}{6l}(b^2 - l^2)$$

所得转角方程和挠度方程为

$$\theta_1 = w' = \frac{Fb}{6EIl}(3x^2 + b^2 - l^2) \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

$$w_1 = \frac{Fbx}{6EIl}(x^2 + b^2 - l^2) \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

$$\theta_2 = w_2' = \frac{Fb}{6EIl}\left[(3x^2 + b^2 - l^2) - \frac{3l}{b}(x-a)^2\right] \quad (a \leqslant x \leqslant l)$$

$$w_2=\frac{Fb}{6EIl}\left[(x^2+b^2-l^2)x-\frac{l}{b}(x-a)^3\right]\quad (a\leqslant x\leqslant l)$$

(3) 由转角方程和挠度方程求得支座的转角 θ_A 和 θ_B，中点 C 处的挠度 w_C 分别为

$$\theta_A=\frac{Fb}{6EIl}(b^2-l^2)=-\frac{Fab(l+b)}{6EIl}$$

$$\theta_B=\frac{Fb}{6EIl}(2l^2+b^2-3lb)=\frac{Fab(l+a)}{6EIl}$$

$$w_c=w_{l/2}=\frac{Fb(l/2)}{6EIl}[(l/2)^2+b^2-l^2]=-\frac{Fb}{48EI}(3l^2-4b^2)$$

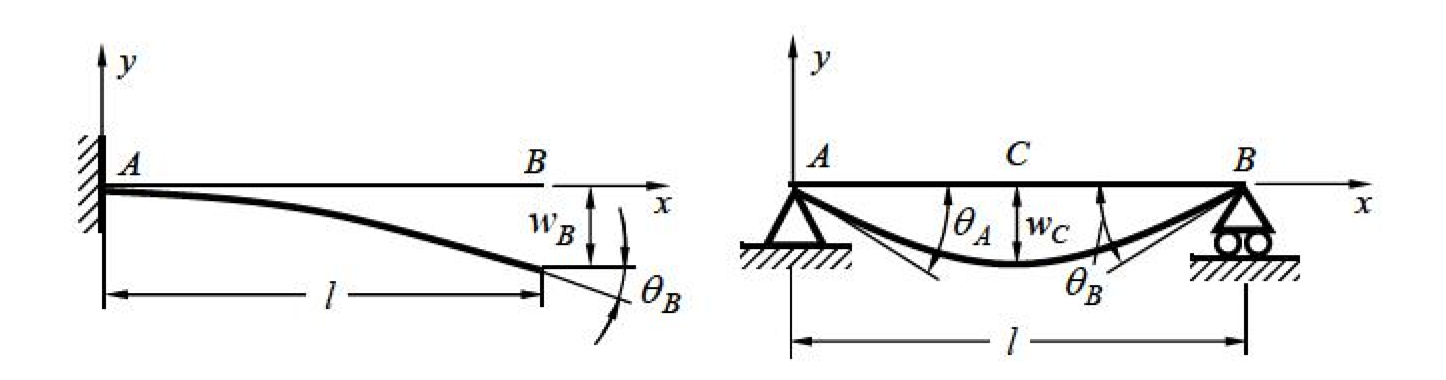
6.4 叠加法求梁的弯曲变形

除了使用积分法求解梁的挠度和截面转角之外，叠加法是另一种经常使用的实用方法。该方法可概述如下：在适当的条件下，由一些不同载荷同时作用所引起梁的挠度，可以通过对这些相同载荷单独作用所产生的挠度叠加得到。举例来说，如果 w_1 表示梁轴上某一点由负载 F_1 引起的挠度，w_2 表示同一点处由不同载荷 F_2 造成的挠度，那么该点处由负载 F_1 和 F_2 同时作用所引起的挠度为 w_1+w_2。

对于求解梁的挠度问题，应用叠加方法需要满足以下条件：①材料服从胡克定律，即负载与所引起的变形之间均是线性关系；②梁挠度和截面转角很小；③负载不会显著改变梁的原始几何尺寸，挠度的呈现并不改变其他负载适用的条件。上述 3 个条件确保梁的挠曲线方程是线性的。

积分法的优点是可以求出截面转角和挠度的一般表达式。然而，当只需确定某些特定截面的转角和挠度，而无须求出它们的一般方程时，积分法就显得过于烦琐。为此，可以将梁在某些简单载荷作用下的变形制成表格(见表 6.1)。使用叠加法，可以方便地求解出许多不同载荷条件下的挠度和截面转角。

表 6.1 梁在简单载荷作用下的挠度和转角



主要符号说明

w：沿 y 方向的挠度； θ_A：梁左端处的转角； θ_B：梁右端处的转角；

w_B：梁右端处的挠度； w_C：梁中点处的挠度

序 号	图 示	公 式
1	l	$w=-\frac{qx^2}{24EI}(6l^2-4lx+x^2)$ $w_E=\frac{ql^4}{8EI}\quad \theta_E=-\frac{ql^3}{6EI}$

续表

序　号	图　示	公　式
2		$w=-\dfrac{ql^2}{24EI}(6a^2-4ax+x^2)\quad(0\leqslant x\leqslant a)$ $w=-\dfrac{qa^3}{24EI}(4x-a)\quad(a\leqslant x\leqslant l)$ 在 $x=a$ 处：$w=-\dfrac{qa^4}{8EI}\quad\theta=-\dfrac{qa^3}{6EI}$ $w_B=-\dfrac{qa^3}{24EI}(4l-a)\quad\theta_B=-\dfrac{qa^3}{6EI}$
3		$w=-\dfrac{qbx^2}{12EI}(3l+3a-2x)$ $w=-\dfrac{q}{24EI}(x^4-4lx^3+6l^2x^2-4a^3x+a^4)$ 在 $x=a$ 处：$w=-\dfrac{qa^2b}{12EI}(3l+a)\quad\theta=-\dfrac{qabl}{2EI}$ $w_B=-\dfrac{q}{24EI}(3l^4-4a^3l+a^4)\quad\theta_B=-\dfrac{q}{6EI}(l^3-a^3)$
4		$w=-\dfrac{Fx^2}{6EI}(3l-x)$ $w_B=-\dfrac{Fl^3}{3EI}\quad\theta_B=-\dfrac{Fl^2}{2EI}$
5		$w=-\dfrac{Fx^2}{6EI}(3a-x)$ $w=-\dfrac{Fa^2}{6EI}(3x-a)\quad\theta=-\dfrac{Fa^2}{2EI}$ 在 $x=a$ 处：$w=-\dfrac{Fa^3}{3EI}\quad\theta=-\dfrac{Fa^2}{2EI}$ $w_B=-\dfrac{Fa^3}{6EI}(3l-a)\quad\theta_B=-\dfrac{Fa^2}{2EI}$
6		$w=-\dfrac{M_e x^2}{2EI}$ $w_B=\dfrac{M_e l^2}{2EI}\quad\theta_B=\dfrac{M_e L}{EI}$
7		$w=-\dfrac{M_e x^2}{2EI}\quad(0\leqslant x\leqslant a)$ $w=-\dfrac{M_e a}{2EI}(2x-a)\quad(a\leqslant x\leqslant l)$ 在 $x=a$ 处：$w=-\dfrac{M_e a^2}{2EI}\quad\theta=-\dfrac{M_e a}{EI}$ $w_B=-\dfrac{M_e a}{2EI}(2l-a)\quad\theta_B=-\dfrac{M_e a}{EI}$
8		$w=-\dfrac{q_0x^3}{120EIl}(10l^3-10l^2x+5lx^2-x^3)$ $w_B=-\dfrac{q_0l^4}{30EI}\quad\theta_B=-\dfrac{q_0l^3}{24EI}$

续表

序　号	图　示	公　式
9	q_0 l	$w=-\dfrac{q_0x^2}{120EIl}(20l^3-10l^2x+x^3)$ $w_B=-\dfrac{11q_0l^4}{120EI}$　　$\theta_B=-\dfrac{q_0l^3}{8EI}$
10	q l	$w=-\dfrac{qx}{24EI}(l^3-2lx^2+x^3)$ $w_C=w_{\max}=-\dfrac{5ql^4}{384EI}$　　$\theta_A=-\theta_B=-\dfrac{ql^3}{24EI}$
11	q $l/2$ $l/2$	$w=-\dfrac{qx}{384EI}(9l^3-24lx^2+16x^3)$　$\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{l}{2}\right)$ $w=-\dfrac{ql}{384EI}(8x^3-24lx^2+17l^2x-l^3)$　$\left(\dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l\right)$ $w_C=-\dfrac{5ql^4}{768EI}$　$\theta_A=-\dfrac{3ql^3}{128EI}$　$\theta_B=\dfrac{7ql^3}{384EI}$
12	q a b	$w=-\dfrac{qx}{24EIl}(a^4-4a^3l+4a^2l^2+2a^2x^2-4alx^2+lx^3)$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ $w=-\dfrac{qa^2}{24EIl}(-a^2l+4l^2x+a^2x-6lx^2+2x^3)$　$(a\leqslant x\leqslant l)$ $\theta_A=-\dfrac{qa^2}{24EIl}(2l-a)^2$　$\theta_B=\dfrac{qa^2}{24EIl}(2l^2-a^2)$ $w_C=-\dfrac{qa^5}{24EIl}\left[\dfrac{3l^3}{4a^3}-\dfrac{l}{2a}+\dfrac{l^5}{a^5}\left(1-\dfrac{2b}{l}\right)^4\right]$ (当 $a>b$ 时) $w_C=-\dfrac{qa^5}{24EIl}\left(\dfrac{3l^3}{4a^3}-\dfrac{l}{2a}\right)$ (当 $a<b$ 时)
13	F $l/2$ $l/2$	$w=-\dfrac{Fx}{48EI}(3l^2-4x^2)$　$\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$ $w_C=w_{\max}=-\dfrac{Fl^3}{48EI}$　$\theta_A=-\theta_B=-\dfrac{Fl^2}{16EI}$
14	F a b	$w=-\dfrac{Fbx}{6EIl}(l^2-b^2-x^2)$　$(0\leqslant x\leqslant a)$ $w=-\dfrac{Fbx}{6EIl}\left[\dfrac{l}{b}(x-a)^3+(l^2-b^2)x-x^3\right]$　$(0\leqslant x\leqslant a)$ $\theta_A=-\dfrac{Fab(l+b)}{6EIl}$　$\theta_B=\dfrac{Fab(l+a)}{6EIl}$ 如果 $a\geqslant b$，$w_C=-\dfrac{Fb(3l^2-4b^2)}{48EI}$ 如果 $a\leqslant b$，$w_C=-\dfrac{Fa(3l^2-4a^2)}{48EI}$ 如果 $a\geqslant b$，$x_1=\sqrt{\dfrac{l^2-b^2}{3}}$，$w_{\max}=\dfrac{Fb\sqrt{(l^2-b^2)^3}}{9\sqrt{3}EIl}$

续表

序　号	图　示	公　式
15	M_e　l	$w=-\dfrac{M_e x}{6EIl}(2l^2-3lx+x^2)$ $w_C=-\dfrac{M_e L^2}{16EI}$　$\theta_A=-\dfrac{M_e l}{3EI}$　$\theta_B=\dfrac{M_e l}{6EI}$ $x=l\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$　$w_{max}=-\dfrac{M_e l^2}{9\sqrt{3}EI}$
16	M_e　a　b	$w=-\dfrac{M_e x}{6EIl}(6al-3a^2-2l^2-x^2)$　$(0\leqslant x\leqslant a)$ $\theta_A=-\dfrac{M_e}{6EIl}(6al-3a^2-2l^2)$　$\theta_B=-\dfrac{M_e}{6EIl}(3a^2-l^2)$
17	q_0　l	$w=-\dfrac{q_0 x}{360EIl}(7l^4-10l^2x^2+3x^4)$ $w_C=-\dfrac{5q_0 l^4}{768EI}$　$\theta_A=-\dfrac{7q_0 l^3}{360EI}$　$\theta_B=\dfrac{q_0 l^3}{45EI}$ $x=0.519l$　$w_{max}=-0.00652\dfrac{q_0 l^4}{EI}$

接下来通过举例介绍叠加法求解梁的弯曲变形问题。

例 6.4　长度为 l 且弯曲刚度 EI 为常数的悬臂梁 AB，其左半部分承受均布载荷 $\boldsymbol{q}$ 作用，自由端 B 承受集中载荷 $\boldsymbol{F}$ 作用，如图 6.9 所示。试求自由端 B 处的挠度 w_B 和截面转角 θ_B。

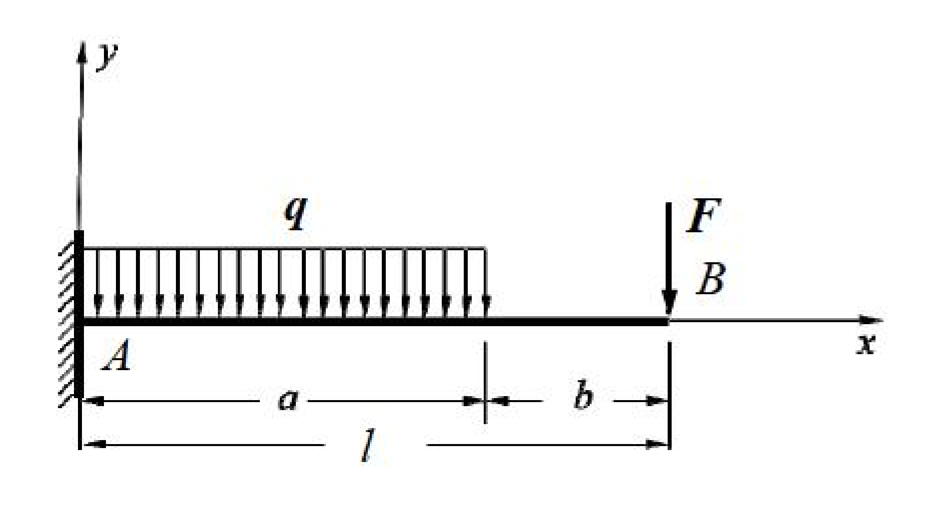


图 6.9

解： 为求解该问题，将给定的负载分成两种情况来单独考虑。

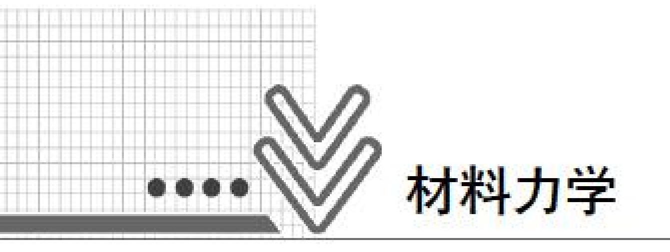
(1)　均布载荷 $\boldsymbol{q}$ 单独作用时，根据表 6.1 中的第 2 种情况，可直接得到 B 处的转角和挠度分别为

$$\theta_{Bq}=-\frac{qa^3}{6EI},\quad w_{Bp}=-\frac{qa^3}{24EI}(4l-a)$$

(2)　集中负载 $\boldsymbol{F}$ 单独作用时，对应的挠度和转角分别为表 6.1 中的第 4 种情况，即

$$\theta_{BF}=-\frac{Fl^2}{2EI},\quad w_{BF}=-\frac{Fl^3}{3EI}$$

根据叠加原理，联合负载作用的转角和挠度分别为



$$\theta_B = \theta_{Bq} + \theta_{BF} = -\frac{qa^3}{6EI} - \frac{Fl^2}{2EI}$$

$$w_B = w_{Bq} + w_{BF} = -\frac{qa^3}{24EI}(4l-a) - \frac{Fl^3}{3EI}$$

例 6.5　试计算图 6.10(a)所示外伸梁截面 B 的转角和端点 C 的挠度。梁的弯曲刚度 EI 为常数。$l = 4\text{m}$，$a = 2\text{m}$，$q = 5\text{kN/m}$，$F = 10\text{kN}$。

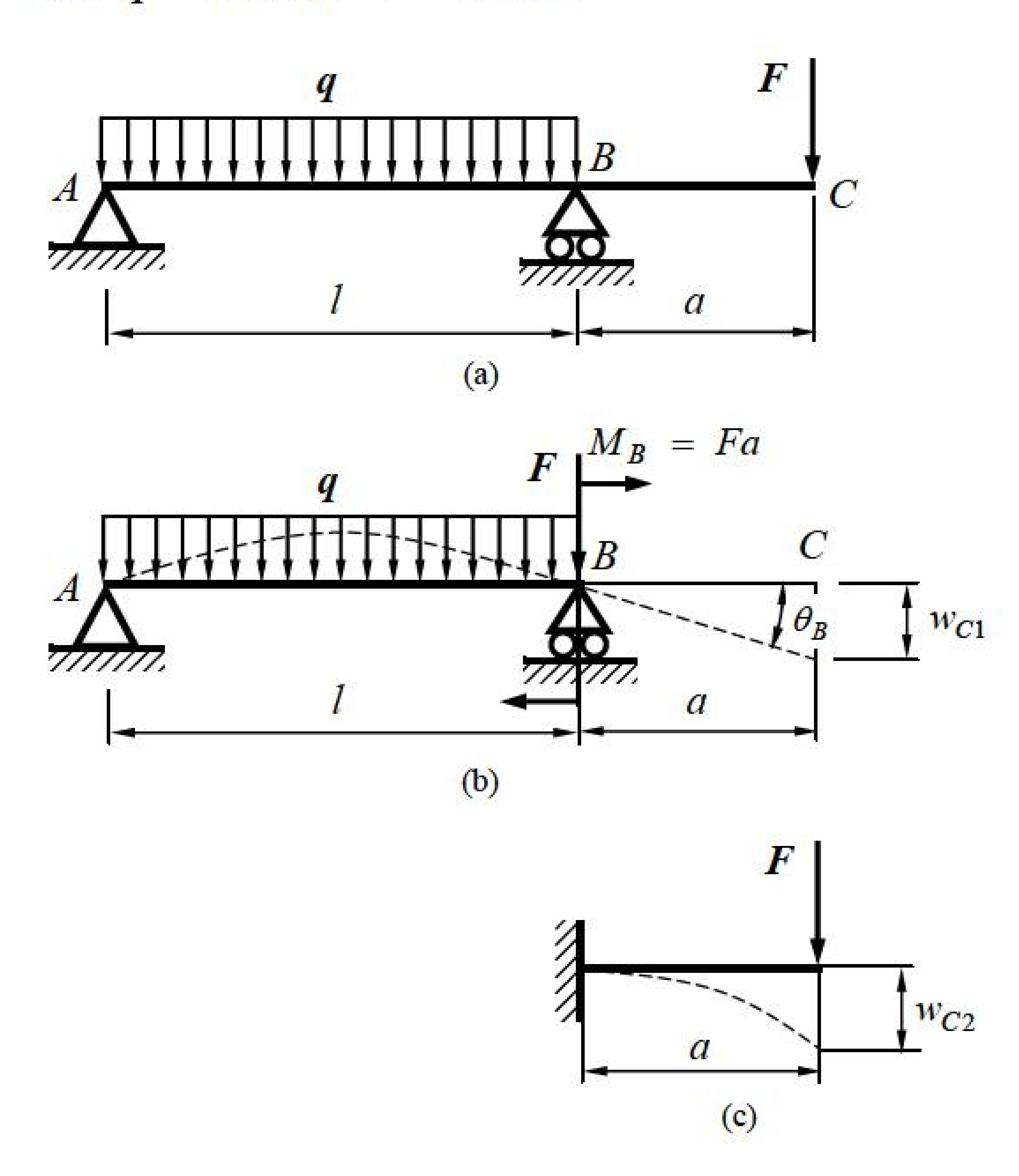


图 6.10

解：因为表 6.1 未包含外伸梁的挠度和转角，因此可将外伸梁假想沿 B 截面截开，视为一简支梁 AB 和悬臂梁 BC。对于假想的简支梁上，除受均布载荷 $\boldsymbol{q}$ 作用外，在截面 $\boldsymbol{B}$ 处还受到一个力偶矩 $M = Fa$ 和集中力 $\boldsymbol{F}$ 的作用，而集中力 $\boldsymbol{F}$ 作用在支座上不会引起梁的变形。

(1)　计算简支梁中 B 截面的转角。

如图 6.10(b)所示，简支梁截面 B 的转角 θ_B 由均布载荷 $\boldsymbol{q}$ 引起的转角 θ_{Bq} 和由力偶矩 M_B 引起的转角 θ_{BM} 叠加而得。查表 6.1 后有

$$\theta_B = \theta_{Bq} + \theta_{BM} = \frac{ql^3}{24EL} - \frac{M_B l}{3EL} = \frac{ql^3}{24EL} - \frac{Fal}{3EL}$$

$$= \frac{5\text{kN/m} \times (4\text{m})^3}{24EI} - \frac{4\,\text{kN} \times 2\text{m} \times 4\text{m}}{24EI} = -\frac{13.33\text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$

(2)　计算端截面 C 的挠度。

原外伸梁截面 C 的挠度 w_C，除假想悬臂梁(见图 6.10(c))产生的挠度 w_{C2} 外，还有由于截面 B 的转动使 BC 段做刚体转动而产生的挠度 w_{C1} (见图 6.10(b))。由叠加原理，端截面 C 的总挠度为

$$w_C = w_{C1} + w_{C2} = w_{C1} + \theta_B a = -\frac{Fa^3}{3EI} + \theta_B a$$

$$= -\frac{10\text{kN}\times(2\text{m})}{3EI} + \left(-\frac{13.33\text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\right)\times 2\text{m} = -\frac{53.33\text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

6.5　梁的刚度条件

第 1 章 1.1 节介绍了材料力学的基本任务，知道工程结构或机械在正常工作环境下其组成构件不仅要满足强度要求，还需满足刚度要求。前一章讨论了梁的强度条件，但没有介绍梁的刚度条件。本节进一步介绍梁的刚度条件，即在按强度条件确定梁的截面后，再对梁进行刚度校核。

在各类工程设计中，对构建弯曲位移的许用值有不同的规定。对于梁的挠度，其许用值通常用许用的挠度与跨度之比值$\left[\frac{w}{l}\right]$作为标准。例如，在机械制造工程中，对主要的轴，$\left[\frac{w}{l}\right]$限制在$\frac{1}{5000}$～$\frac{1}{10000}$范围内。对传动轴在支座处的许用转角$[\theta]$一般限制在 0.005～0.001rad 范围内；在土建工程中，$\left[\frac{w}{l}\right]$通常限制在$\frac{1}{250}$～$\frac{1}{1000}$范围内。

梁的刚度条件可表达为

$$\left.\begin{aligned}\frac{w_{\max}}{l} &\leqslant \left[\frac{w}{l}\right] \\ \theta_{\max} &\leqslant [\theta]\end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

通过计算分析表明，如构件强度能满足要求，刚度条件一般也能满足。因此，在设计工作中，刚度要求常处于从属地位。但当对构建的位移限制很严，或按强度条件所选用的构件截面过于单薄时，刚度条件也可能起控制作用。

例 6.6　图 6.11(a)所示为钢制圆轴，左端受力为 $\boldsymbol{F}$，尺寸如图 6.11 所示，已知 $F = 20\text{kN}$，$a = 1\text{m}$，$l = 2\text{m}$，$E = 210\text{GPa}$，轴承 B 处的许用转角 $[\theta] = 0.5°$。试根据刚度要求确定该轴的直径。

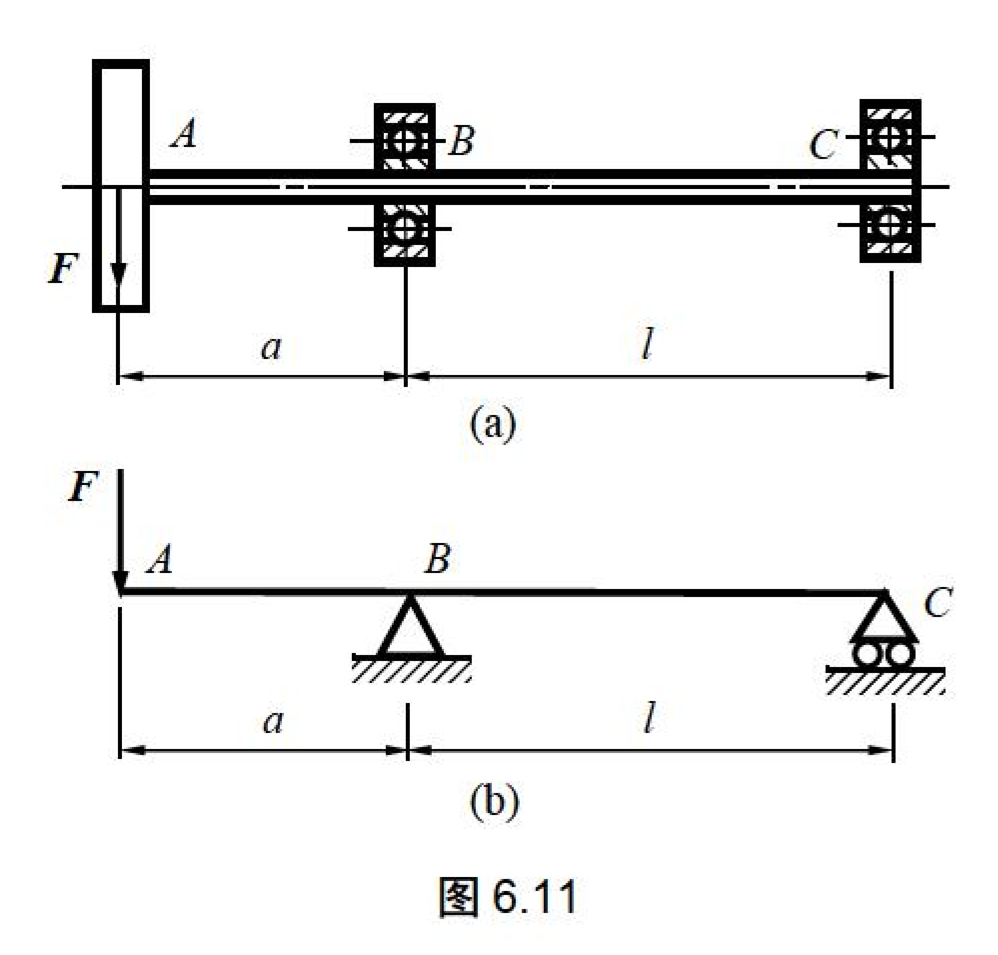
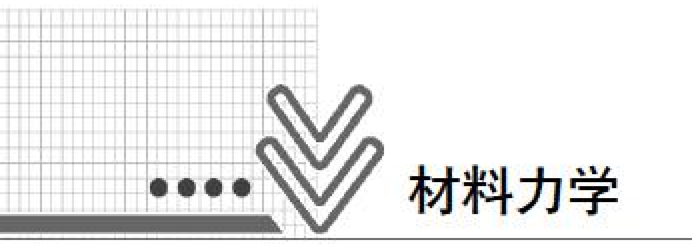


图 6.11



解：为使设计的轴满足刚度要求，先计算 B 处的转角值，使其不超过许用转角。

(1) 计算 B 截面的转角。

圆轴的计算简图如图 6.11(b)所示，为一外伸梁。因外伸梁相当于简支梁 BC 和悬臂梁 AB 的组合，B 截面的转角 θ_B 由作用在 B 截面的力偶矩 $M_B = Fa$ 所产生。查表可确定 θ_B 为

$$\theta_B = \frac{M_B l}{3EI} = \frac{Fal}{3EI}$$

(2) 根据刚度条件确定轴的直径。

刚度条件为

$$\theta_{\max} = \theta_B \leqslant [\theta]$$

将$[\theta]$的单位转换成为 rad(弧度)后，有

$$\theta_B = \frac{Fal}{3EI} = \frac{Fal}{3E(\pi d^4/64)} \leqslant \frac{0.5\times\pi}{180}$$

$$d \geqslant \sqrt[4]{\frac{(180\times 64)Fal}{(3\times 0.5)\pi^2 E}} = \sqrt[4]{\frac{180\times 64\times 20\times 10^3\times 1\times 2}{3\times 0.5\times \pi^2\times 210\times 10^9}}\text{m} = 0.110\text{m} = 110\text{mm}$$

6.6 提高梁刚度的措施

根据挠曲线的近似微分方程及其积分表达式(见表 6.1)可以看出，梁的弯曲变形(挠度和转角)是载荷(M、F、q)、跨度 l、梁截面的惯性矩 I、材料弹性模量 E 等参数的函数。具体而言：①梁的变形与材料的弹性模量 E 成反比；②梁的变形与截面的惯性矩 I 成反比；③梁的变形与跨度 l 的 n 次幂成正比(在各种不同载荷情况下，n 的取值范围为 1～4)。由此可见，为了提高梁的刚度，可以从上述几个因素考虑。

6.6.1 选择合理的截面形状，增大梁的弯曲刚度 *EI*

不同形状的截面，尽管面积相等，但惯性矩 I 却并不一定相等。所以选取形状合理的截面，增大截面惯性矩的数值，是提高弯曲刚度的有效措施。例如，对于圆形、矩形和工字钢 3 种不同截面形状，当截面面积相等时(如 $A = 35\text{cm}^2$)，它们的惯性矩分别为 $101.3\,\text{cm}^4$、$210.56\,\text{cm}^4$、$2370\,\text{cm}^4$。工字钢截面的惯性矩分别是圆形和矩形的 23 倍、11 倍。所以，工程上常采用工字形、箱形等截面。

因为各种钢材的弹性模量 E 大致相同(200～235GPa)，为提高弯曲刚度而采用高强度钢材，效果并不明显。综合考虑，通常选择惯性矩大的截面形状。

6.6.2 合理选用载荷类型，改善梁的结构布局减少跨长

从表 6.1 中可以看出，在梁受同量载荷(如第 10、13 种载荷类型)下，选用分布载荷或分散载荷比集中载荷产生的挠度小。

由于梁的挠度和转角值与其跨度的 n 次幂成正比，因此，设法缩短梁的跨度，能显著减少其挠度和转角值。在集中力作用下，挠度与跨度 l 的 3 次方成正比。如跨度 l 缩短一

半，则挠度减为原来的 1/8。因此，刚度的提高是非常显著的。例如，桥式起重机的钢梁通常采用两端外伸的结构，从而能缩短跨度，减少梁的最大挠度值，如图 6.12(a)所示。在长度不能缩短的情况下，可采用增加支承的方法提高梁的刚度。例如，在悬臂梁的自由端或者简支梁的跨中增加一个支座，均可使梁的挠度显著减少，如图 6.12(b)和图 6.12(c)所示。但采取这种措施后，原来的静定梁就变成了超静定梁。关于超静定梁的解法将在 6.7 节中介绍。

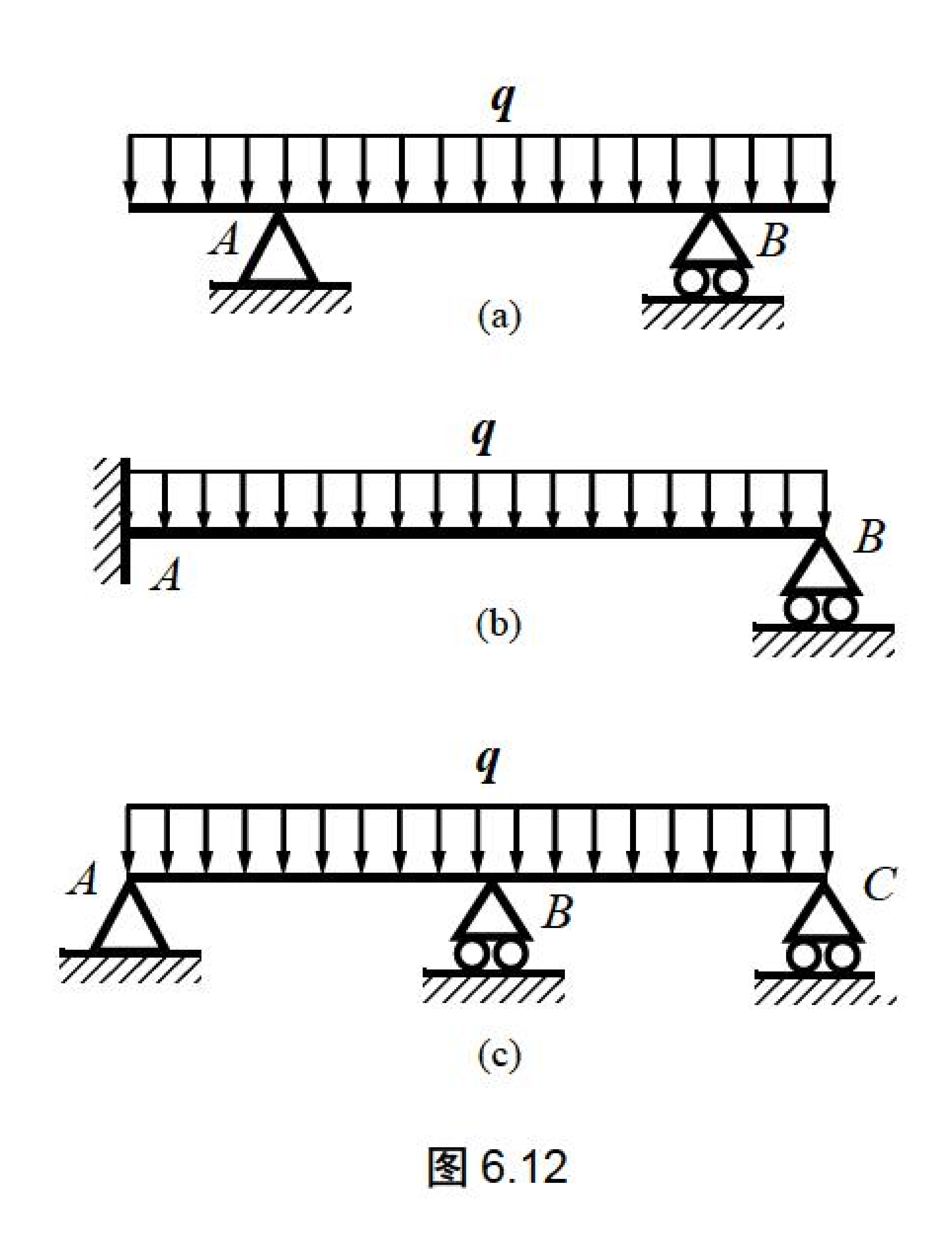


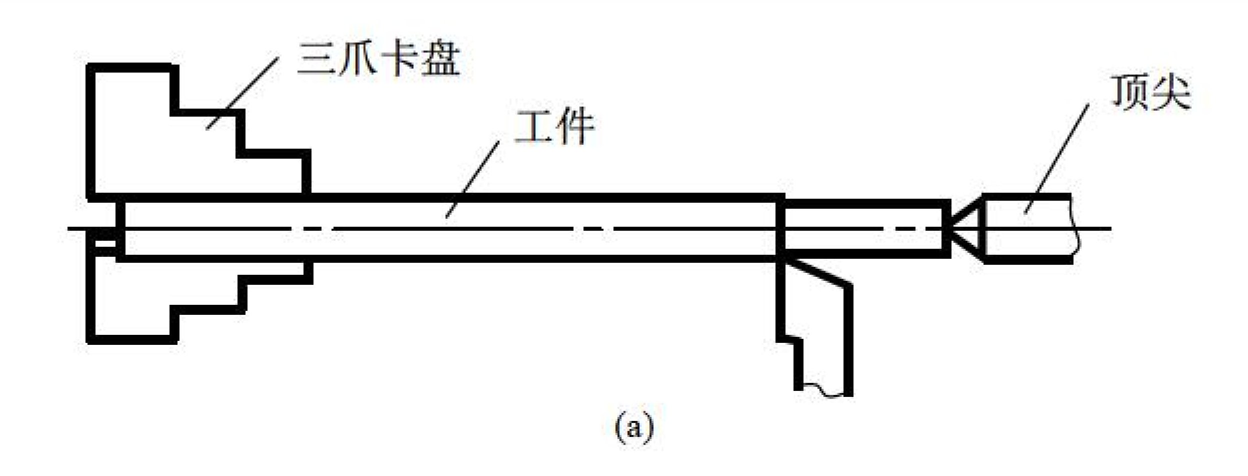
图 6.12

6.7　简单超静定梁

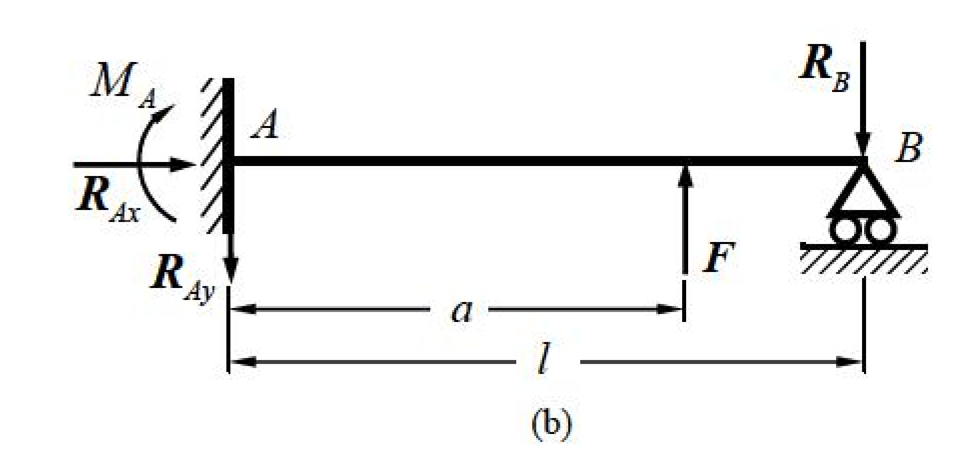
本章前面所讨论梁的支反力、剪力和弯矩都能通过静力学平衡方程确定，这类问题称为梁的静定问题。但在实际问题中，有时为减少结构内的应力或变形，增加梁的强度和刚度，往往会采用更多的构件或支座。例如，长跨度的悬臂梁和简支梁，为降低其最大弯矩和最大挠度，会在跨中增加一个支座，如图 6.12(b)和图 6.12(c)所示。又如，在车削细长工件时，为了减少工件在切削过程中的弯曲变形，提高加工精度，在工件的左端除由卡盘夹紧外，右端还会安装尾顶尖，如图 6.13(a)所示。把卡盘夹紧的一端简化成固定端，尾顶尖简化为铰支座，得到工件在切削力 $\boldsymbol{F}$ 作用下的力学模型如图 6.13(b)所示。由于平面任意力系仅有 3 个独立的平衡方程，而梁的 4 个支反力不可能仅由静力平衡方程确定。像这类不能单凭静力学平衡方程求解的问题，称为梁的超静定问题。

在求解梁的超静定问题时，关键是寻找变形协调方程。其基本方法可概述如下。

(1)　先假设将梁的某一支座当作多余约束予以解除，在该处施加与所解除的约束相对应的支反力，并假设支反力为已知，这样把原先的超静定梁在形式上转变为静定梁。



(a)



(b)

图 6.13

(2) 分别计算不同载荷(外部载荷和支反力)单独作用下支座的挠度，再根据叠加法求出支座处总的挠度表达式。

(3) 根据支座处的边界条件，得到变形协调方程。

(4) 将力与位移间的物理关系代入变形协调方程，即可求得多余未知力。求得多余未知力后，其余的支反力以及构件的内力、应力或变形均可按静定梁的方法进行计算。

接下来的两个例子介绍使用上述方法求解简单超静定梁。

例 6.7 试计算图 6.14(a)所示超静定梁的所有支反力。假设梁的弯曲刚度 EI 为常数。

解：(1) 解除右端支座 B 的约束，用支反力 F_B 代替它。假定 F_B 是已知的，这样就把原来超静定梁在形式上转变为静定的悬臂梁，如图 6.14(b)所示。

(2) 已知载荷 F 和 F_B 情况下，根据静力平衡方程式

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} + F_B - F = 0$$
$$\sum M_A = 0 \qquad M_A + F_B l - Fa = 0$$

可以求出

$$F_{Ay} = F - F_B \qquad\qquad M_A = Fa - F_B l$$

(3) 使用叠加法求解静定梁在 B 处的挠度。如果在 F 和 F_B 各自单独作用时 B 处的挠度分别为 w_{BF} 和 w_{BB}。根据表 6.1，可以查出 F 单独作用下 B 处的挠度为

$$w_{BF} = -\frac{Fa^2}{6EI}(3l-a)$$

如图 6.14(c)所示，同样地，可查出图 6.14(d)所示 F_B 单独作用下 B 处的挠度为

$$w_{BB} = \frac{F_B l^3}{3EI}$$

则在它们共同作用下，B 端的挠度为

$$w_B = w_{BF} + w_{BB} = -\frac{Fa^2}{6EI}(3l-a) + \frac{F_B l^3}{3EI}$$

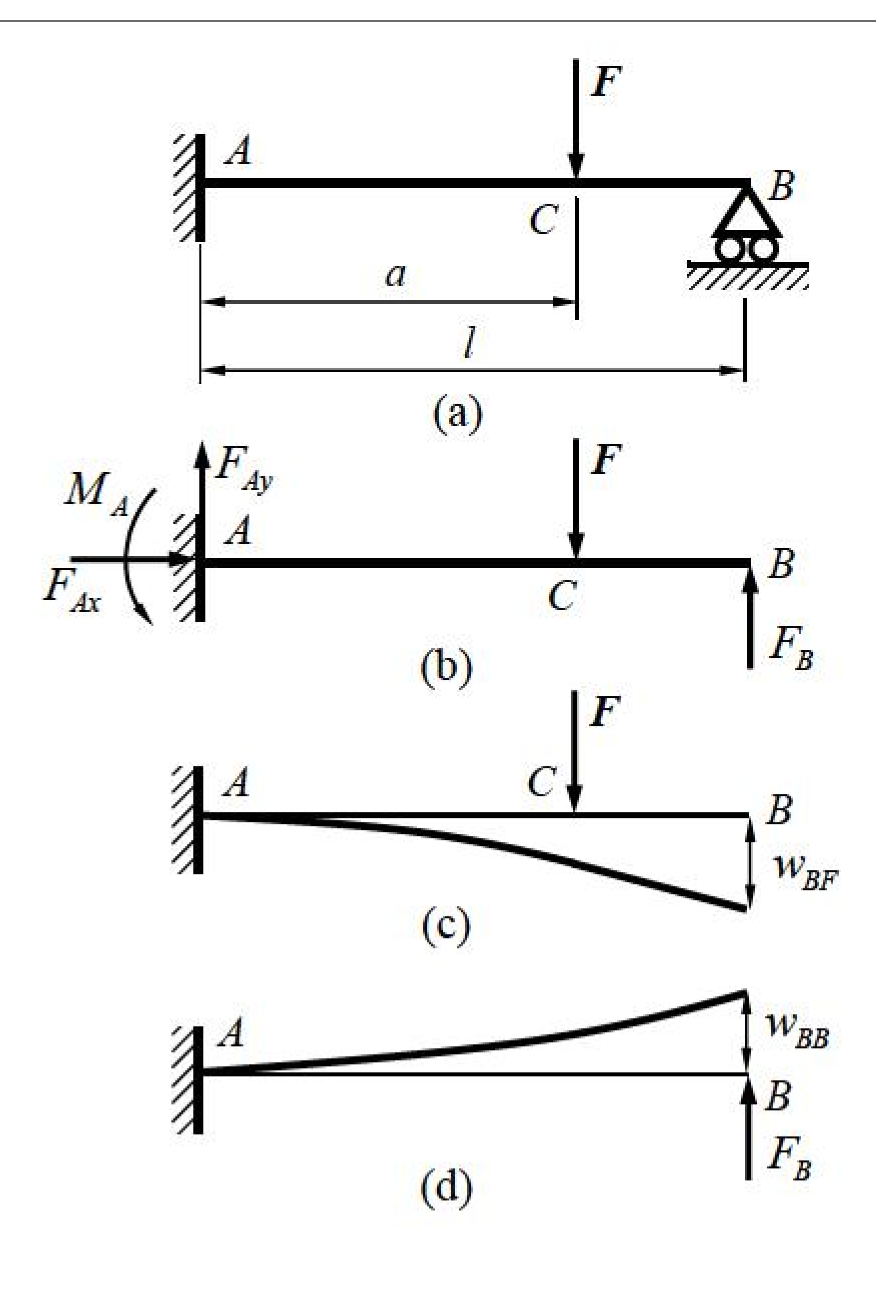


图 6.14

(4) 求出变形协调方程。由于 B 端是铰支座，根据边界条件，支座处的挠度为零，即有

$$w_B = w_{BF} + w_{BB} = 0$$

这就是变形协调方程。

(5) 求出所有反力。根据变形协调方程，可以求出

$$F_B = \frac{F}{2}\left(\frac{3a^2}{l^2} - \frac{a^3}{l^3}\right)$$

将 F_B 代入静力平衡方程，得

$$F_{Ay} = F - F_B = F\left(1 - \frac{3a^2}{2l^2} + \frac{a^3}{2l^3}\right)$$

$$M_A = Fa - F_B l = Fa\left(1 - \frac{3a}{2l} + \frac{a^2}{2l^2}\right)$$

例 6.8 弯曲刚度 $EI = 5\times10^6\,\mathrm{N\cdot m^2}$ 的梁及其承载情况如图 6.15(a)所示，已知 $a = 4\mathrm{m}$，$b = 3\mathrm{m}$，$c = 2\mathrm{m}$，$q = 20\mathrm{kN/m}$，$F = 30\mathrm{kN}$。试求梁的支反力。

解：该梁为一次超静定梁，可以用解超静定梁的基本方法，即去掉中间的多余约束用支反力 F_B 代替，转变为有 3 个载荷($q = 20\mathrm{kN/m}$，$F = 30\mathrm{kN}$，F_B)共同作用的简支梁，使用叠加法和变形协调方程求解静定梁。下面介绍一种更加简便的方法。

(1) 选取基本静定系。

可将连续梁假想分别沿 B 截面左、右截开，视为一简支梁 AB 受均布载荷 q、支座 B 处的力偶矩 M_B 和集中力 F_s 共同作用，基本静定系如图 6.15(b)所示；另一简支梁 BC 受集中力 F、支座 B 处的力偶矩 M_B 和集中力 F_s 共同作用，基本静定系如图 6.15(c)所示。其中集中力 F_s 作用在支座上不会引起梁的变形。

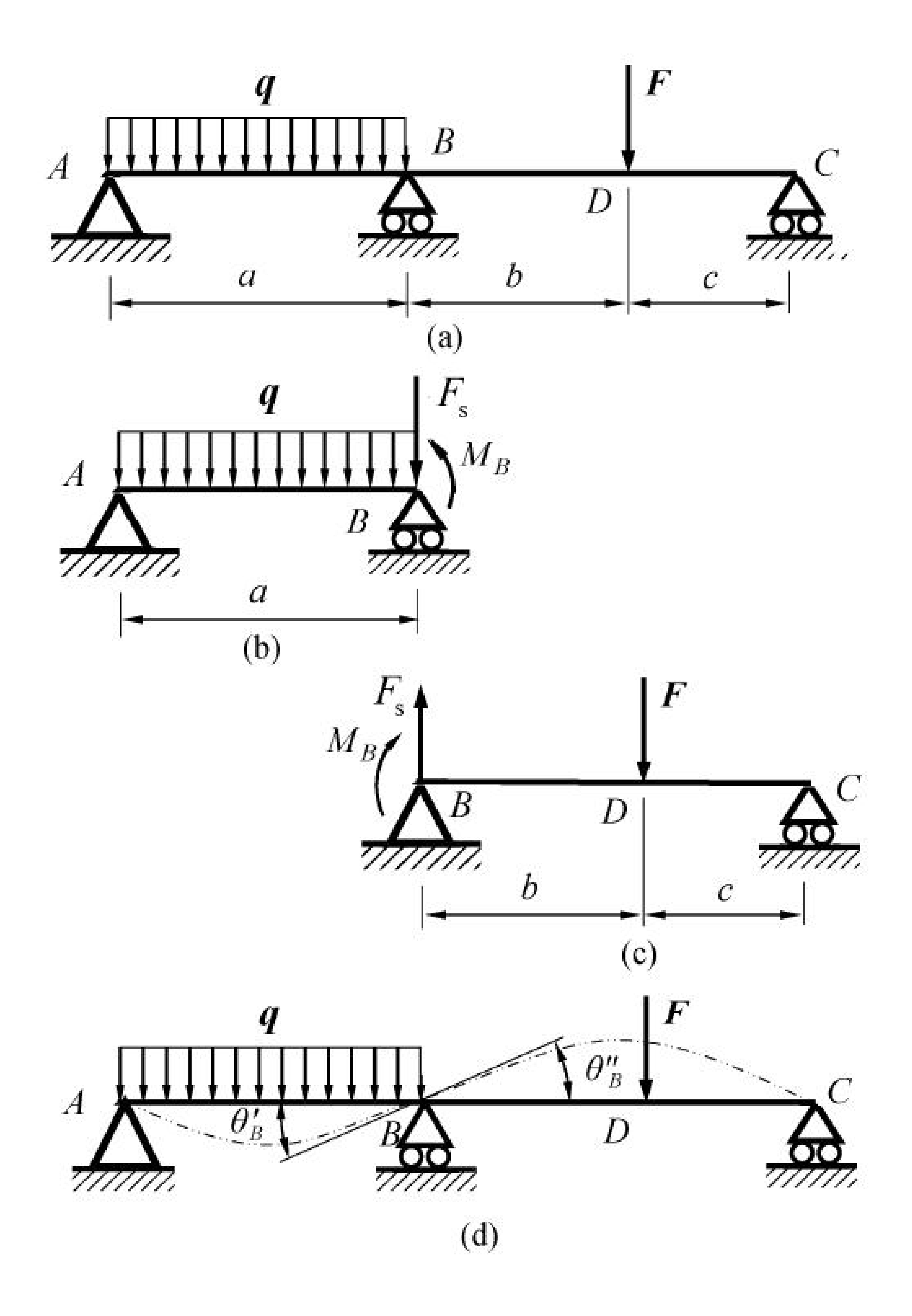


图 6.15

(2) 求解未知力偶矩 M_B。

查表 6.1 并用叠加法，简支梁 AB 的截面 B 的转角 θ_B' 为

$$\theta_B' = \frac{qa^3}{24EI} + \frac{M_B a}{EI} \tag{a}$$

简支梁 BC 的截面 B 的转角 θ_B'' 为

$$\theta_B' = -\frac{M_B(b+c)}{3EI} - \frac{Fbc(b+2c)}{6EI(b+c)} \tag{b}$$

连续梁的变形几何相容条件是简支梁 AB 的截面 B 的转角与简支梁 BC 的截面 B 的转角相等，如图 6.15(d)所示。故有

$$\theta_B' = \theta_B'' \tag{c}$$

式(a)、式(b)代入式(c)得

$$\frac{qa^3}{24EI} + \frac{M_B a}{3EI} = -\frac{M_B(b+c)}{3EI} - \frac{Fbc(b+2c)}{6EI(b+c)}$$

$$M_B = -\frac{1}{a+b+c} \times \left[\frac{qa^3}{8} + \frac{Fbc(b+2c)}{2(b+c)}\right]$$

$$= \frac{1}{4+3+2}\left[\frac{20\times 4^3}{8} + \frac{30\times 3\times 2\times(3+2)}{2\times(3+2)}\right]\mathrm{kN\cdot m} = -31.8\mathrm{kN\cdot m}$$

求得 M_B 为负值，表明截面 B 上的弯矩与所假设的正弯矩相反，是负弯矩。

在基本静定系中，由静力学平衡方程解得

$$F_A = 32.05\text{kN}$$
$$F_B = 66.35\text{kN}$$
$$F_C = 11.64\text{kN}$$

上述方法很适合求解有多个中间支座的连续梁的支反力。由此方法所推得的补充方程中会包含有相邻三支座的弯矩，故称为三弯矩方程。

本 章 小 结

梁弯曲变形时，梁的轴线会弯成曲线，称为梁的挠曲线。度量弯曲变形的两个基本量是挠度和转角。横截面形心在垂直于轴线方向的线位移称为该截面的挠度，用 w 表示，向上的挠度为正。梁的横截面对其原来位置转过的角度，称为转角，用 θ 表示，逆时针方向的转角为正。

使用叠加法，可以方便地求解出许多不同载荷条件下梁的挠度和转角。不同载荷同时作用所引起梁的挠度和转角，可以通过对这些相同载荷单独作用所产生的挠度和转角叠加得到。

设计工作中，刚度要求常处于从属地位。但当对构建的位移限制很严，刚度条件也可能起控制作用。提高梁刚度的主要措施有：①选择合理的截面形状，增大梁的弯曲刚度 EI；②合理选用载荷类型，改善梁的结构布局减少跨长。

简单超静定梁亦可通过变形协调方程获得补充方程的方法求解。三弯矩方程是求解有多个中间支座的连续梁的便捷方法。

习　　题

6.1　已知悬臂梁的挠曲线方程为

$$w(x) = \frac{M_e x^2}{2EI}$$

试回答下面的问题：(1) 描述作用在梁上的载荷；(2) 画出梁的弯矩图。

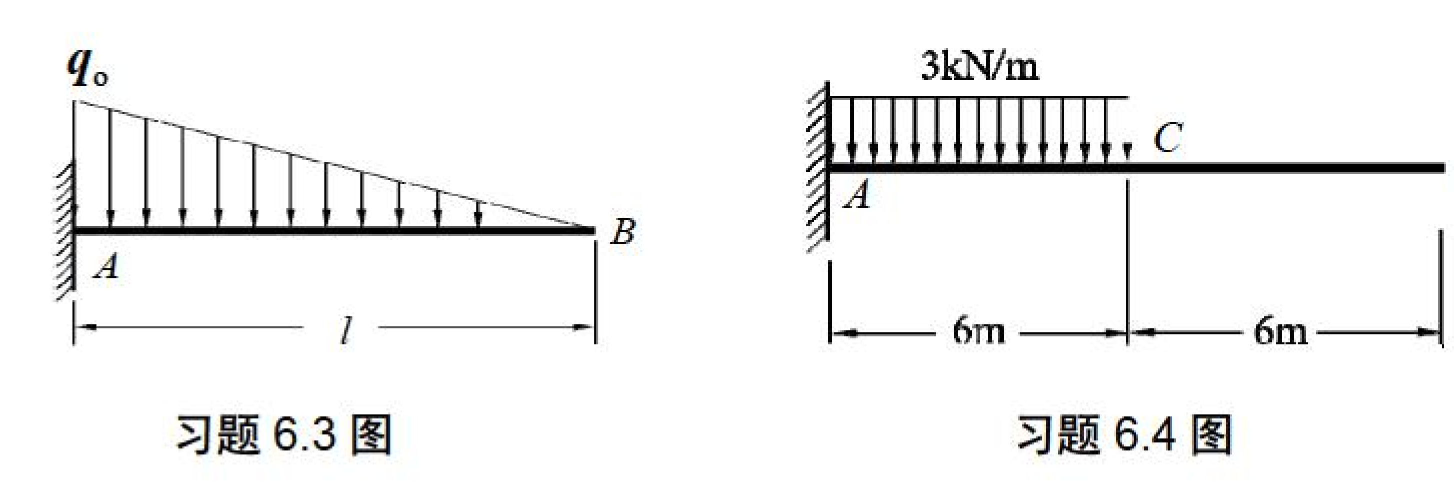
6.2　已知简支梁的挠曲线方程为

$$w(x) = \frac{q_0}{24EI}(2lx^3 - x^4 - l^3 x)$$

试回答下面的问题：(1) 推导梁的斜率方程；(2) 推导梁的弯矩方程；(3) 描述作用在梁上的载荷。

6.3　如习题 6.3 图所示，悬臂梁 AB 承受线性变化的分布载荷作用，最大载荷集度 q_0。试推导梁的挠曲线方程，并求出自由端的挠度 w_B 和转角 θ_B 的公式。

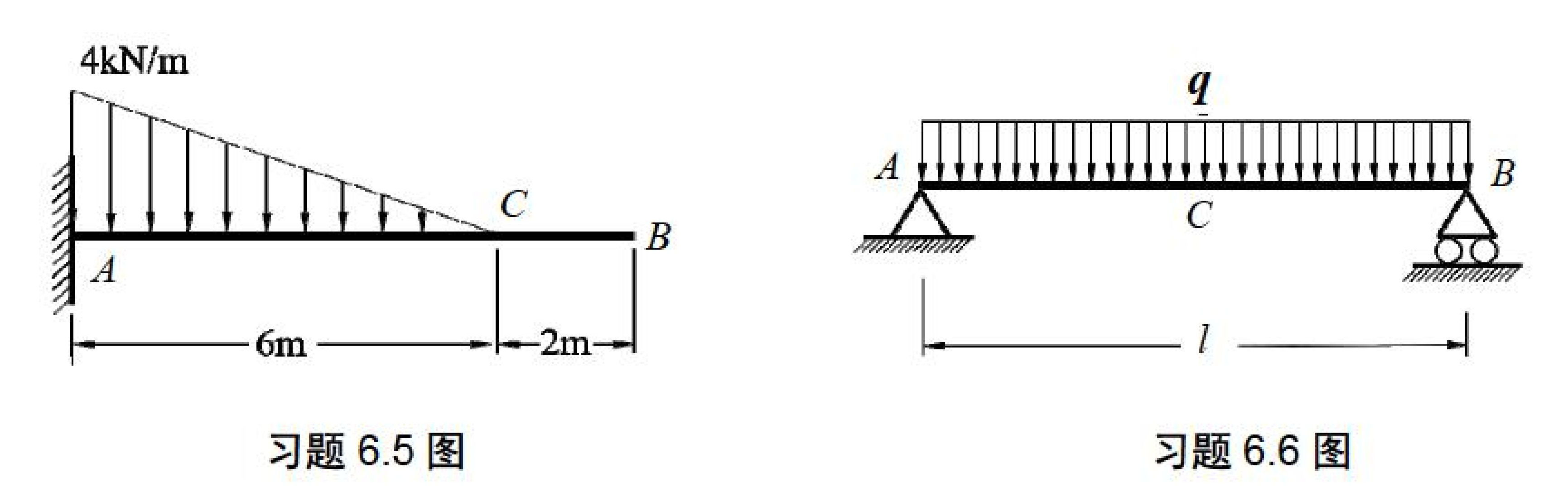
6.4　推导习题 6.4 图所示悬臂梁的挠曲线方程，计算 AB 端点 B 在分布载荷 q 作用下的挠度。假设梁的弯曲刚度 EI 为常数。



习题 6.3 图　　习题 6.4 图

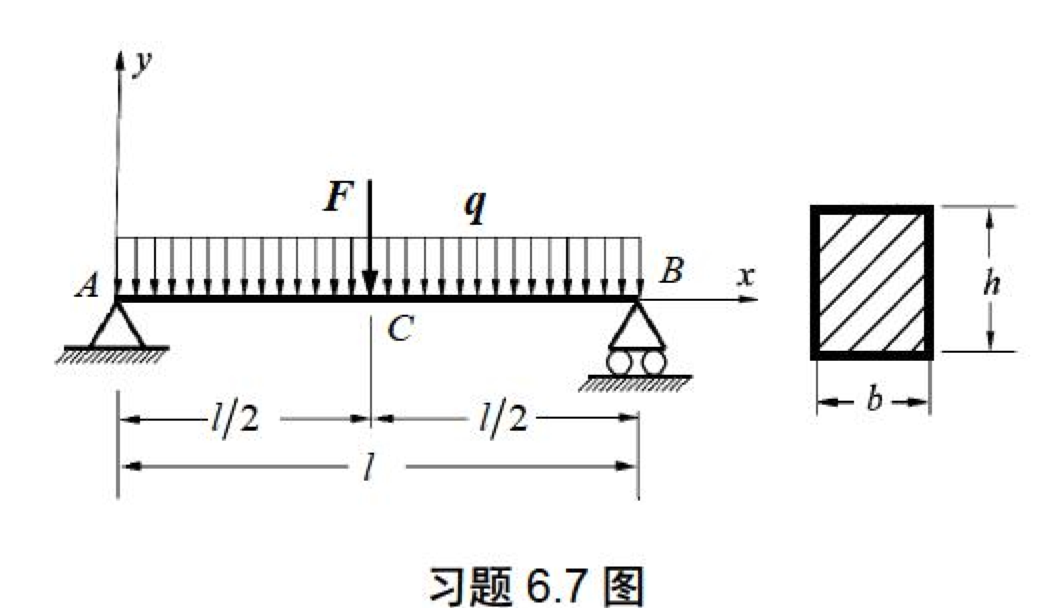
6.5　如习题 6.5 图所示计算悬臂梁 AB 端点 B 在分布载荷作用下的挠度。假设梁的弯曲刚度 EI 为常数。

6.6　如习题 6.6 图所示，简支梁 AB 的跨度为 1m，弹性模量 $E = 117\text{GPa}$。承受均布载荷 q，测得最大挠度为 1.5mm。(1) 如果梁具有矩形横截面(宽 b = 20mm，高 h = 40mm)，计算分布载荷 q。(2) 如果梁具有圆形截面，q = 500N/m，计算横截面的半径 r。忽略梁的重量。



习题 6.5 图　　习题 6.6 图

6.7　横截面为矩形(b = 75mm，h = 200mm)的简支梁 AB 承受均布载荷 q = 125N/m 和集中载荷 F = 200N 的作用，如习题 6.7 图所示。其中，梁的弹性模量 E = 12GPa，长度 l= 3.6m，计算梁的最大挠度。



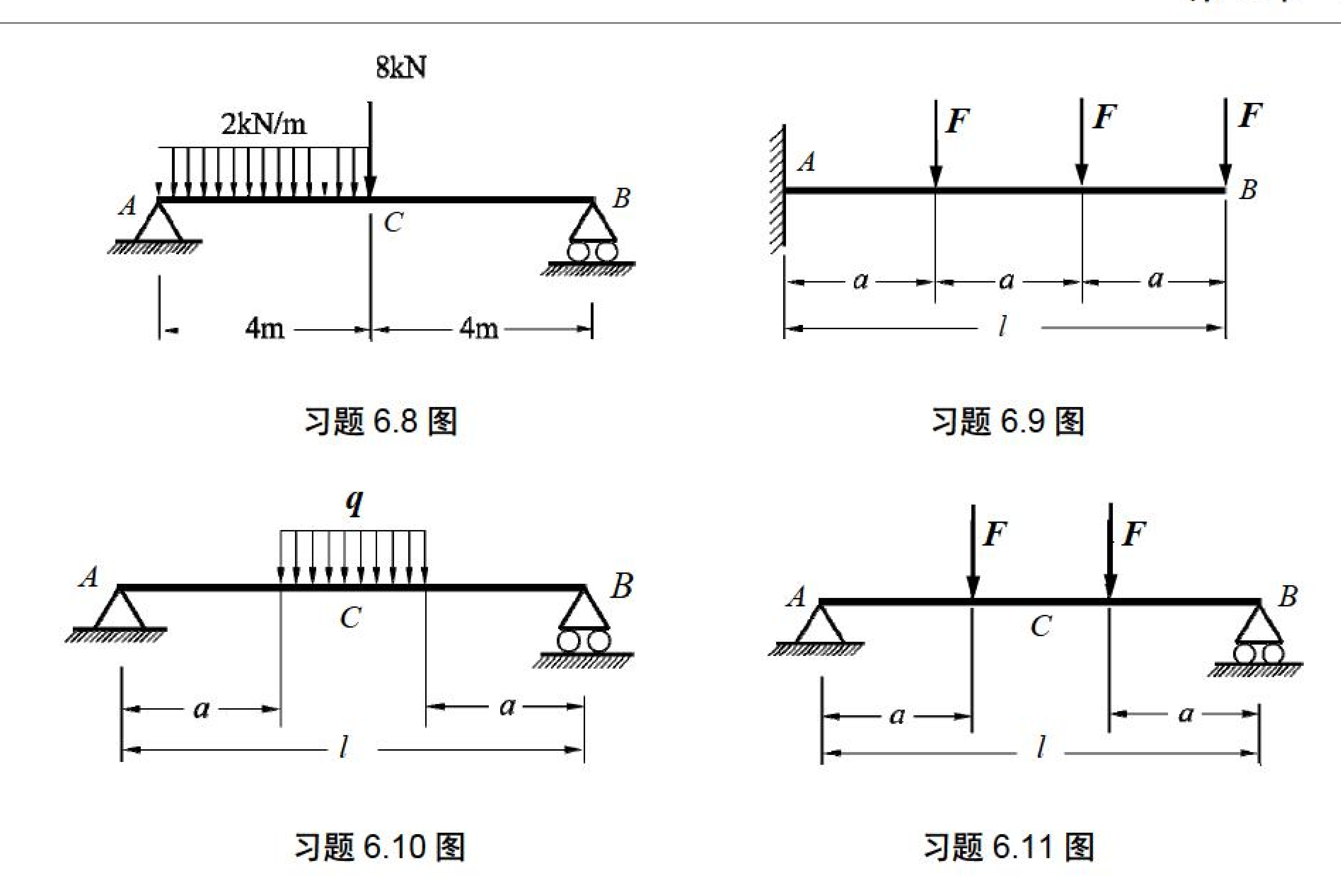
习题 6.7 图

6.8　如习题 6.8 图所示，试计算简支梁在点 C 处的挠度以及支座 A 处的转角。梁的弯曲刚度 EI 为常数。

6.9　悬臂梁 AB 承受 3 个相同集中载荷 F 作用，如习题 6.9 图所示。试确定梁自由端 B 的挠度 w_B 和转角 θ_B 的表达式。

6.10　简支梁 AB 承受如习题 6.10 图所示的分布载荷作用，$a = l/3$。试确定左支座的转角 θ_A 以及梁中点的挠度 w_C。

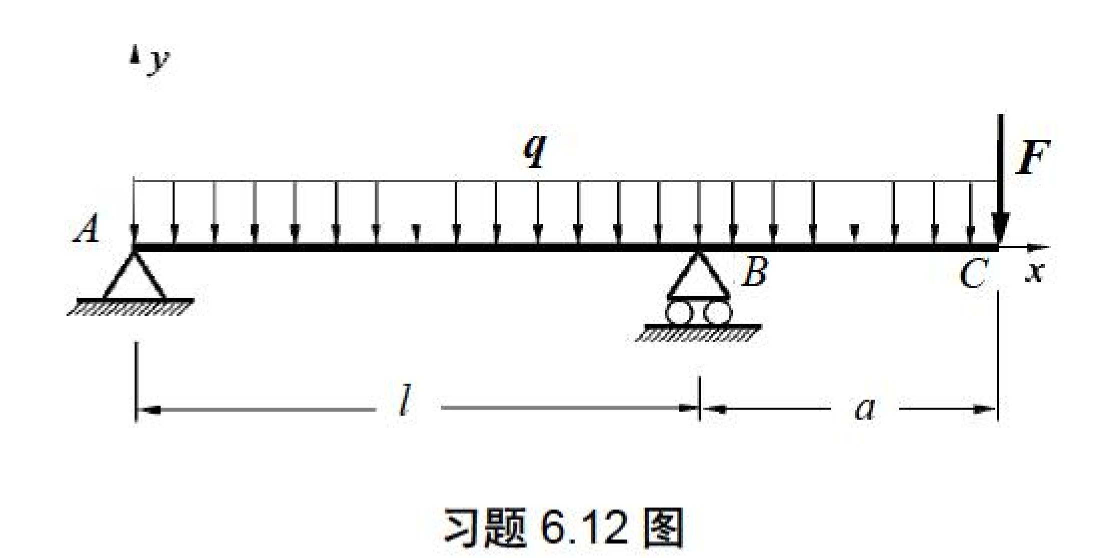
6.11　如习题 6.11 图所示，使用叠加法求解简支梁 AB 支座的转角 θ_A、θ_B 以及最大挠度 $w_{\max}$。假设梁的 EI 为常数，梁的长度为 l，$a = l/3$。



习题 6.8 图　　习题 6.9 图

习题 6.10 图　　习题 6.11 图

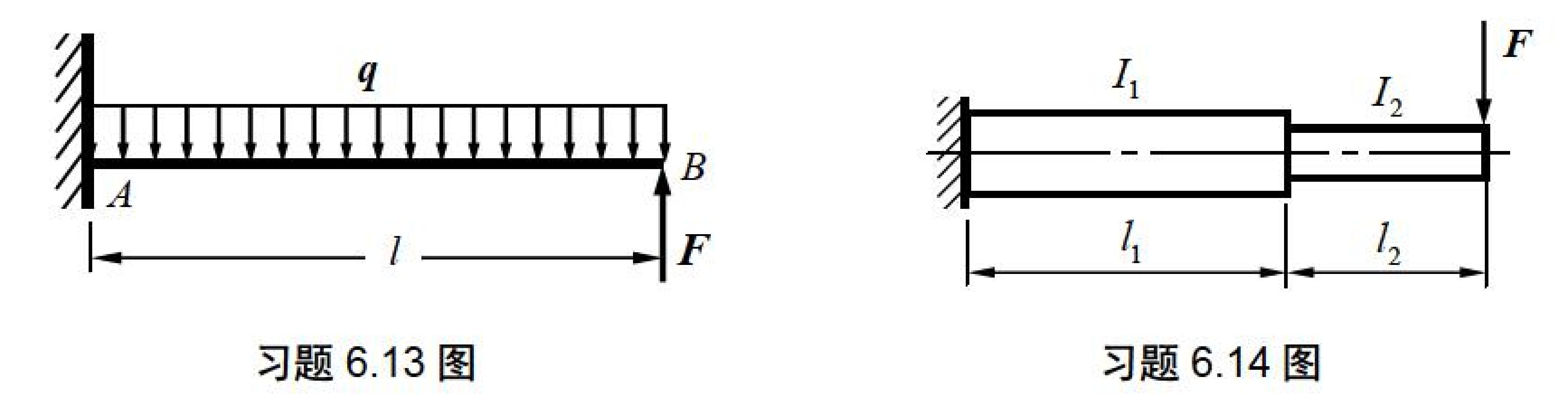
6.12　如习题 6.12 图所示，外伸梁 ABC 承受均布载荷 $\boldsymbol{q}$ 和集中载荷 $\boldsymbol{F}$ 的作用。使用叠加法计算端点 C 的挠度。假设 $l = 4\text{m}$，$a = 2\text{m}$，$q = 15\text{kN/m}$，$F = 7.5\text{kN}$，$E = 200\text{GPa}$ 及 $I = 70.8\times10^6\text{mm}^4$。



习题 6.12 图

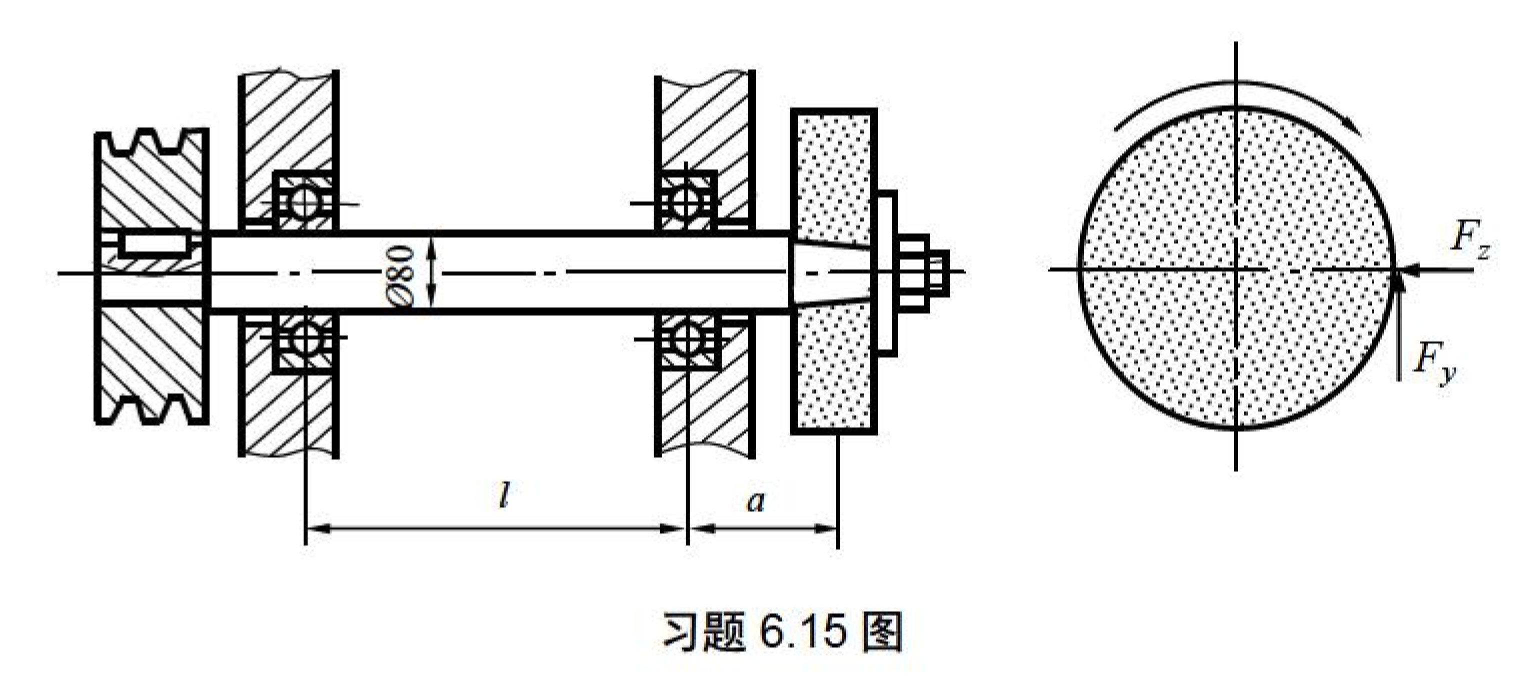
6.13　如习题 6.13 图所示，横截面为圆形($r = 6.5\text{mm}$)的梁 AB 承受分布载荷 $q = 50\text{N/m}$ 的作用，梁的弹性模量 $E = 110\text{GPa}$，长度 $l = 0.9\text{m}$。为使端点 B 的挠度为零，确定需要的集中载荷 F 的大小。

6.14　试求习题 6.14 图所示变截面梁自由端的挠度和转角。



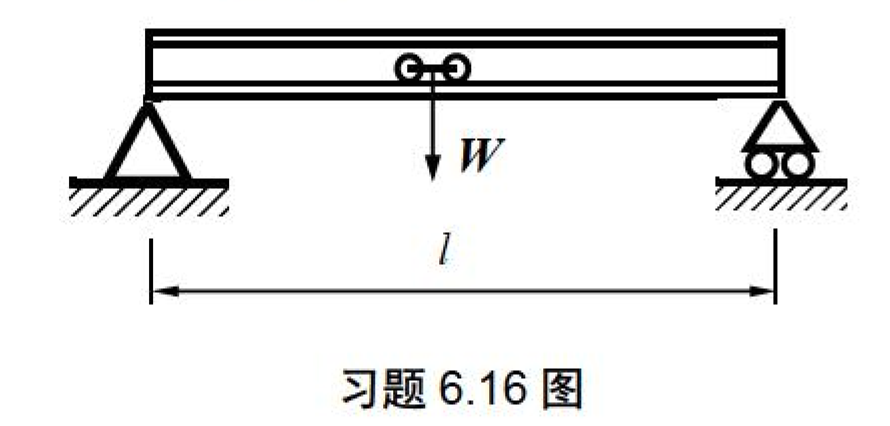
习题 6.13 图　　习题 6.14 图

6.15　磨床砂轮主轴如习题 6.15 图所示。轴的外伸段的长度 $a = 100\text{mm}$，轴承间的距离 $l = 350\text{mm}$，$E = 210\text{GPa}$。$F_y = 630\text{N}$，$F_z = 220\text{N}$。试求主轴外伸段的总挠度。



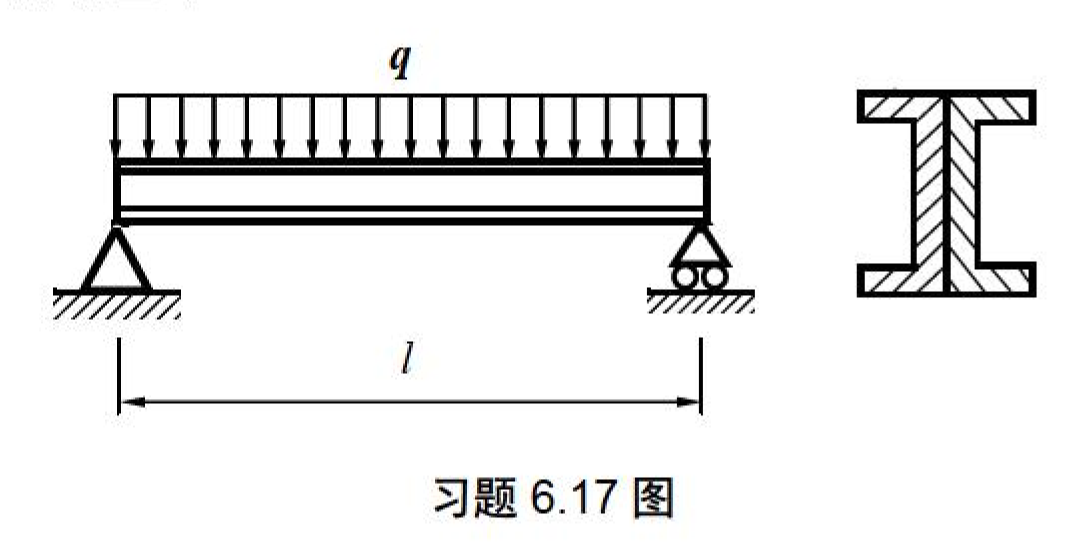
习题 6.15 图

6.16 如习题 6.16 图所示桥式起重机的最大载荷为$W = 23\text{kN}$。起重机大梁为 23a 工字钢，$E = 210\text{GPa}$，$l = 8.76\text{m}$。规定$[w] = 1/500$。试校核大梁的刚度。



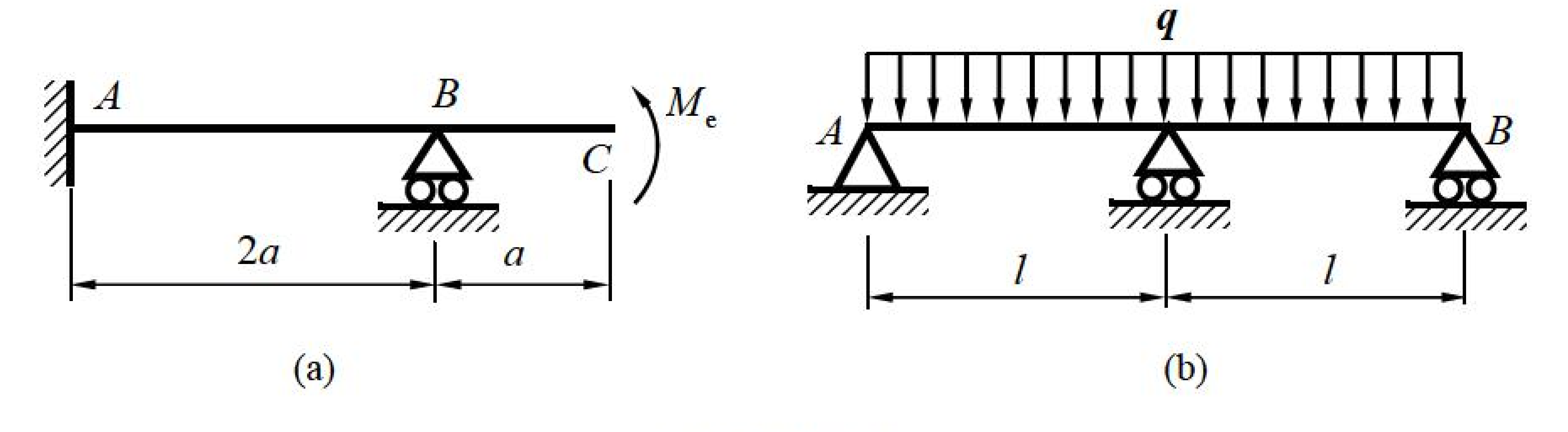
习题 6.16 图

6.17 如习题 6.17 图所示承受均布载荷的简支梁由两根竖向放置的槽钢组成。已知$q = 10\text{kN/m}$，$l = 4\text{m}$，材料的许用应力$[\sigma] = 100\text{MPa}$，许用挠度$[w] = 1/1000$，弹性模量$E = 200\text{GPa}$。试确定槽钢型号。



习题 6.17 图

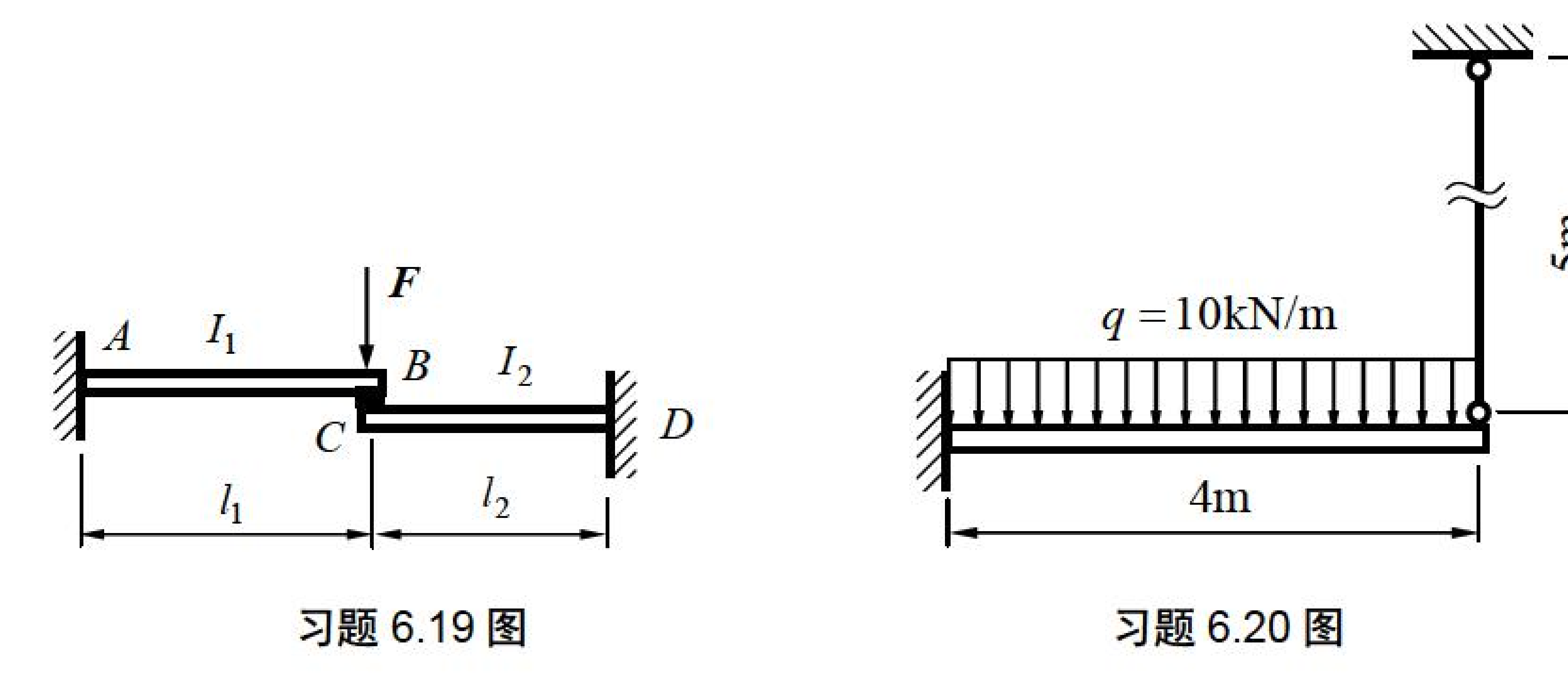
6.18 试求习题 6.18 图所示各超静定梁的支反力。



习题 6.18 图

6.19 载荷 F 作用在梁 AB 及 CD 的连接处，如习题 6.19 图所示，试求每根梁在连接处所受的力。已知其跨长比为$l_1 : l_2 = 3 : 2$，刚度比为$EI_1 : EI_2 = 4 : 5$。

6.20　习题 6.20 图所示结构中，梁为 16 号工字钢；　拉杆的截面为圆形，$d = 10\text{mm}$。两者均为 Q235 钢，$E = 200\text{GPa}$。试求梁及拉杆内的最大正应力。



习题 6.19 图　　　　习题 6.20 图

第 7 章　应力状态和强度理论

【本章学习重点】

本章主要学习平面应力状态下，斜截面上的应力、主应力、主平面、最大切应力及其作用面的确定；广义胡克定律及其应用；常用的四种强度理论；复杂应力状态下的强度计算。

【本章学习目标】

- 理解一点处应力状态的概念。会通过求 4 种基本变形下杆件任意点处横截面上的应力来表示单元体的应力状态。
- 掌握平面应力状态下，斜截面上的应力、主应力、主平面、最大切应力及其作用面的计算。熟悉应力圆的绘制，能通过应力圆确定平面应力状态下的斜截面上应力、主应力、主平面、最大切应力及其作用面。
- 在已知一个主应力的情况下，能确定空间应力状态下的 3 个主应力、最大切应力及其方位。
- 掌握广义胡克定律及其应用。
- 了解单元体体应变、体积改变应变能密度和形状改变应变能密度等概念和相关结论。
- 掌握材料破坏和失效的两种基本形式；理解强度理论的概念、强度条件和适应范围；会进行复杂应力状态下的强度计算。

7.1　概　　述

前几章中，讨论了轴向拉伸(压缩)、扭转和弯曲等基本变形中横截面上的应力，并建立了构件的强度条件，即

$$\sigma_{\max} \leqslant [\sigma] \quad 或 \quad \tau_{\max} \leqslant [\tau]$$

式中，$\sigma_{\max}$为切应力为零时横截面上的最大正应力；$\tau_{\max}$为正应力为零时横截面上的最大切应力；等式右边的许用应力$[\sigma]$、$[\tau]$是通过试验测得材料失效时的极限应力再除以安全系数获得的。强度条件为构件受基本变形时建立了强度设计准则，但对进一步分析强度问题还存在诸多不足，有下列几种情形。

(1)　在工程实际中，对于一些有两种以上基本变形的组合变形，杆件横截面内可能既有正应力也有切应力(横力弯曲中，梁横截面上距中性轴为某一距离的一点处也是此类情形)，这时，$\sigma_{\max}$、$\tau_{\max}$有何确定是一个问题。

(2)　在拉(压)、扭转试验中材料失效时，试样横截面上的应力最大，而试样不都是沿横截面发生破坏。如低碳钢拉伸至屈服而失效时，试样表面出现与轴线成45°角的滑移线(见图 7.1(a))；铸铁压缩破坏时，破坏面是一个与试样轴线大致成45°的斜截面(见图 7.1(b))；

铸铁在扭转破坏时，其断面形成沿 45° 螺旋面(见图 7.1(c))。

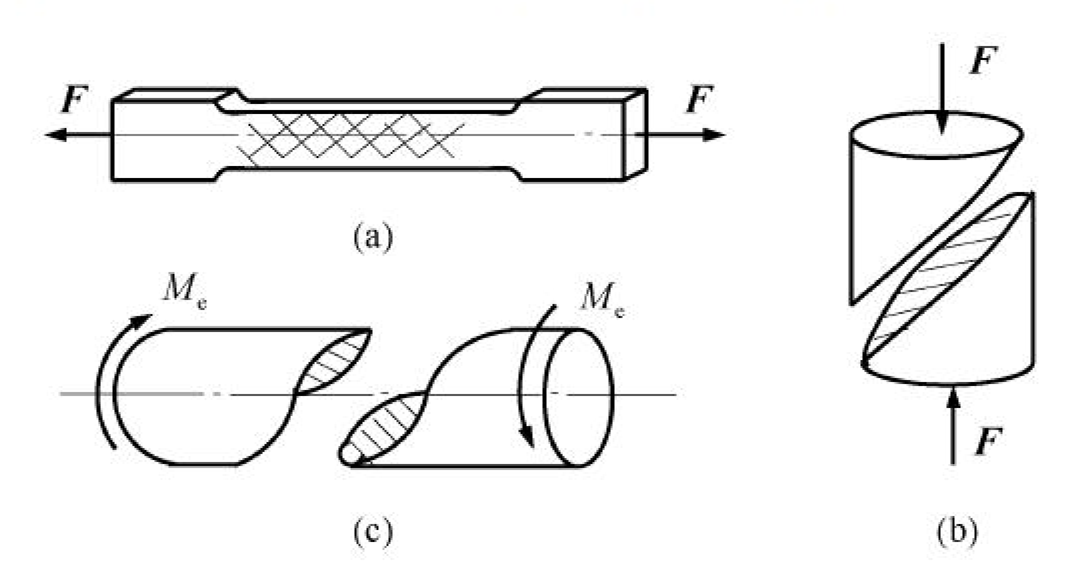


图 7.1

(3) 强度条件中的许用应力$[\sigma]$、$[\tau]$，是通过直接引用试验中测得的材料极限应力而获得，试验中只有一种荷载。当试样上作用两种以上的荷载时，截面上一点处的应力组合形式有无限多的可能性，因此，很难用直接试验的方法来确定每一种应力组合下材料的极限应力。在这种情况下，如何建立强度条件是一个问题。

为了解决上述问题，需要进行应力状态分析。从构件基本变形中的应力分析可知，在受力杆件的同一横截面上，各点处的应力一般是不同的。而在杆件内同一点处，不同方位截面上的应力也是不同的(参见第 2 章 2.3.2 小节的拉(压)杆斜截面上的应力)。通过研究构件内任意一点在各不同方位截面上应力的变化规律，从而确定出该点的最大正应力和最大切应力的大小及所在截面的方位。受力构件一点处不同方位截面上的应力的集合，称为该点的应力状态。

研究一点的应力状态时，通常是围绕该点取一个无限小的正六面体——单元体进行分析，这时可以认为作用在单元体同一面上应力是均匀分布的。一般来说，一点处在特定截面(如横截面内)的应力大小可通过应力分析求得。例如，研究图 7.2(a)所示矩形悬臂梁 A 点处的应力状态，可计算出 A 点在横截面上的正应力σ和切应力τ。围绕 A 点截取一单元体，在单元体两侧面标注σ和τ，上、下面上正应力为零，切应力由切应力互等定律确定，前后两面的应力为零，单元体各面的应力如图 7.2(b)所示，也可表示为图 7.2(c)所示的平面图形。

根据一点处应力状态中各应力在空间的不同位置，可将应力状态分为空间应力状态和平面应力状态。单元体上有一对面上总是不存在应力时，称为平面应力状态(见图 7.2(b))；所有面上均存在应力时，称为空间应力状态。本章主要研究平面应力状态。

根据弹性力学的研究结论，任何应力状态总可以找到 3 对互相垂直的面，在这些面上只有正应力，而切应力等于零，这样的面称为主平面。主平面上的正应力称为主应力。3 个主应力通常以σ_1、σ_2、σ_3表示，并按代数值$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3$的顺序排列。如果 3 个主应力都不等于零，称为**三向主应力状态**(见图 7.3(a))；如果有一个主应力等于零，称为**双向主应力状态**(见图 7.3(b))；如果有两个主应力等于零，称为**单向应力状态**(见图 7.3(c))；应力状态中，还有一种特例，即单元体的 4 个侧面上没有正应力而只有切应力，称为**纯剪切应力状态**(见图 7.3(d))。

三向主应力状态属空间应力状态，双向、单向及纯剪切应力状态属平面应力状态。

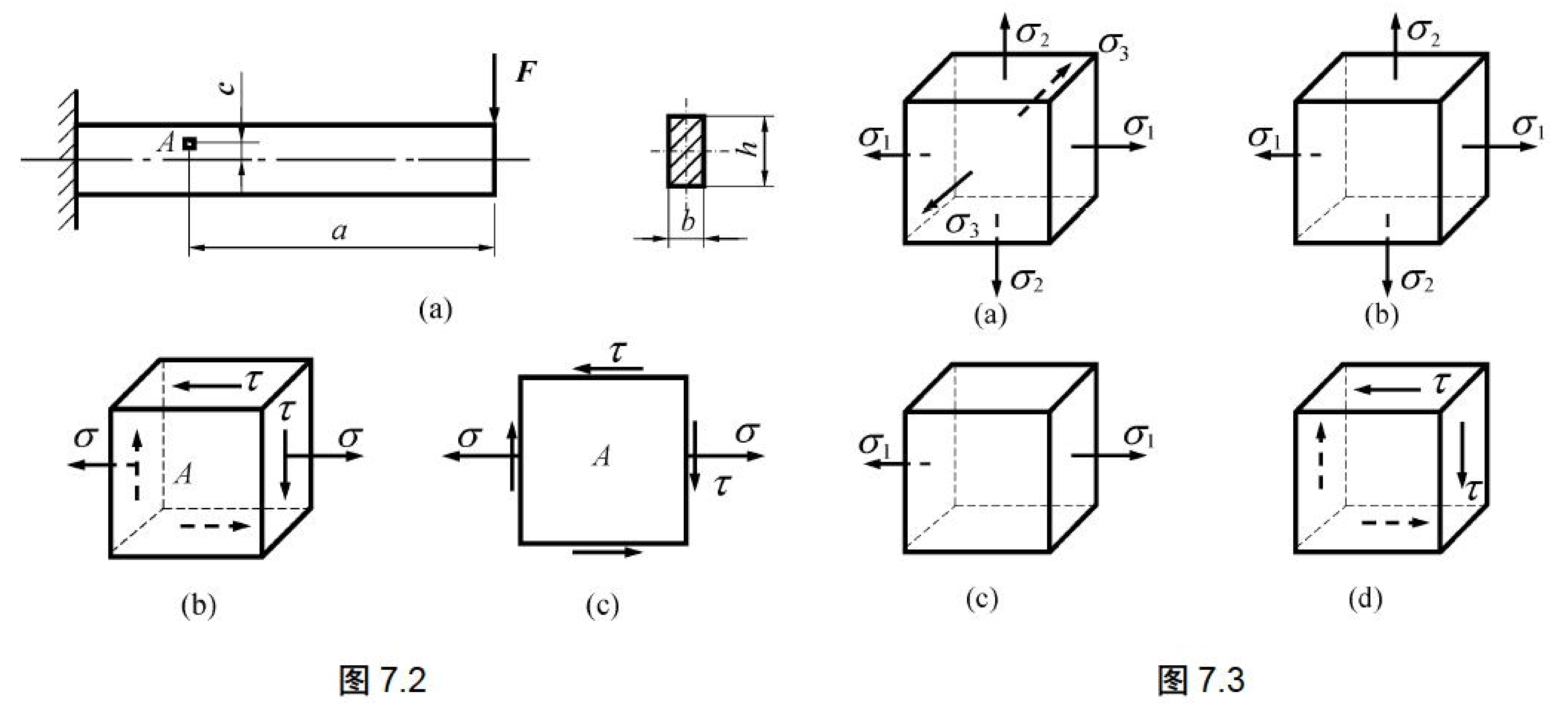


图 7.2　　图 7.3

7.2　平面应力状态下的应力分析

7.2.1　斜截面方位角和应力分量的正负号约定

图 7.4(a)所示为单元体平面应力状态的一般情形，其两对互相垂直的面上都有正应力和切应力的作用。各面上的应力分量的表示与所建立的 *x*-*y* 坐标系对应，即σ_x、τ_{xy}是其法线与 *x* 轴平行的面(简称 *x* 面)上的正应力和切应力；σ_y、τ_{yx}是其法线与 *y* 轴平行的面(简称 *y* 面)上的正应力和切应力。图 7.4(b)所示为平面图形的单元体。

为了分析任意斜截面的应力情况，如图 7.4(b)所示，设斜截面 *ef* 与 *x* 面成α角(也称斜截面方位角)。斜截面 *ef* 将单元体分为两部分；取 *bef* 部分进行分析(见图 7.4(c))，斜截面 *ef* 上有正应力σ_α、切应力τ_α。

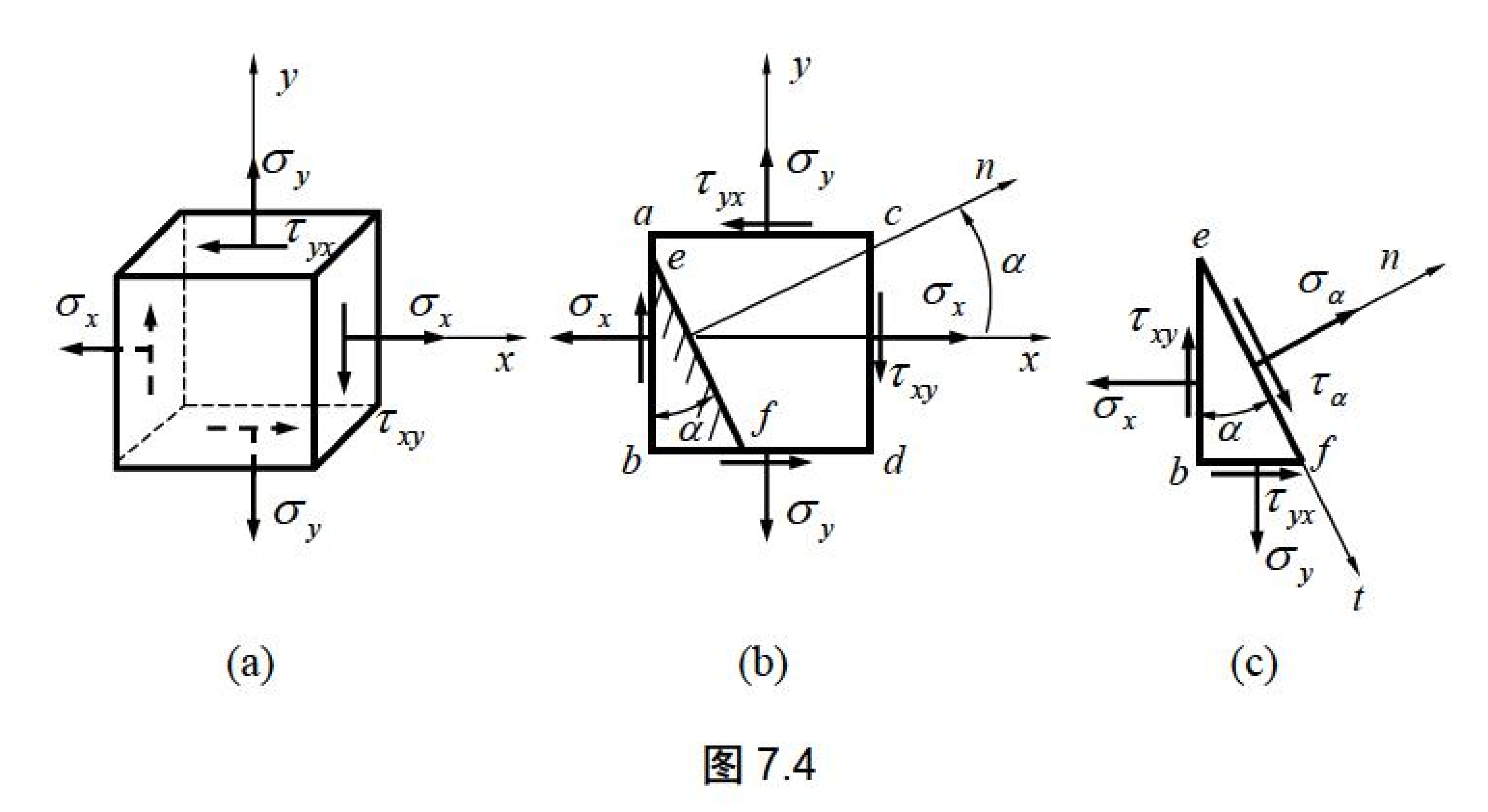


图 7.4

为了确定任意斜截面上正应力σ_α、切应力τ_α，首先要对方位角α、各应力分量的正负号作以下约定。

(1) 斜截面方向角α：从 *x* 轴正方向转到斜截面外法线 *n* 上，以逆时针转为正，顺时针转为负。

(2)　正应力：拉应力为正，压应力为负。

(3)　切应力：使单元体(或局部)产生顺时针方向转动趋势时为正；反之为负。

图 7.4(b)所示的方向角α为正，正应力σ_x、σ_y、σ_α为正，切应力τ_{yx}、τ_α为正，τ_{xy}为负。

7.2.2　平面应力状态分析——解析法

如图 7.4(c)所示，单元体局部 *bef* 在已知应力σ_x、σ_y和τ_{xy}、τ_{yx}以及未知力σ_α、τ_α所产生力的作用下处于平衡。将作用在单元体局部 *bef* 各面上的应力乘以各自作用面积后所形成的力，分别向斜截面的法线 n、切线 t 方向投影，得平衡方程为

$$\sum F_n=0 \qquad \sigma_\alpha \mathrm{d}A+(\tau_{xy}\mathrm{d}A\cos\alpha)\sin\alpha-(\sigma_x\mathrm{d}A\cos\alpha)\cos\alpha$$
$$+(\tau_{yx}\mathrm{d}A\sin\alpha)\cos\alpha-(\sigma_y\mathrm{d}A\sin\alpha)\sin\alpha=0 \tag{7.1}$$

$$\sum F_t=0 \qquad \tau_\alpha \mathrm{d}A-(\tau_{xy}\mathrm{d}A\cos\alpha)\cos\alpha-(\sigma_x\mathrm{d}A\cos\alpha)\sin\alpha$$
$$+(\tau_{yx}\mathrm{d}A\sin\alpha)\sin\alpha+(\sigma_y\mathrm{d}A\sin\alpha)\cos\alpha=0 \tag{7.2}$$

根据切应力互等定律$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，利用三角倍角公式，将式(7.1)、式(7.2)整理后，得到平面应力状态下任意斜截面上正应力与切应力的表达式为

$$\sigma_\alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_{xy}\sin 2\alpha \tag{7.3}$$

$$\tau_\alpha=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_{xy}\cos 2\alpha \tag{7.4}$$

从式(7.3)、式(7.4)可知，任意斜截面上的正应力σ_α、切应力τ_α是随斜截面方位角α的改变而变化的，即σ_α、τ_α都是α的函数。可利用函数式求极值方法求出最大正应力、最大切应力及其所处的截面方位。

在式(7.3)中，令$\dfrac{\mathrm{d}\sigma_\alpha}{\mathrm{d}\alpha}=0$，则所求得的$\alpha_0$所在的截面上的正应力即为最大值或最小值，最大正应力或最小正应力所在截面的方位角α_0为

$$\tan 2\alpha_0=-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \tag{7.5}$$

为了获得主平面所在位置，就须求切应力为零时的斜截面方位角α'，只要令式(7.4)中$\tau_\alpha=0$，可得主平面方位角α'，显然有$\alpha'=\alpha_0$。这说明主平面上的主应力就是最大正应力和最小正应力。由式(7.5)可求得$\sin 2\alpha_0$和$\cos 2\alpha_0$，再代入式(7.3)，求得最大正应力和最小正应力为

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2} \tag{7.6}$$

在平面应力状态中，肯定有一个主应力为零，因此平面应力状态中的 3 个主应力σ_1、σ_2、σ_3按$\sigma_{\max}$、$\sigma_{\min}$、0 这 3 个数的代数值由大到小的顺序确定。

用同样的方法，可以确定最大切应力及其所在平面的方位角。在式(7.4)中，令

$\dfrac{d\tau_\alpha}{d\alpha}=0$，可求得的$\alpha_1$所在斜截面上的切应力最大，最大切应力所在截面的方位角α_1为

$$\tan\alpha_1=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}} \tag{7.7}$$

比较式(7.5)和式(7.7)可知，$\tan 2\alpha_0=-\cot 2\alpha_1$，即$2\alpha_0$与$2\alpha_1$相差$90^\circ$，因此可说明主平面与最大切应力所在平面的夹角为$45^\circ$。

由式(7.7)求得$\sin 2\alpha_1$和$\cos 2\alpha_1$，代入式(7.4)，求得切应力最大值和最小值为

$$\left.\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix}\right\}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^{\ 2}} \tag{7.8}$$

例 7.1 单元体的应力状态如图 7.5(a)所示。试求：(1)指定截面上的应力；(2)主应力的大小和主平面的方位，并绘出主应力单元体；(3)图示极值切应力。

解：(1) 求指定截面上的正应力和切应力。

将$\sigma_x=30\text{MPa}$，$\sigma_y=-10\text{MPa}$，$\tau_{xy}=20\text{MPa}$，$\alpha=-30^\circ$代入式(7.3)得

$$\sigma_{-30^\circ}=\left[\frac{30-10}{2}+\frac{30+10}{2}\cos(-60^\circ)-20\sin(-60^\circ)\right]\text{MPa}=37.32\text{MPa}$$

$$\tau_{-30^\circ}=\left[\frac{30+10}{2}\sin(-60^\circ)+20\cos(-60^\circ)\right]\text{MPa}=18.66\text{MPa}$$

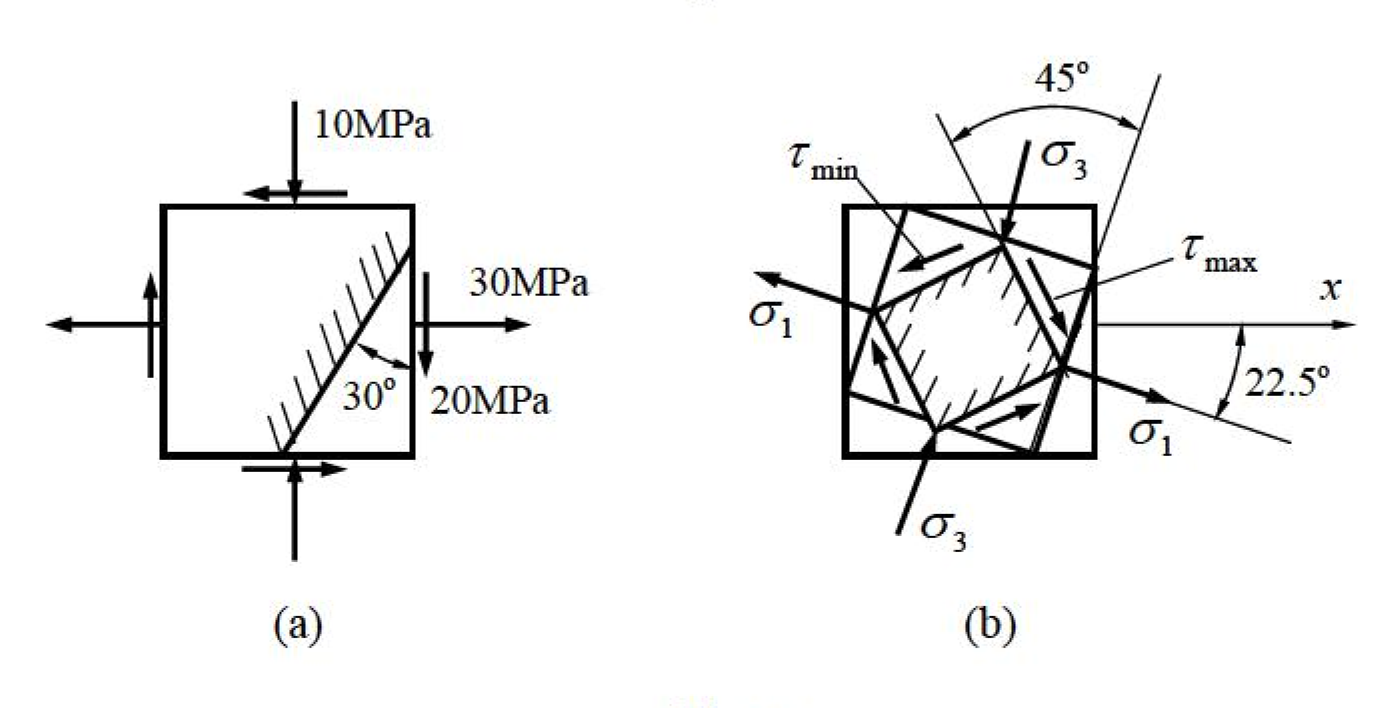


图 7.5

(2) 求主应力和主平面。

由式(7.5)得

$$\tan 2\alpha_0=-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}=\frac{-2\times 20}{30+10}=-1$$

$$2\alpha_0=-45^\circ,\quad \alpha_0=-22.5^\circ$$

由式(7.6)得

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\}=\frac{30-10}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{30+10}{2}\right)^2+20^2}=\begin{cases}38.28\\-18.28\end{cases}(\text{MPa})$$

根据主应力代数值的排序，3 个主应力为

$$\sigma_1=38.28\text{MPa},\quad \sigma_2=0,\quad \sigma_3=-18.28\text{MPa}$$

在单元体上由主平面方位角α_0确定一个主平面(从 x 轴顺时针转过22.5°，即为一个主

平面的外法线)后，与之垂直和平行相对的另外 3 个面都为主平面。主应力单元体及主应力方向如图 7.5(b)所示。

(3) 求极值切应力及作用面。

由式(7.8)得两极值切应力为

$$\left.\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix}\right\}=\pm\sqrt{\left(\frac{30+10}{2}\right)^2+20^2}\,\text{MPa}=\pm 28.3\text{MPa}$$

τ_{max} 所在平面与 σ_1 所在的主平面的夹角为 45°，τ_{min} 所在平面与 τ_{max} 所在平面垂直。τ_{max}、τ_{min} 的表示参见图 7.5(b)。

例 7.2　试分析圆轴扭转时的应力状态，并阐述铸铁圆轴试样的破坏现象及主要原因。

解：(1) 研究圆轴表面上任一点的应力状态，圆轴扭转时，在横截面的边缘处切应力最大，其值为

$$\tau=\frac{T}{W_t}=\frac{M_e}{W_t}$$

在圆轴的表层，按图 7.6(a)所示方式取出单元体 *ABCD*，单元体各面上的应力如图 7.6(b)所示，应力分量为

$$\sigma_x=\sigma_y=0,\qquad \tau_{xy}=\tau$$

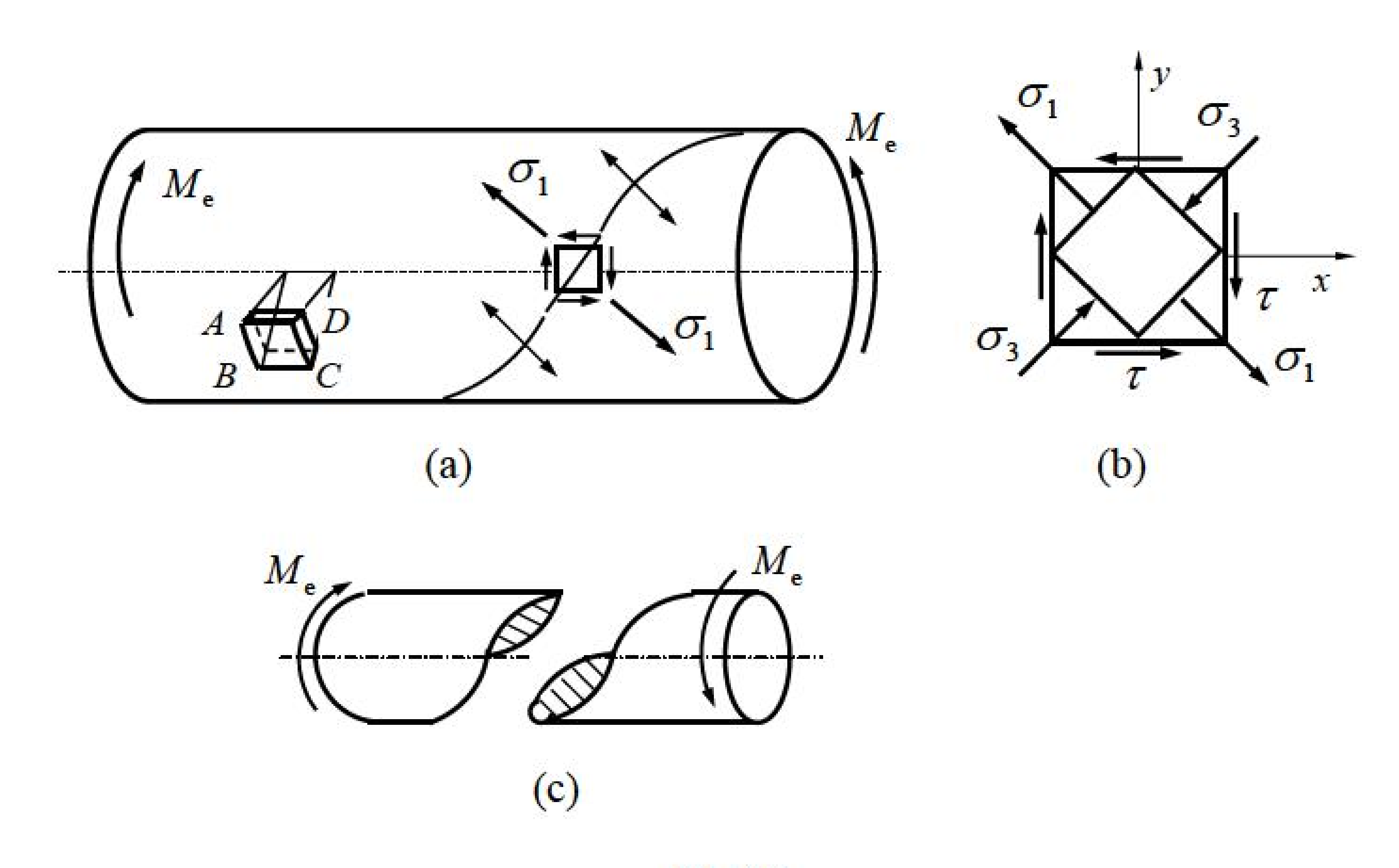


图 7.6

其应力状态为纯剪切应力状态。

将 $\sigma_x=\sigma_y=0$，$\tau_{xy}=\tau$ 代入(7.3)、式(7.4)可得任意斜截面上的正应力和切应力为

$$\sigma_\alpha=-\tau\sin 2\alpha$$
$$\tau_\alpha=\tau\cos 2\alpha$$

由式(7.6)可得

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{max}\\ \sigma_{min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2}=\pm\tau$$

由式(7.5)得

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\infty$$

即

$$2\alpha_0 = -90^\circ \text{ 或 } -270^\circ$$

$$\alpha_0 = -45^\circ \text{ 或 } -135^\circ$$

从以上结果可以看出，$\alpha_0 = -45^\circ$ 所确定的平面上有最大主应力 $\sigma_{\max}$，而 $\alpha_0 = 45^\circ$ (或 $\alpha_0 = -135^\circ$)确定的主平面上有最小的主应力 $\sigma_{\min}$。3 个主应力分别为

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \tau，\ \sigma_2 = 0，\ \sigma_3 = \sigma_{\min} = -\tau$$

(2) 阐述铸铁圆轴试样的破坏现象及原因。

如图 7.6(c)所示，铸铁圆轴试样在扭转破坏时，是沿着与横截面成 -45° 的螺旋面断开的。从上述计算可知，圆轴试样扭转时，横截面有最大切应力 τ；在 $\alpha_0 = -45^\circ$ 的斜截面上有最大拉应力 $\sigma_1 = \tau$；在 $\alpha_0 = 45^\circ$ 的斜截面上有最大的压应力 $\sigma_3 = -\tau$。对于脆性材料铸铁来说，其抗拉强度较低(低于材料抗剪切强度)，所以试样沿着与横截面成 45° 的螺旋面发生拉断破坏。

7.2.3 平面应力分析——图解法(应力圆)

1. 应力圆方程

单元体任意斜截面上的正应力 σ_α 和切应力 τ_α 的解析式为

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

上述两式可视为以 α 为参数的参数方程。为消去参数 α，可将不含 α 的项移至方程的左边，然后两式平方后再相加，可得到一个新的方程，即

$$\left(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\right)^2 \tag{7.9}$$

式中变量为 σ_α、τ_α，在以 σ_α 为横坐标轴、τ_α 为纵坐标轴的坐标系中，式(7.9)是一个圆的方程，该圆称为**应力圆**。应力圆的圆心坐标为 $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$，应力圆半径为 $\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$。

应力图最早由德国工程师莫尔(Mohr)提出，故又称为莫尔应力圆。

2. 应力圆的画法

由上述分析可知，应力圆的圆心坐标和半径可由单元体已知的应力分量 σ_x、σ_y 和 τ_{xy} 求出，由圆心和半径即可画出平面应力状态的应力圆。但这样画圆不便于应力分析和应力

圆的应用。下面介绍一种既简单又实用的应力圆绘制方法。

以图 7.7(a)所示平面应力状态为例，应力圆绘制步骤如下(参见图 7.7(b))。

(1) 在$\sigma-\tau$坐标系中，按适当的比例标出每小格所代表的应力值。

(2) 以 x 面上的应力分量σ_x、τ_{xy}标注为坐标系中的一点 $D_1(\sigma_x, \tau_{xy})$，以 y 面上的应力分量标注为另一点 $D_2(\sigma_y, \tau_{yx})$。

(3) 连接 D_1、D_2 两点成直线段，直线段与σ轴的交点 C 即为圆心，CD_1 直线段长即为半径。

根据图 7.7 中的几何关系，不难求出应力圆圆心 C 的坐标为$\left(\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, 0\right)$，应力圆半径由勾股定律求得，为$\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$。

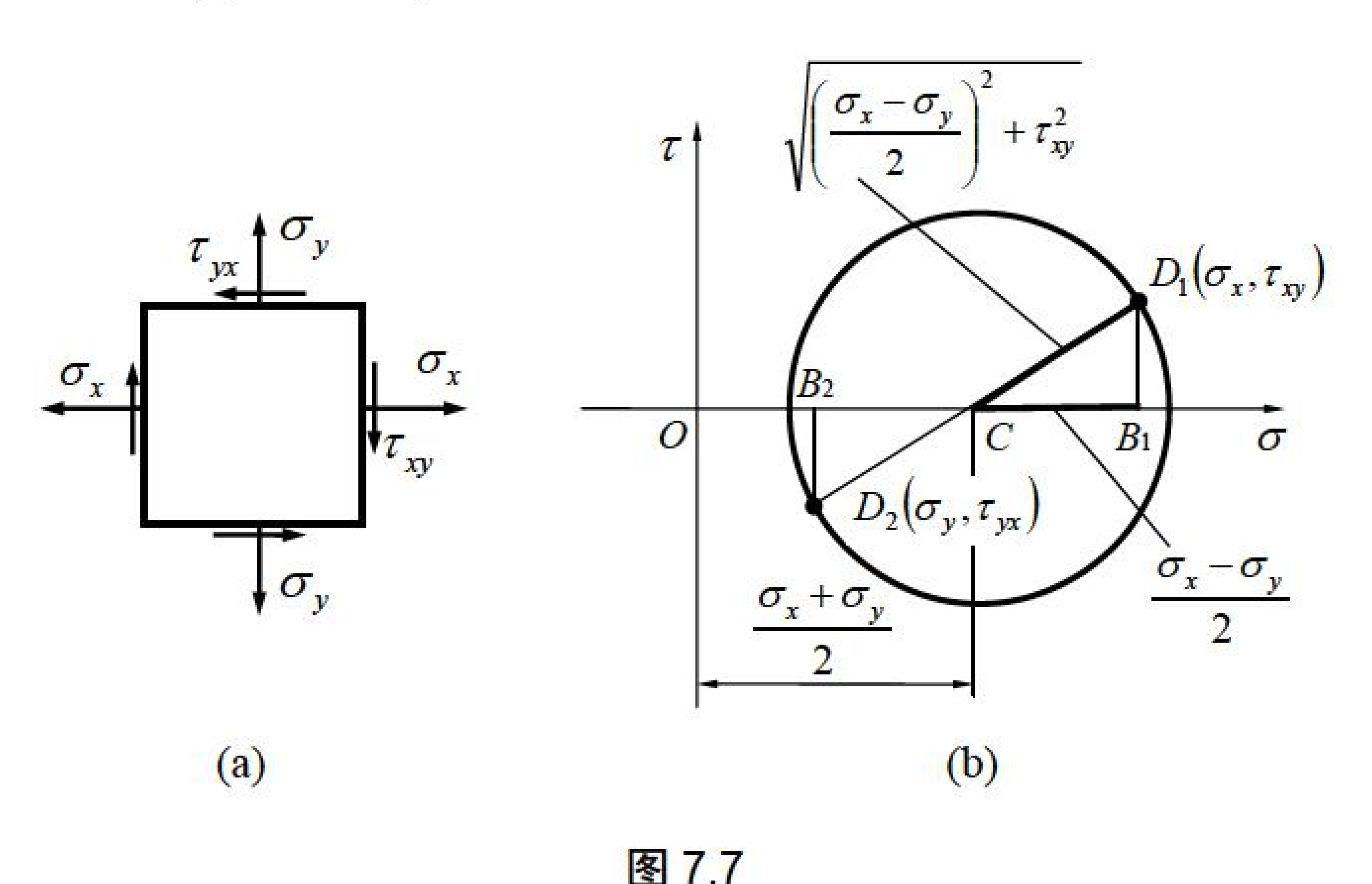


图 7.7

3. 应力圆的应用

从图 7.7(b)所示应力圆可以看到，应力圆上 D_1 点的坐标(σ_x, τ_{xy})对应单元体上 x 面的应力分量；应力圆上 D_2 点的坐标(σ_y, τ_{yx})对应单元体上 y 面上的应力分量。根据单元体上的面与应力圆上的点之间的“点面对应”关系可以推断，单元体内任意一个斜截面可以在应力圆上找到一个对应的点，该点的坐标就是斜截面上的应力分量。

(1) 利用应力圆求单元体任意斜截面上的应力。

如图 7.8(a)所示的单元体，欲求与 x 面成α角的斜截面上的正应力σ_α、切应力τ_α，可先画出应力圆。为方便分析，在圆中标出特征点 A_1、A_2、B_1、B_2(见图 7.8(b))，再从应力圆上的 D_1 点，按方位角α的转向(图中α为正，逆时针方向)，沿圆转过 2α 角达到 E 点，该点就是与单元体上α斜截面对应的点，E 点的横坐标和纵坐标就是要求的α截面上的正应力σ_α、切应力τ_α。现证明如下。

从图 7.8b 可知，E 点的横坐标为

$$\begin{aligned}\overline{OF} &= \overline{OC}+\overline{CF}=\overline{OC}+\overline{CE}\cos(2\alpha+2\alpha_0)\\ &=\overline{OC}+\overline{CE}\cos 2\alpha\cos 2\alpha_0-\overline{CE}\sin 2\alpha\sin 2\alpha_0\end{aligned}$$



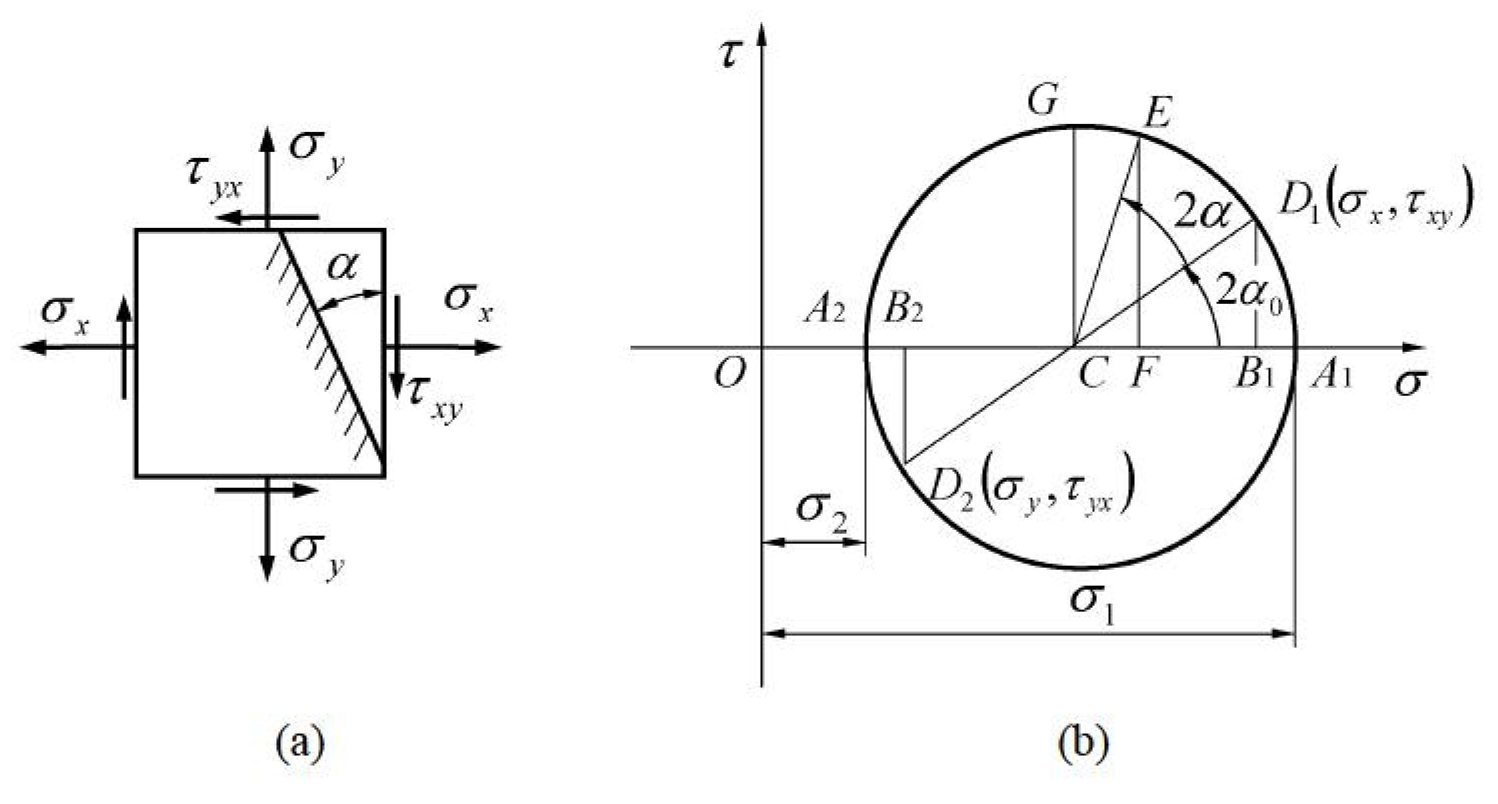


图 7.8

式中，$\overline{OC} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$，$\overline{CE}\cos 2\alpha_0 = \overline{CD_1}\cos 2\alpha_0 = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$，

$\overline{CE}\sin 2\alpha_0 = \overline{CD_1}\sin 2\alpha_0 = \tau_{xy}$；则有

$$\overline{OF} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha = \sigma_\alpha$$

上式说明，E 点的横坐标与式(7.3)所求的 σ_α 一致。同样地，E 点纵坐标为

$$\begin{aligned}\overline{EF} &= \overline{CE}\sin(2\alpha + 2\alpha_0) = \overline{CD_1}\sin 2\alpha\cos 2\alpha_0 + \overline{CD_1}\cos 2\alpha\sin 2\alpha_0 \\ &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha\end{aligned}$$

说明 E 点纵坐标与式(7.4)所求的 τ_α 一致。

利用应力圆求单元体斜截面上应力的方法，可用以下三句口诀加以概括。

① 点面对应。应力圆上各点与单元体的各截面是一一对应的；应力圆上一点的横、纵坐标就是所对应的单元体斜截面上的正应力和切应力。

② 转向相同。x 面转至 α 截面的转向，与应力圆上 D_1 点转至 E 点(与 α 截面对应的点)的转向是相同的。

③ 转角两倍。由 D_1 点沿应力圆转至 E 点所转过的圆心角，是 x 面与斜截面的夹角 α 的两倍。

(2) 利用应力圆求主应力和主平面方位。

在图 7.8(b)中，应力圆与 σ 轴的两个交点 A_1、A_2，它们的纵坐标为零，即切应力为零，因此，A_1、A_2 点所对应的单元体斜截面为两个主平面，A_1、A_2 点的横坐标就是两个主应力 σ_1、σ_2，即

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \overline{OC} + \overline{CA_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{\min} = \overline{OC} - \overline{CA_2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}}$$

根据“点面对应、转角两倍”关系，应力圆上 D_1 点转至 A_1 点所转过的圆心角为 $2\alpha_0$，

单元体上 x 面与 σ_1 所在主平面的夹角为 α_0。按照 α 角的符号约定，图中 α_0 为负，大小为

$$\tan(-2\alpha_0) = \frac{\overline{D_1A_1}}{\overline{CA_1}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

则 σ_1 所在主平面的方位角为

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \tag{7.10}$$

因为在应力圆上从 A_1 点转至 A_2 点须转过 $180°$，所以，σ_1 所在的主平面与 σ_2 所在主平面垂直。

(3) 利用应力圆求极限切应力及所在平面。

由应力圆可直观地看出，极限切应力就是应力圆半径，为

$$\left.\begin{matrix}\tau_{\max}\\ \tau_{\min}\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^{\ 2}}$$

在图 7.8(b)中，极限切应力所在平面对应应力圆上 G 点，与 A_1 点相差 $90°$。所以，极限切应力所在平面与主平面的夹角为 $45°$。

从上述分析可见，由解析法得到的应力状态基本公式，通过应力圆上的几何关系都能较轻松地求得，不需要硬记公式，在表示各种应力状态时也更加直观。

例 7.3 一单元体应力状态如图 7.9(a)所示。试用应力圆求：(1)指定截面上的应力；(2)主应力及主平面方位；(3)最大切应力。

解：(1) 画应力圆。

在图 7.9(b)所示在坐标系中，取每小格为 20MPa 标出刻度，由 $\sigma_x = 100\text{MPa}$、$\sigma_y = 20\text{MPa}$、$\tau_{xy} = 30\text{MPa}$ 确定出 D_1、D_2 点，以 D_1D_2 为直径画出应力圆。圆心 C 坐标为 (60，0)，应力圆半径为 $\overline{CD_1} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50\text{MPa}$。

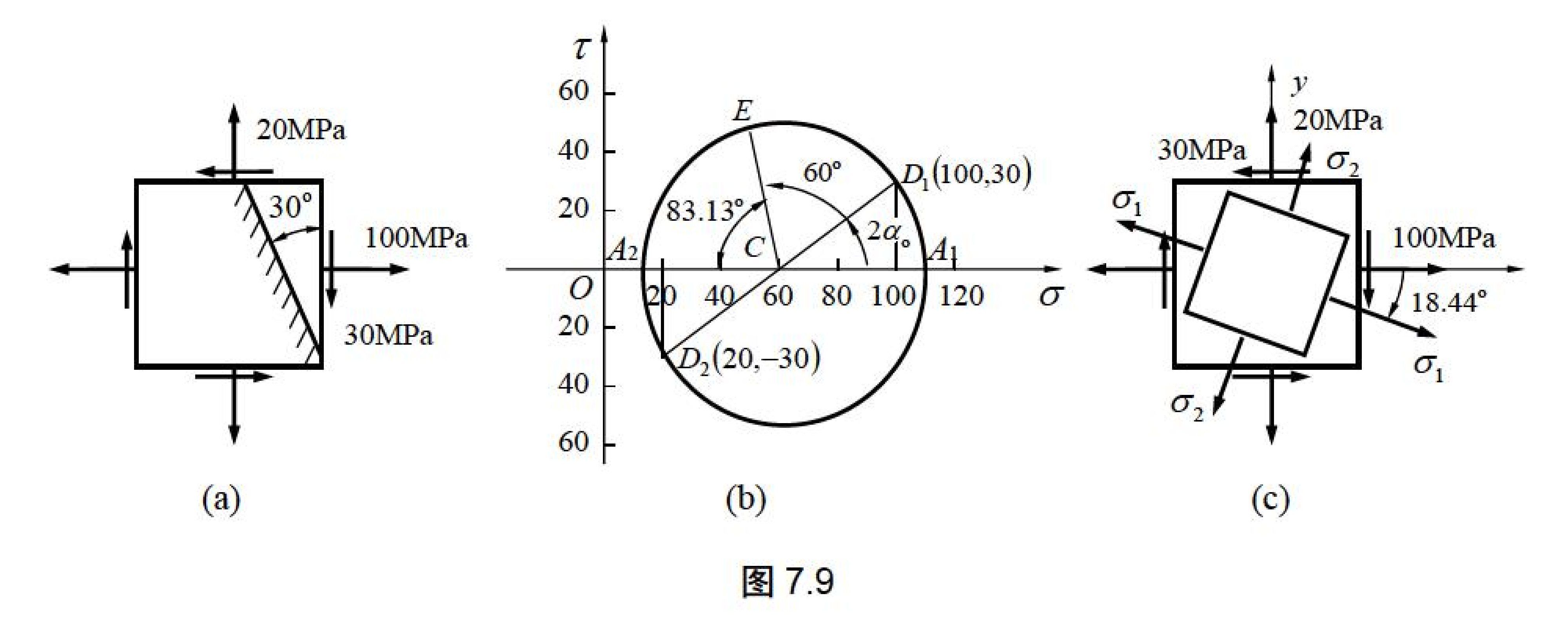


图 7.9

(2) 求 $\alpha = 30°$ 斜截面上的应力。

先求主方位角(参见图 7.9(b))。

$$\tan(-2\alpha_0) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\times 30}{100 - 20} = 0.75$$

$$2\alpha_0 = -36.87°$$

在应力圆上由 D_1 点逆时针方向转过 60° 至 E 点，得 CE 与 τ 轴反方向的夹角为 $180^\circ - 36.87^\circ - 60^\circ = 83.13^\circ$，$E$ 点的横坐标 σ_{30°、纵坐标 τ_{30° 为

$$\sigma_{30^\circ} = \overline{OC} - \overline{CE}\cos 83.13^\circ = (60 - 50\cos 83.13^\circ)\text{MPa} = 54.05\text{MPa}$$

$$\tau_{30^\circ} = \overline{CE}\sin 83.13^\circ = (50\sin 83.13^\circ)\text{MPa} = 49.64\text{MPa}$$

(3) 求主应力及主平面方位。

$$\sigma_1 = \overline{OC} + \overline{CA_1} = (60 + 50)\text{MPa} = 110\text{MPa}$$

$$\sigma_2 = \overline{OC} - \overline{CA_2} = (60 - 50)\text{MPa} = 10\text{MPa}$$

$$\alpha_0 = -18.44^\circ$$

主平面及方位如图 7.9(c)所示。

(4) 求最大切应力。

$$\tau_{\max} = \overline{CA_1} = 50\text{MPa}$$

7.3 空间应力状态的概念

7.3.1 空间应力状态的一般形式

空间应力状态是指单元体三对平面上都存在正应力和切应力。每个平面的切应力可分解为沿坐标轴方向的两个分量，如图 7.10 所示，图中 x 面上有正应力 σ_x 以及切应力 τ_{xy}、τ_{xz}。切应力的两个下标中，第一个下标表示切应力所在平面，第二个下标表示切应力沿坐标轴的方向。同样地，在 y 面上有正应力 σ_y 以及切应力 τ_{yx}、τ_{yz}；在 z 面上有正应力 σ_z 以及切应力 τ_{zx}、τ_{zy}。这种应力状态称为空间应力状态的一般形式。其他应力状态都是它的特殊形式。

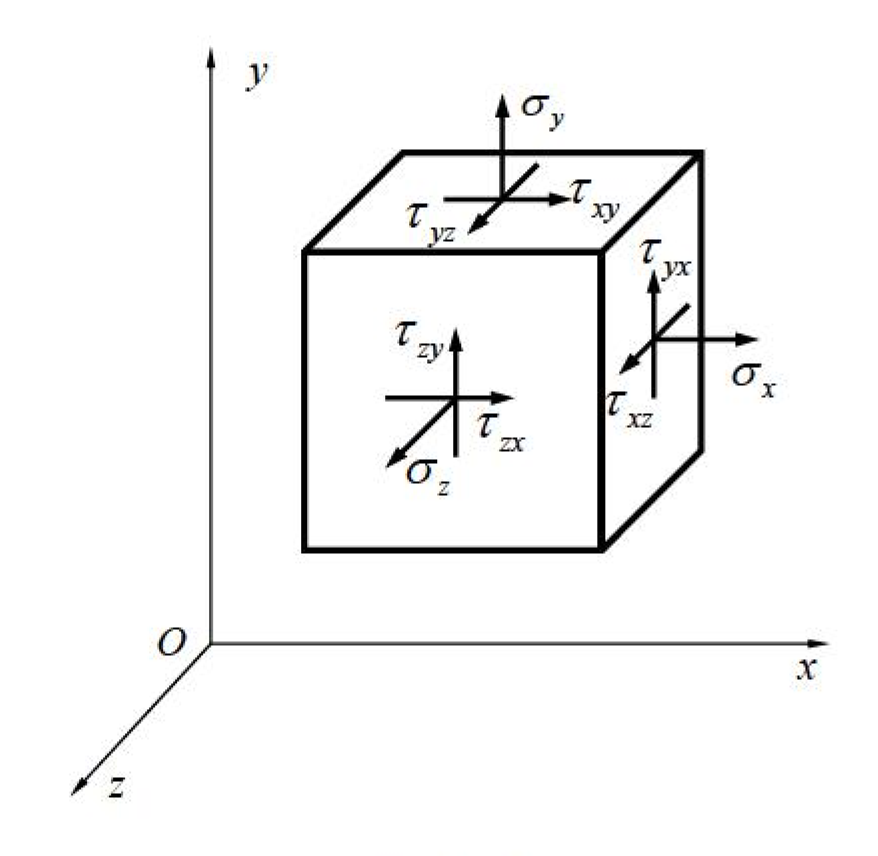


图 7.10

在一般形式的空间应力状态中有 9 个应力分量，根据切应力互等定律，其中 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$、$\tau_{yz}=\tau_{zy}$、$\tau_{xz}=\tau_{zx}$，所以，独立的力分量只有 6 个，即 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}。

7.3.2　三向应力状态及应力圆

对于空间应力状态的单元体内，总可以找到一个主应力单元体，其三对互相垂直的面均为主平面，三对主面上的主应力分别为σ_1、σ_2、σ_3，如图 7.11(a)所示，这种单元体面上 3 个主应力均不为零的应力状态称为三向应力状态。

如图 7.11(b)所示，钢轨受车轮滚压作用时，接触点处的应力状态就是三向压应力状态(见图 7.11(c))，3 个应力均为压应力，σ_3的绝对值最大，σ_1的绝对值最小。

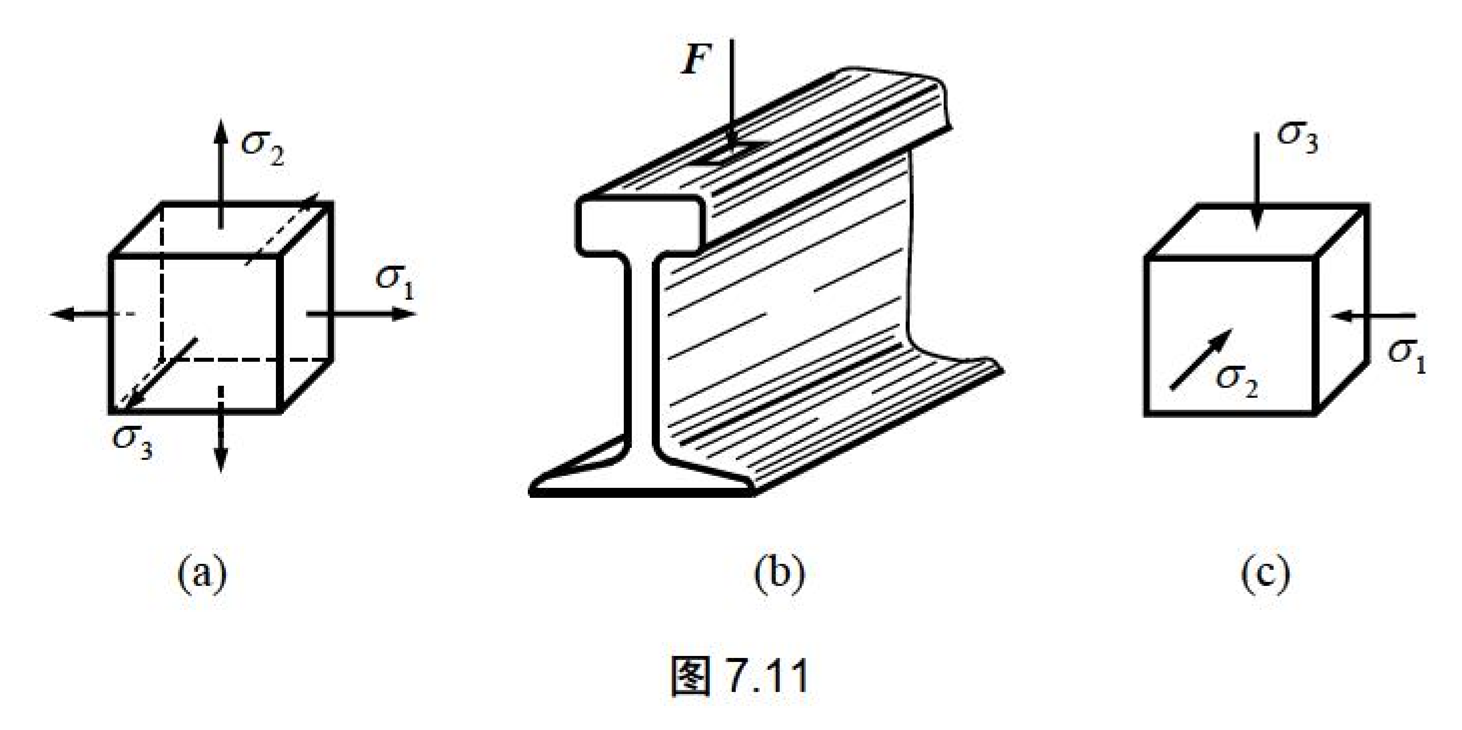


图 7.11

在图 7.12(a)所示的主应力单元体中，首先分析与主应力σ_3平行的斜截面上的应力，该斜截面上的应力分量与σ_3无关，而只与σ_1、σ_2有关。所以，凡是与σ_3平行的任意斜截面的应力分量都可以由σ_1、σ_2组成的应力圆求出。同理，凡是与σ_2平行的任意斜截面上的应力分量可以由σ_1、σ_3组成的应力圆求出；与σ_1平行的任意斜截面上的应力分量分别可以由σ_2、σ_3组成的应力圆求出。所以可以在$\sigma-\tau$坐标系中画出三向应力状态的应力圆，来求取上述特定斜截面上的应力分量，如图 7.12(b)所示。弹性力学的理论证明，单元体内与 3 个主应力都不平行的任意斜截面(图 7.12(a)中的 abc 面)上的应力分量，必定是由 3 个应力圆围成的阴影部分范围内的某一点 D 的坐标值(见图 7.12(b))。

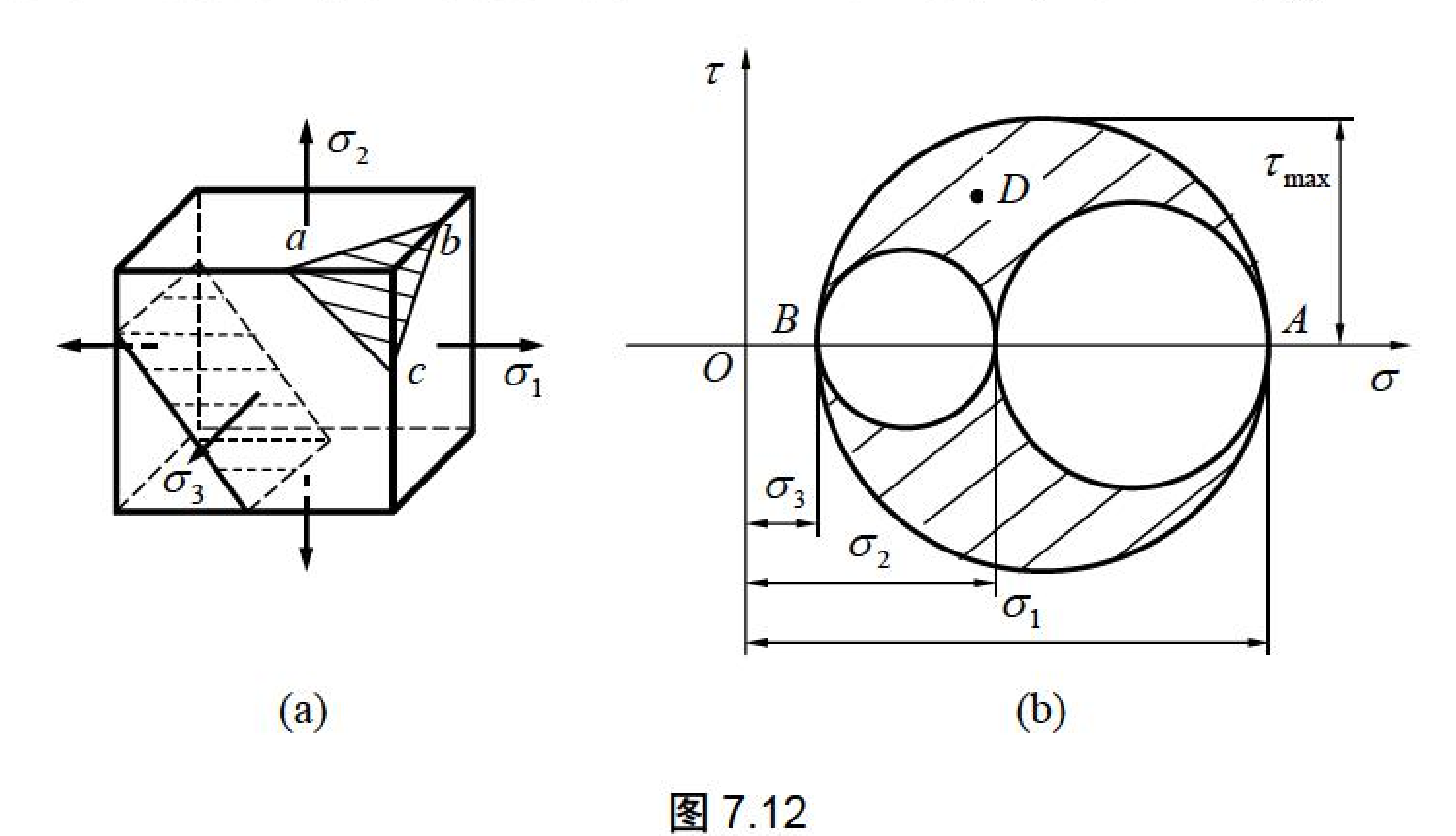
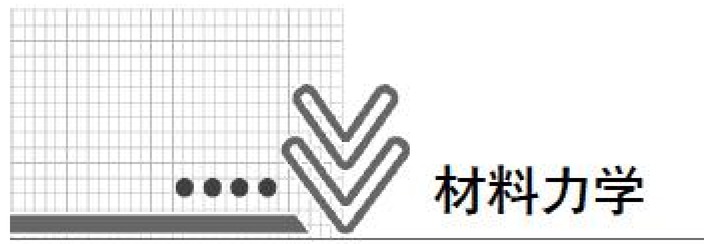


图 7.12



7.3.3 三向应力状态中最大切应力及其方位

从三向应力状态的应力圆可以看出，单元体内最大正应力为

$$\sigma_{\max} = \sigma_1$$

而最大切应力是由σ_1、σ_3组成的应力圆的半径，即

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{7.11}$$

最大切应力所在平面与σ_2平行，而与σ_1、σ_3所在的主平面各成45°，如图 7.13 所示。

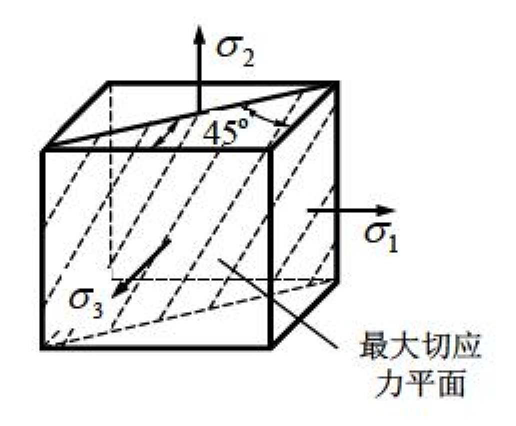


图 7.13

例 7.4 单元体各面上的应力如图 7.14(a)所示，试求该点的主应力和最大切应力。

解： 该单元体已知一个主应力$\sigma_z = 60\text{MPa}$，另外两个主应力所在主平面与σ_z平行，与σ_z无关，由平面状态的应力莫尔圆(见图 7.14(b))可求出其他两个主应力。

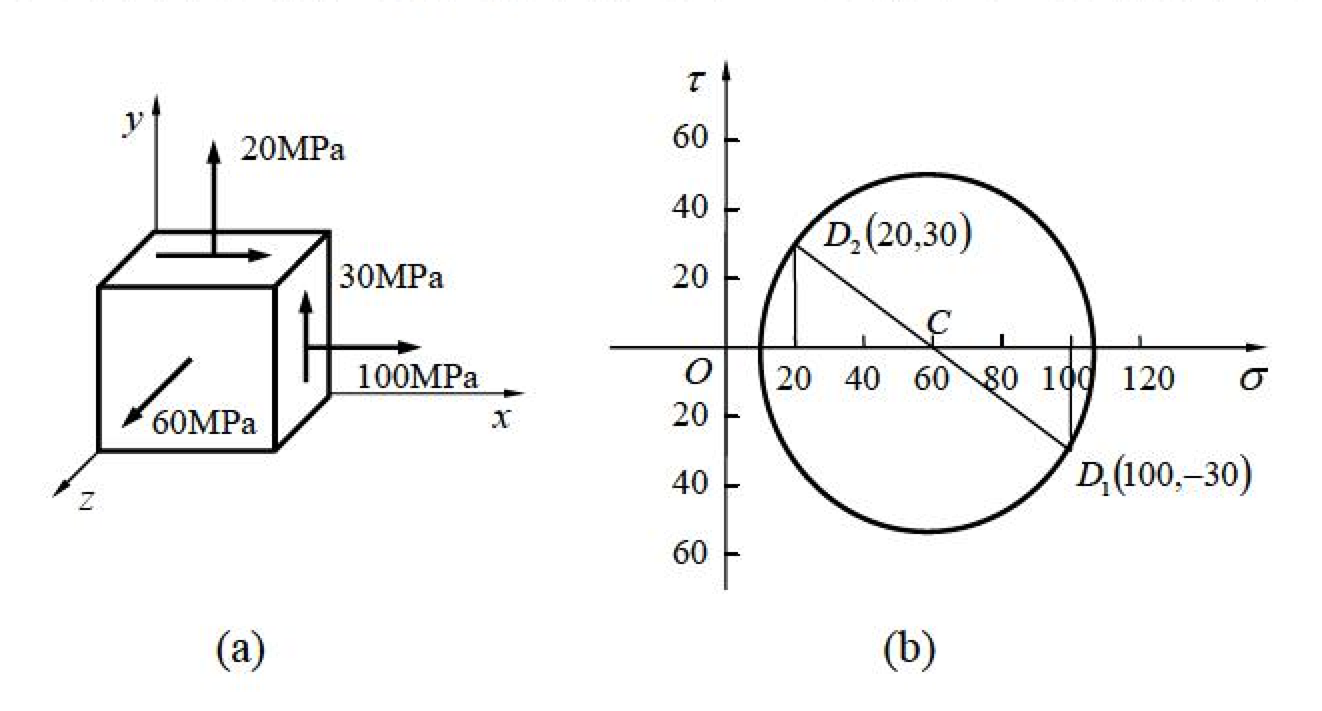


图 7.14

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = 60 \pm \sqrt{\left(\frac{100-20}{2}\right)^2 + 30^2} = \left\{\begin{matrix}110\\ 10\end{matrix}\right. \quad (\text{MPa})$$

3 个主应力分别为

$$\sigma_1 = 110\text{MPa}，\quad \sigma_2 = 60\text{MPa}，\quad \sigma_3 = 10\text{MPa}$$

最大切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{110-10}{2}\text{MPa} = 50\text{MPa}$$

7.4　广义胡克定律

众所周知，轴向拉伸(压缩)中，在线弹性范围内应力与应变的关系——胡克定律的表达式为

$$\sigma = E\varepsilon \quad 或 \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{7.12}$$

式中，ε 为纵向线应变，横向线应变 ε' 为

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -\mu\frac{\sigma}{E} \tag{7.13}$$

扭转变形中，在线弹性范围内，切应力和切应变的关系服从剪切胡克定律，即

$$\tau = G\gamma \quad 或 \quad \gamma = \frac{\tau}{G} \tag{7.14}$$

在一般形式的空间应力状态下，有 6 个独立的应力分量，即 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}，与之相对应的 6 个应变分量是 ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx}。本节主要讨论各向同性材料、在线弹性范围内、小变形条件下，空间应力状态下应力分量与应变分量之间的关系，通常称为广义胡克定律。

7.4.1　一般空间应力状态下的广义胡克定律

一般空间应力状态下，单元体的应力分量如图 7.10 所示。单元体 6 个独立应力分量中 3 个正应力的正负号规定同前，即拉应力为正、压应力为负；而 3 个切应力分量的正负号则作重新规定：若正面(外线法与坐标轴正向一致的平面)上的切应力矢的指向与坐标轴正向一致，则该切应力为正，反之为负。图 7.10 所示各切应力均为正。单元体 6 个应变分量的正负号规定为：线应变 ε_x、ε_y、ε_z 以伸长为正，缩短为负(与前面规定相同)；切应变 γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx} (依次表示直角 $\angle xOy$、$\angle yOz$、$\angle zOx$ 的变化)均以使直角减小者为正，增大者为负。

对于各向同性材料，在小变形条件下且在线弹性范围内时，线应变只与正应力有关，而与切应力无关；而切应变只与切应力有关，而与正应力无关。在 σ_x、σ_y、σ_z 分别单独存在时，由式(7.12)、式(7.13)可知，x 方向的线性应变分别为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x' &= \frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon_x'' &= -\mu\frac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_x''' &= -\mu\frac{\sigma_z}{E} \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

因此，在 σ_x、σ_y、σ_z 同时存在时，单元体在 x 方向的总线应变是上述线应变的叠加。在 y 和 z 方向的线应变可用同样方法求得。x、y 和 z 方向的线应变分别为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)]\\\varepsilon_y&=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)]\\\varepsilon_z&=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)]\end{aligned}\right\}\tag{7.16}$$

至于切应变与切应力之间的关系，仍然是式(7.14)的形式，在 xy、yz、zx 这 3 个面内分别有

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{xy}&=\frac{\tau_{xy}}{G}\\\gamma_{yz}&=\frac{\tau_{yz}}{G}\\\gamma_{zx}&=\frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}\right\}\tag{7.17}$$

式(7.16)和式(7.17)称为一般空间应力状态下的广义胡克定律。

7.4.2 特殊应力状态下的广义胡克定律

1. 三向主应力状态下的广义胡克定律

可用主应力和主应变表示为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1&=\frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]\\\varepsilon_2&=\frac{1}{E}[\sigma_2-\mu(\sigma_3+\sigma_1)]\\\varepsilon_3&=\frac{1}{E}[\sigma_3-\mu(\sigma_1+\sigma_2)]\end{aligned}\right\}\tag{7.18}$$

2. 平面应力状态下的广义胡克定律

在平面应力状态下，将 $\sigma_z=0$、$\tau_{yz}=0$、$\tau_{zx}=0$，代入式(7.16)、式(7.17)，有

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\\\varepsilon_y&=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)\\\varepsilon_z&=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)\\\gamma_{xy}&=\frac{\tau_{xy}}{G}\end{aligned}\right\}\tag{7.19}$$

3. 二向主应力状态下的广义胡克定律

在二向主应力状态下，$\sigma_3=0$，则由式(7.18)得

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1&=\frac{1}{E}(\sigma_1-\mu\sigma_2)\\\varepsilon_2&=\frac{1}{E}(\sigma_2-\mu\sigma_1)\\\varepsilon_3&=-\frac{\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2)\end{aligned}\right\}\tag{7.20}$$

7.4.3　材料弹性常数之间的关系

对于同一种各向同性材料，广义胡克定律中 3 个弹性常数并不完全独立，它们之间存在以下关系，即

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}\tag{7.21}$$

对于绝大多数各向同性材料，泊松比一般在 0~0.5 之间取值，因此，切变模量的取值范围为 $G=\left(\frac{1}{2}\sim\frac{1}{3}\right)E$。

例 7.5　已知一受力构件的自由表面上某点处的两个主应变值分别为 $\varepsilon_1=240\times10^{-6}$、$\varepsilon_3=-160\times10^{-6}$ 且 $\sigma_2=0$。构件材料为 Q235 钢，其弹性模量 E=210MPa，泊松比 $\mu=0.3$。试求该点的主应力，并求自由表面法线方向的线应变。

解：(1)　该点处的主应力。

由于自由表面上无应力作用，该点处于平面主应力状态，由式(7.14)有

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}(\sigma_1-\mu\sigma_3)$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{E}(\sigma_3-\mu\sigma_1)$$

在已知主应变的情况下，由上式可得两主应力为

$$\sigma_1=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_3)=\frac{210\times10^9}{1-0.3^2}\times(240-0.3\times160)\times10^{-6}\,\text{Pa}$$
$$=44.3\times10^6\,\text{Pa}=44.3\text{MPa}$$

$$\sigma_3=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_3+\mu\varepsilon_1)=\frac{210\times10^9}{1-0.3^2}\times(-160-0.3\times240)\times10^{-6}\,\text{Pa}$$
$$=-20.3\times10^6\,\text{Pa}=-20.3\text{MPa}$$

(2)　自由表面法线方向线应变。

由式(7.20)得自由表面法线方向的线应变为

$$\varepsilon_2=-\frac{\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_3)=-\frac{0.3}{210\times10^9}\times(44.3-20.3)\times10^6=-34.3\times10^{-6}$$

7.4.4　各向同性材料的体应变

构件受力变形后，其体积通常会发生变化。单元体积内的体积变化称为体应变，用 θ 表示。现通过图 7.15 所示单元体讨论三向主应力状态下的体应变。在变形前(图 7.15 中实

线)单元体体积为

$$V_0 = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

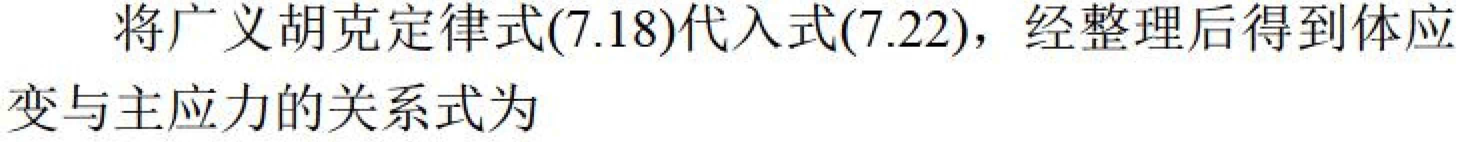
变形后(图 7.15 中虚线)各棱边长度分别为$(1+\varepsilon_1)\mathrm{d}x$、$(1+\varepsilon_2)\mathrm{d}y$、$(1+\varepsilon_3)\mathrm{d}z$，因此，变形的单元体体积为

$$V_1 = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3)$$

展开上式，略去高阶微量后，得

$$V_1 \approx \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)$$

则体应变θ为



$$\theta = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \tag{7.22}$$

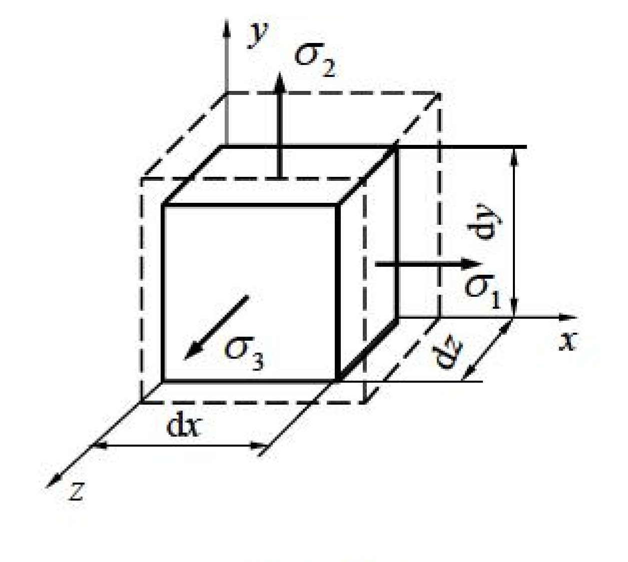


图 7.15

将广义胡克定律式(7.18)代入式(7.22)，经整理后得到体应变与主应力的关系式为

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) \tag{7.23}$$

令$\sigma_{\mathrm{m}} = \frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$，$\sigma_{\mathrm{m}}$为平均应力；令$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$，$K$ 为体积弹性模量。则式(7.23)变为

$$\theta = \frac{\sigma_{\mathrm{m}}}{K} \tag{7.24}$$

式(7.24)表明，体应变θ与平均应力σ_{m}成正比，也称为体积胡克定律。

对于平面纯剪切应力状态，$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$，$\sigma_2 = 0$，由式(7.23)可见，材料的体应变等于零，即在小变形条件下，切应力不引起各向同性材料的体积变化，而只引起形状改变。因此，在图 7.15 所示的一般空间应力状态下，材料的体应变只与 3 个线应变有关。可类似推出

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) \tag{7.25}$$

7.5　平面应变状态及应变测量

通过前面的理论分析，可由作用在构件的载荷计算构件内任意点的应力，再利用胡克定律求出其应变。但在工程实际中，常常会遇到一些问题需要用逆向思维和方法才能解决。即通过试验方法，先用应变仪测出构件表面某点处的应变，然后利用应力与应变的关系求出应力，甚至得到作用在构件上的载荷值。应变测量在工程中使用较多。例如，在设计重要机械设备、大型工程结构中，需对模型进行应变测试；对一些机械构件、桥梁、房屋、水坝等建筑物，要通过应变、应力测试来对构件进行检测；力传感器就是利用应变来测出外力的。因此，要实现通过应变来求应力的目的，就必须先研究一点处的应变状态，弄清楚一点处在各个不同方向上的应变情况。

如果构件内某一点处的应变都是发生在同一平面，则称为平面应变状态。

7.5.1　任意方向的应变

如图 7.16 所示，设已知点 O 处的单元体在坐标系 xOy 中的线应变为 ε_x、ε_y，切应变为 γ_{xy}。为了推导平面应力状态一点处在该平面内任意方向的线应变 ε_α、切应变 γ_α 的表达式，先对各应变量符号作以下规定：线应变以伸长为正，缩短为负；切应变以直角减小为正，反之为负；将坐标系 xOy 绕 O 点旋转一个 α 角，得到一个新坐标系 $x'Oy'$，α 角以逆时针转动为正(见图 7.17(a))。在新坐标系 $x'Oy'$ 中，x' 轴方向的线应变即为 ε_α，$\angle x'Oy'$ 中的直角改变量即为 γ_α。

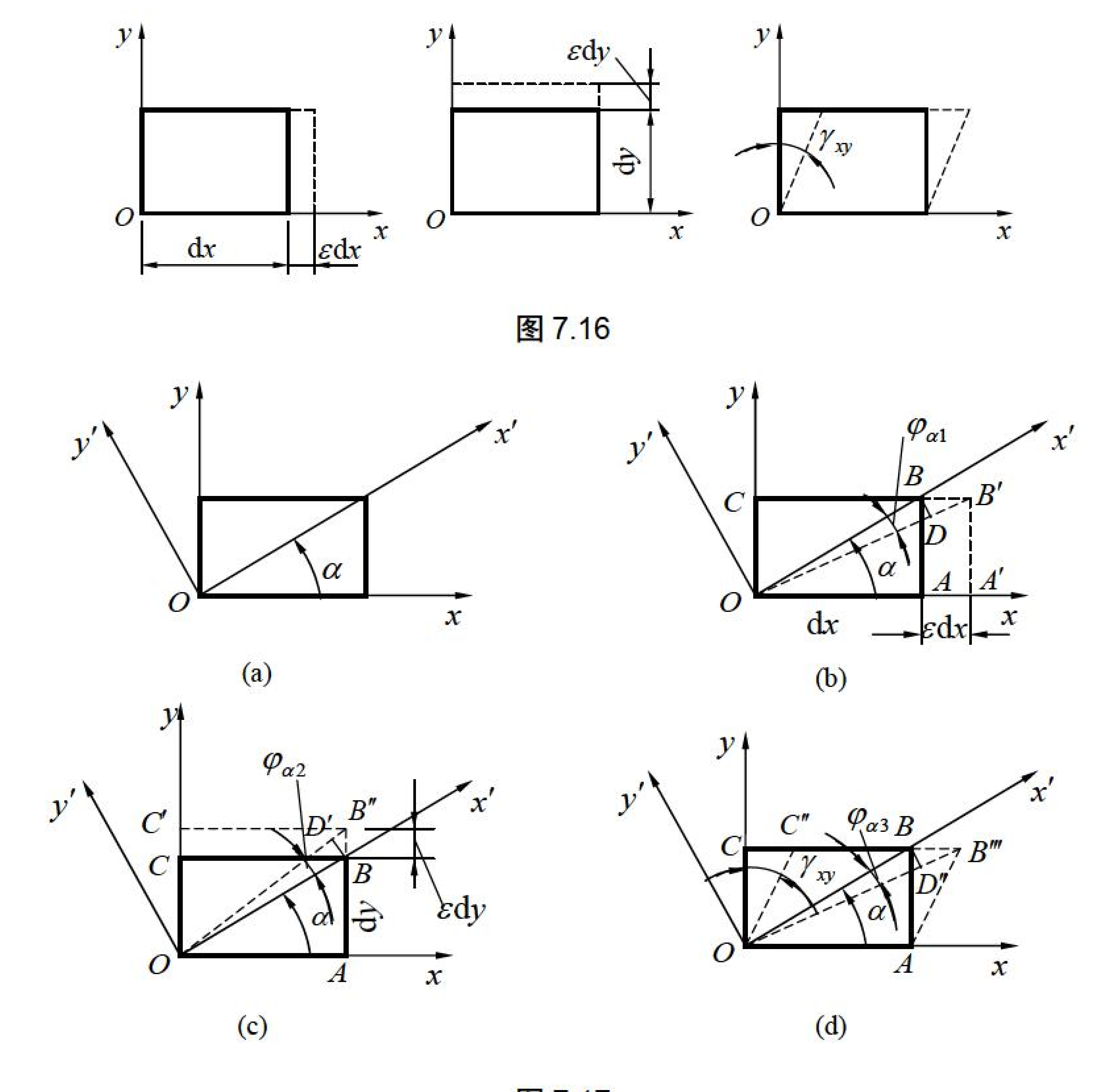


图 7.16

图 7.17

首先研究线应变 ε_α。如图 7.17(b)所示，当只有线应变 ε_x 时，矩形 $OABC$ 在变形后成为 $OA'B'C$，$\overline{BB'}=\overline{AA'}=\varepsilon_x\mathrm{d}x$；作图使 $\overline{OB}=\overline{OD}$，则 $\overline{DB'}$ 为 x' 轴向的伸长量，且 $\overline{DB'}\approx\overline{BB'}\cos\alpha$，则 x' 轴向的线应变 $\varepsilon_{\alpha1}$ 为

$$\varepsilon_{\alpha1}=\frac{\overline{DB'}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{BB'}\cos\alpha}{\mathrm{d}x/\cos\alpha}=\frac{\varepsilon_x\mathrm{d}x\cos\alpha}{\mathrm{d}x/\cos\alpha}=\varepsilon_x\cos^2\alpha \tag{7.26}$$

当只有线应变 ε_y 的情况下(见图 7.17(c))，同理可得 x' 轴向的线应变 $\varepsilon_{\alpha2}$ 为

$$\varepsilon_{\alpha2}=\frac{\overline{D'B''}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{BB''}\sin\alpha}{\mathrm{d}y/\sin\alpha}=\frac{\varepsilon_y\mathrm{d}y\sin\alpha}{\mathrm{d}y/\sin\alpha}=\varepsilon_y\sin^2\alpha \tag{7.27}$$

如图 7.17(d)所示，当只有切应变γ_{xy}时，$\overline{BB'''}\approx\overline{BB'}\mathrm{d}y\tan\gamma_{xy}$，$\overline{OB}=\mathrm{d}y/\sin\alpha$，则在$x'$轴向的线应变$\varepsilon_{\alpha3}$为

$$\varepsilon_{\alpha3}=\frac{\overline{D''B'''}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{BB'''}\cos\alpha}{\mathrm{d}y/\sin\alpha}=\frac{\mathrm{d}y\cdot\tan\gamma_{xy}\cos\alpha}{\mathrm{d}y/\sin\alpha}=\gamma_{xy}\sin\alpha\cos\alpha \tag{7.28}$$

在ε_x、ε_y、γ_{xy}同时存在时，由叠加原理，O 点在x'轴向的线应变ε_α等于式(7.26)、式(7.27)、式(7.28)的代数和，即

$$\varepsilon_\alpha=\varepsilon_{\alpha1}+\varepsilon_{\alpha2}+\varepsilon_{\alpha3}=\varepsilon_x\cos^2\alpha+\varepsilon_y\sin^2\alpha+\gamma_{xy}\sin\alpha\cos\alpha \tag{7.29}$$

式(7.29)经三角函数变换后为

$$\varepsilon_\alpha=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos2\alpha+\frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin2\alpha \tag{7.30}$$

下面再来分析任意方向的切应变γ_α。切应变γ_α是直角$x'Oy'$的变化，在只有应变ε_x的情况下，由图 7.17(b)可见，线段 OB 与轴Ox'之间产生了转角$\varphi_{\alpha1}$(约定顺时针方向为正，逆时针方向为负，下同)，即

$$\varphi_{\alpha1}\approx\frac{\overline{BD}}{\overline{OB}}=\frac{\varepsilon_x\mathrm{d}x\sin\alpha}{\mathrm{d}x/\cos\alpha}=\varepsilon_x\sin\alpha\cos\alpha \tag{7.31}$$

在只有线应变ε_y的情况下(见图 7.17(c))，线段 OB 与Ox'之间产生了转角为$\varphi_{\alpha2}$，即

$$\varphi_{\alpha2}\approx-\frac{\overline{D'B}}{\overline{OB}}=-\frac{\varepsilon_y\mathrm{d}y\cos\alpha}{\mathrm{d}y/\sin\alpha}=-\varepsilon_y\sin\alpha\cos\alpha \tag{7.32}$$

在只有切应变γ_{xy}的情况下(图 7.18(d))，线段 OB 与Ox'之间产生了转角为$\varphi_{\alpha3}$，即

$$\varphi_{\alpha3}\approx\frac{\overline{D''B}}{\overline{OB}}=\frac{\gamma_{xy}\mathrm{d}y\sin\alpha}{\mathrm{d}y/\sin\alpha}=\gamma_{xy}\sin^2\alpha \tag{7.33}$$

在ε_x、ε_y、γ_{xy}同时作用下，线段 OB 产生的总转角φ_α由式(7.31)、式(7.32)、式(7.33)叠加，即

$$\varphi_\alpha=\varphi_{\alpha1}+\varphi_{\alpha2}+\varphi_{\alpha3}=\varepsilon_x\sin\alpha\cos\alpha-\varepsilon_y\sin\alpha\cos\alpha+\gamma_{xy}\sin^2\alpha$$

在上式中的α用$90^\circ+\alpha$代替，即得到Oy'轴的转角变化$\varphi_{90^\circ+\alpha}$，为

$$\varphi_{90^\circ+\alpha}=-\varepsilon_x\sin\alpha\cos\alpha+\varepsilon_y\sin\alpha\cos\alpha+\gamma_{xy}\cos^2\alpha$$

以上计算转角φ_α、$\varphi_{90^\circ+\alpha}$时都是按顺时针转动为正，而切应变是以原来的直角减小为正，因而x'方向的切应变为

$$\gamma_\alpha=\varphi_{90^\circ+\alpha}-\varphi_\alpha=-2\varepsilon_x\sin\alpha\cos\alpha+2\varepsilon_y\sin\alpha\cos\alpha+\gamma_{xy}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

上式可变换为

$$-\frac{\gamma_\alpha}{2}=\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\sin2\alpha-\frac{\gamma_{xy}}{2}\cos2\alpha \tag{7.34}$$

7.5.2 主应变及其方向

在已知ε_x、ε_y和γ_{xy}的应变状态下，利用式(7.33)、式(7.34)可求得单元体任意方向的

线应变和切应变。为方便分析，不妨将式(7.33)、式(7.34)列在一起，并稍作变化为

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha - (-\frac{1}{2}\gamma_{xy})\sin 2\alpha$$

$$\left(-\frac{\gamma_\alpha}{2}\right) = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\alpha + \left(-\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)\cos 2\alpha$$

上述两式与式(7.3)、式(7.4)有完全相同的形式，引用平面应力状态下的结论，切应变为零的方位上的线应变称为主应变，主应变的方向由式(7.35)确定，即

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{\frac{\gamma_{xy}}{2}}{\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}} = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \tag{7.35}$$

两个主应变大小为

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\end{matrix}\right\} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \frac{\gamma_{xy}^{\ 2}}{4}} \tag{7.36}$$

对于各向同性材料，正应力仅引起正应变。因而，任意点处的主应变方向与相应的主应力方向相同，且主应变的顺序也与主应力一致。

7.5.3　应变的测量

测量构件上一点处的线应变通常采用电阻应变片。电阻应变片相当于一段电阻丝，测量时将其粘贴在构件表面的测点处，随同构件一起变形。当构件上的测点处是伸长变形时，电阻丝的长度增加，直径减小，从而使电阻丝的电阻值增加；如测点处是缩短变形时，电阻值会减小。再将应变片接入特定的电路中，通过电阻应变仪测出一点处线应变的大小。

电阻应变片的典型结构如图 7.18(a)所示，由一定长度的很细的电阻丝绕成栅状，粘贴在两片绝缘纸之间，两端接出引线供连接电路用。之所以做成栅状是因为既希望增加电阻丝长度，达到增加电阻变化量、提高测量精度的目的，又希望减小应变片的长度，以反映“一点”处的应变。工程测量中大都采用由专门工厂生产的泊式应变片(见图 7.18(b))，它是利用光刻技术将电阻材料腐蚀成栅状，然后粘固于两层塑料薄膜之间制成。

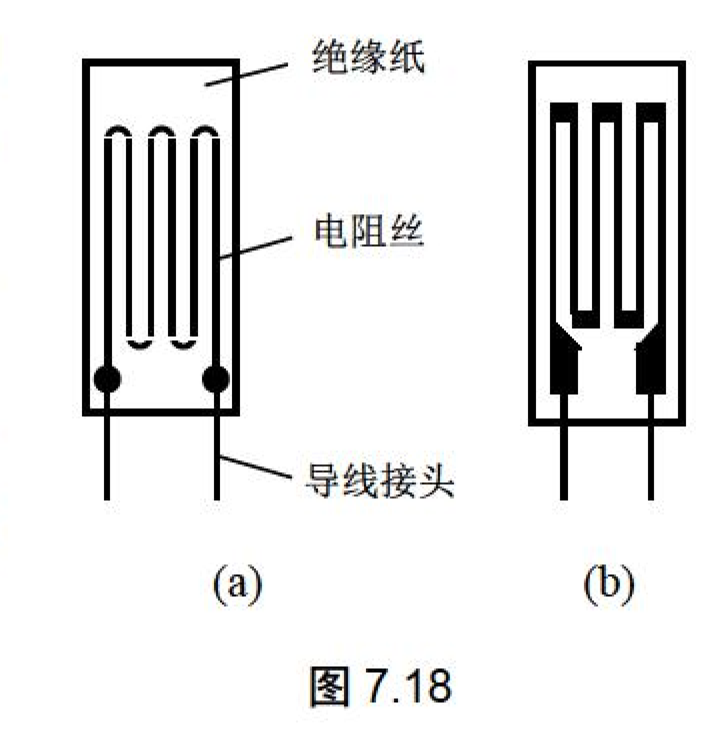


图 7.18

平面应变状态的 3 个应变分量 ε_x、ε_y 和 γ_{xy} 中，ε_x、ε_y 用电阻应变片来测量比较简单，只要在粘贴应变片时保证应变片长度方向与线应变方向一致，而切应变 γ_{xy} 就不能由应变片直接测出。切应变 γ_{xy} 可通过测量直角应片花的 3 个应变值间接求出。如图 7.19(a)所示，直角应变花是由 3 个应变片按 45° 间隔分布后固定在塑料膜上，其位置精度由生产厂家严格保证。测量时只要使应变花的 ε_{0° 应变片与 x 轴保持一致，则应变花上的 3 个应变值 ε_{0°、ε_{45° 和 ε_{90° 分别是 α 角在 0°、45°、90° 方向上的线应变。将 α 角等于 0°、45°、90° 分别代入式(7.30)可得

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{0^\circ} &= \varepsilon_x \\ \varepsilon_{45^\circ} &= \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \varepsilon_{90^\circ} &= \varepsilon_y\end{aligned}\right\} \tag{7.37}$$

3 个应变分量ε_x、ε_y和γ_{xy}分别为

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_{0^\circ} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_{90^\circ} \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{45^\circ}-(\varepsilon_{0^\circ}+\varepsilon_{90^\circ})\end{aligned}\right\} \tag{7.38}$$

由式(7.38)可知，切应变γ_{xy}是由测量 3 个方向的线应变确定的。

在测量出直角应变花的 3 个应变值ε_{0°、ε_{45°和ε_{90°后，可将式(7.38)代入式(7.35)、式(7.36)求得一点处的主应变和主方向，经整理后为

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2\end{matrix}\right\} = \frac{\varepsilon_{0^\circ}+\varepsilon_{90^\circ}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\varepsilon_{45^\circ}-\varepsilon_{0^\circ})^2+(\varepsilon_{45^\circ}-\varepsilon_{90^\circ})^2} \tag{7.39}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\varepsilon_{45^\circ}-(\varepsilon_{0^\circ}+\varepsilon_{90^\circ})}{\varepsilon_{0^\circ}-\varepsilon_{90^\circ}} \tag{7.40}$$

应变测量中，有时也采用60°应变花，或称等角应变花，如图 7.19(b)所示。

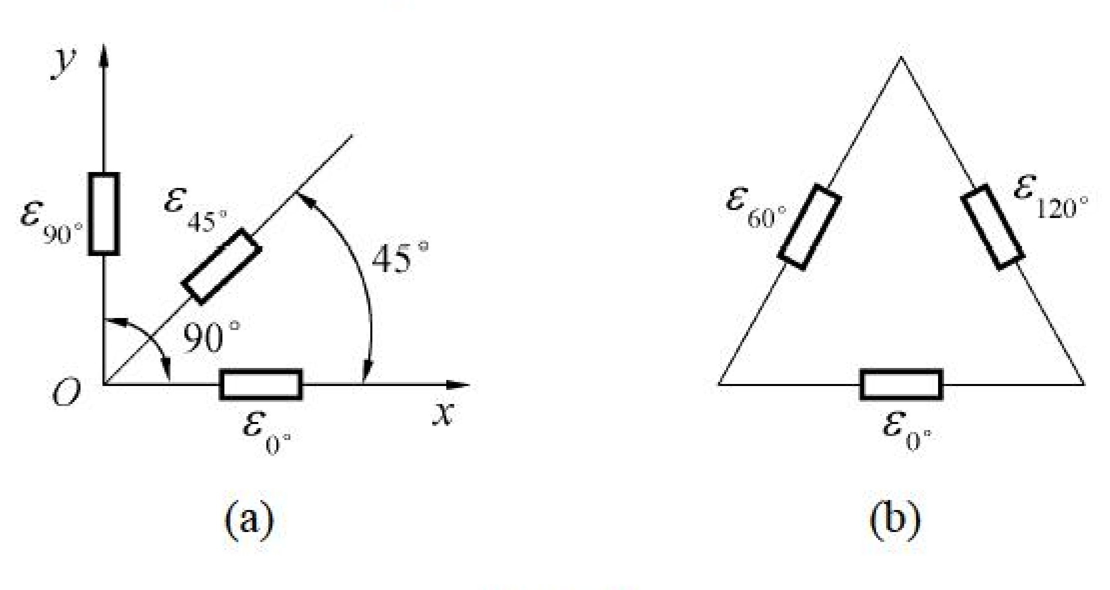


图 7.19

例 7.6 试利用图 7.20(a)所示的纯剪切应力状态的单元体，证明各向同性材料的 3 个弹性常数E、G和μ之间有下列关系(即式(7.15))。

解：在纯剪切应力状态下的单元体，其平面应变状态的 3 个应变分量为

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{\tau}{G}$$

说明：图 7.20(a)所示单元体在切应力τ作用下，由切应变符号约定可知γ_{xy}为负。

由式(7.30)可知，单元体在45°方向上的线应变ε_{45°为

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = -\frac{\tau}{2G} \tag{a}$$

纯剪切应力状态下，单元体在$\alpha=45^\circ$、$\alpha=-45^\circ$的截面上有最小的主应力和最大主应力，3 个主应力为

$$\sigma_1=\tau，\ \sigma_2=0，\ \sigma_3=-\tau$$

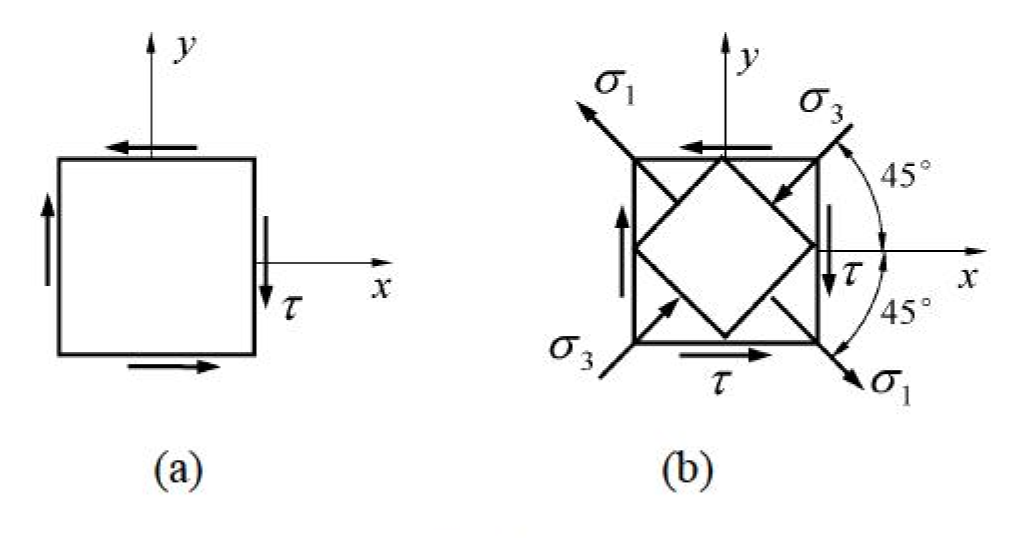


图 7.20

根据平面主应力状态下的广义胡克定律，由式(7.18)有

$$\varepsilon_{45^\circ}=\varepsilon_3=\frac{1}{E}(\sigma_3-\mu\sigma_1)=-\frac{1+\mu}{E}\cdot\tau \tag{b}$$

比较式(a)与式(b)，有

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}$$

7.6　空间应力状态下的应变能密度

在单轴应力状态下，构件内积蓄的应变能密度由式(2.10)给出，即

$$\upsilon_\varepsilon=\frac{1}{2}\sigma\varepsilon \tag{7.41}$$

在三向应力状态下，弹性体的应变能在数值上仍等于外力所做的功，其应变能大小只取决于外力的最终数值，而与加力次序无关。图 7.21(a)所示的三向主应力状态下的单元体，对于每一个主应力，其应变能密度可以视作该主应力在相应方向的主应变上所做的功，而其他两主应力在该主应变上不做功。因此，三向应力状态下的应变能密度为

$$\upsilon_\varepsilon=\frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1+\sigma_2\varepsilon_2+\sigma_3\varepsilon_3) \tag{7.42}$$

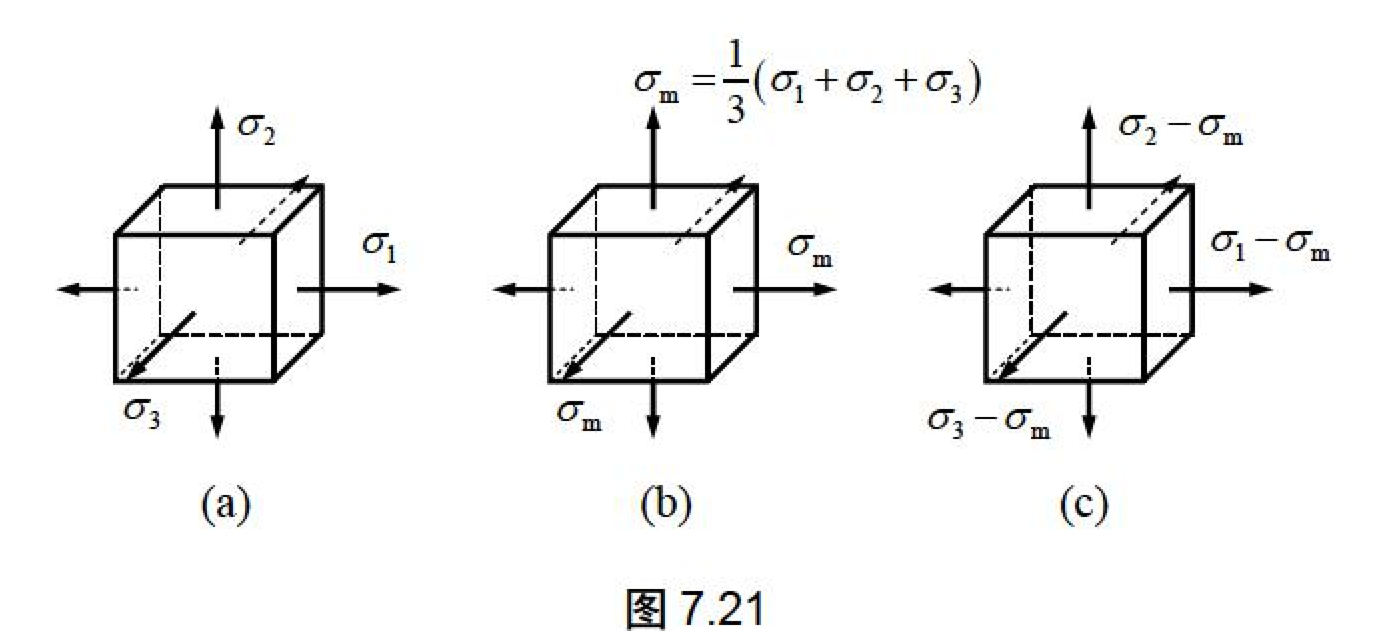


图 7.21

由广义胡克定律式(7.18)，可将式(7.42)表达为应变能密度与主应力的关系式，经整理后得

$$\upsilon_\varepsilon=\frac{1}{2E}[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)] \tag{7.43}$$

在一般情况下，单元体都将同时产生体积变化和形状改变。将图 7.21(a)所示单元体分

解为图 7.21(b)、(c)所示两种单元体，其中σ_m称为平均应力，即

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{7.44}$$

在图 7.21(b)所示单元体应力状态中，因为每个面上的主应力σ_m相等，所以，单元体仅发生体积变化，而形状不会改变。这种应力状态下的单元体应变能密度称为体积改变能密度，用υ_V表示。将式(7.44)代入式(7.43)，经整理后得

$$\begin{aligned}\upsilon_V &= \frac{1}{2E}[\sigma_m^2 + \sigma_m^2 + \sigma_m^2 - 2\mu(\sigma_m^2 + \sigma_m^2 + \sigma_m^2)] \\ &= \frac{3(1-2\mu)}{2E}\sigma_m^2 = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2\end{aligned} \tag{7.45}$$

图 7.21(c)所示单元体应力状态中，3 个主应变的代数和等于零，即体应变θ为零，故体积不发生变化，仅发生形状的改变，这种状态下的应变能密度称为形状改变能密度(也称畸变能密度)，用υ_d表示。将图 7.21 中的$(\sigma_1 - \sigma_m)$、$(\sigma_2 - \sigma_m)$、$(\sigma_3 - \sigma_m)$分别代替式(7.43)中的σ_1、σ_2、σ_3，经整理简化后得

$$\upsilon_d = \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \tag{7.46}$$

7.7 强度理论及应用

众所周知，单向应力状态和纯剪切应力状态下材料失效时的极限应力值，是直接由试验确定的。但是，对于空间应力状态下则不能。主要基于两个方面的原因：一方面是空间应力状态各式各样，各面上的应力组合有无穷多种，不可能一一通过试验来确定材料失效时的极限应力；另一方面，空间应力状态的试验在技术条件上也较拉伸、扭转试验困难得多。因此，为了建立空间应力状态下的强度条件，就需要分析导致材料破坏的原因，提出材料破坏或失效假设，这类假设称为强度理论。大量试验表明，无论应力状态多么复杂，材料在常温、静载作用下主要发生两种破坏或失效的形式：一种是在没有明显的塑性变形情况下发生突然断裂，称为脆性断裂，如铸铁试样的拉伸和扭转时的破坏；另一种是材料产生显著的塑性变形而使构件丧失正常工作能力，称为塑性屈服，如工程中一些钢质构件虽然没有断裂，但由于严重变形而报废。通过长期的生产实践和科学研究，根据这两种破坏形式，许多学者提出了关于空间应力状态下材料破坏的多种假设。一些假设认为，材料之所以按某种方式破坏或失效，是由应力、应变或应变能等因素中的某一因素引起，但没有一种假设能适用所有材料的破坏或失效。假设是否正确、适于何种情况，还必须由实践来检验。本节主要介绍工程中较常用的 4 种强度理论。

7.7.1 4 种常用强度理论

根据材料破坏失效的两种形式——屈服或断裂，强度理论也分为两大类：第一类强度理论是解释材料脆性断裂破坏的，包括最大拉应力理论和最大伸长线应变理论；第二类强度理论是解释材料屈服破坏的，包括最大切应力理论和畸变能密度理论。

1. 最大拉应力理论(第一强度理论)

这一理论认为，引起材料断裂破坏的主要因素是最大拉应力。即无论材料处于何种应力状态，只要最大拉应力σ_1达到材料的极限应力σ_b，材料就发生脆性断裂。根据这一理论，材料发生破坏的条件为

$$\sigma_1 = \sigma_b \tag{7.47}$$

将材料极限应力σ_b除以安全系数得到许用应力，所以按第一强度理论建立的强度条件为

$$\sigma_1 \leqslant [\sigma] \tag{7.48}$$

这一理论与脆性材料(如铸铁、石料等)的拉伸、扭转变形试验能较好地吻合。式(7.47)中σ_b是材料脆断时极限应力。对于塑性材料，在没有发生断裂前已因塑性屈服而失效，故不能适应该理论。此外，对于没有拉应力的状态如单轴压缩、三向压缩等也无法应用。

2. 最大伸长线应变理论(第二强度理论)

这一理论认为，引起材料断裂破坏的主要因素是最大伸长线应变。即无论材料处于何种应力状态，只要最大伸长线应变ε_1达到材料在单轴拉伸时的极限应变值ε_u，材料就发生脆性断裂。根据这一理论，材料发生破坏的条件是

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_u \tag{7.49}$$

对于脆性材料来说，认为在断裂破坏前近似服从胡克定律，式(7.49)右边的极限应变ε_u在单轴拉伸时为$\varepsilon_u = \dfrac{\sigma_b}{E}$。在空间应力状态下，由广义胡克定律，式(7.49)左边的最大伸长线应变ε_1为

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \tag{7.50}$$

将式(7.50)代入式(7.49)，材料破坏条件变为

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_b \tag{7.51}$$

在引入安全系数n后，按第二强度理论建立的强度条件为

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leqslant [\sigma] \tag{7.52}$$

式中，$[\sigma]$为材料在单轴拉伸时发生断裂的许用拉应力。

这一理论能较好地解释混凝土、石料等脆性材料(抗拉能力极差)在压缩试验中出现纵向开裂的现象。但显然不适于塑性材料，因为塑性材料断裂破坏前早已不服从胡克定律了。此外，对于脆性材料以拉应力为主的情况，如二轴、三轴受拉，由式(7.52)的计算结果认为比单轴拉伸更不易断裂，这与试验结果不相符。因此，最大伸长线应变理论只适于脆性材料以压应力为主(不包括三轴压缩)的情况。这一理论只与少数脆性材料受压试验结果吻合，而像铸铁材料在单轴压缩破坏时，断面形式就与此理论不符。

3. 最大切应力理论(第三强度理论)

这一理论认为，引起材料屈服破坏的主要因素是最大切应力。即无论材料处于何种应力状态，只要最大切应力τ_{max}达到材料在单轴拉伸时的切应力极限值τ_u，材料就发生塑性屈服破坏。根据这一理论，材料发生屈服破坏的条件为

$$\tau_{max} = \tau_u \tag{7.53}$$

对于单轴拉伸，横截面上正应力到达屈服极限τ_s，材料出现屈服。此时，45°斜截面上的切应力极限值$\tau_u=\dfrac{\sigma_s}{2}$。三向主应力状态下最大切应力$\tau_{max}$为

$$\tau_{max}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \tag{7.54}$$

式(7.54)代入式(7.53)，材料屈服破坏的条件变为

$$\sigma_1-\sigma_3=\sigma_s \tag{7.55}$$

引入安全系数后，得到第三强度理论的强度条件为

$$\sigma_1-\sigma_3\leqslant[\sigma] \tag{7.56}$$

这一理论能较好地描述塑性材料的屈服现象，如低碳钢拉伸至屈服时，沿与试样轴线45°方向上出现斜纹。第三强度理论没有考虑到主应力σ_2的影响，与试验结果的吻合度不够。实践表明，这一理论建立的强度条件更偏于安全且便于计算，因此在工程中得到广泛应用。

4. 畸变能密度理论(第四强度理论)

这一理论利用了形状改变能密度进行分析，又称为形状改变能密度理论。它认为，引起材料屈服破坏的主要因素是畸变能密度。即无论材料处于何种应力状态，只要单元体内畸变能密度υ_d达到材料单轴拉伸时畸变能密度的极限值υ_{du}，材料就发生屈服破坏。根据这一理论，材料发生屈服破坏的条件为

$$\upsilon_d=\upsilon_{du} \tag{7.57}$$

在单轴拉伸时，屈服应力为σ_s，3 个主应力为$\sigma_1=\sigma_s$、$\sigma_2=\sigma_3=0$，将 3 个主应力代入式(7.46)得单轴拉伸时畸变能密度极限值υ_{du}为

$$\upsilon_{du}=\frac{1+\mu}{3E}\sigma_s^2 \tag{7.58}$$

三向应力状态下的畸变能密度为

$$\upsilon_d=\frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2] \tag{7.59}$$

将式(7.59)、式(7.58)代入式(7.57)，材料发生屈服破坏的条件为

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}=\sigma_s$$

引入安全系数 n 后，便得到第四强度理论的强度条件为

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}\leqslant[\sigma] \tag{7.60}$$

第四强度理论强调的影响因素是引起材料产生形状改变的畸变能密度，从本质上揭示了塑性材料由量变到质变的屈服过程。试验表明，该理论比最大切应力理论更符合试验结果。

根据式(7.48)～式(7.60)，可以将 4 个强度理论的强度条件写成

$$\sigma_r\leqslant[\sigma] \tag{7.61}$$

式中，σ_r为相当应力，它是由 3 个主应力按一定形式组合而成。按第一强度理论到第四强度理论的顺序，相当应力分别为

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{r1}=\sigma_1\\
&\sigma_{r2}=\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)\\
&\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3\\
&\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}
\end{aligned}\right\}\tag{7.62}$$

7.7.2　强度理论的应用

由前面分析可知，脆性材料如铸铁、混凝土、石料等的失效形式以脆断为主，宜采用第一、第二强度理论；塑性材料如碳钢、铜、铝等的失效形式是以屈服为主，宜采用第三、第四强度理论。但试验表明，即使是同一种材料，不同的应力状态下也有可能出现不同的失效形式。例如，碳钢在单轴拉伸下的失效形式是屈服，但碳钢制成的螺纹部分受拉时就无明显塑性变形，而沿螺纹根部截面发生脆性断裂，此时螺纹根部因应力集中出现了三向拉伸应力状态。又如铸铁在单轴拉伸时的失效形式是脆断。但如将一个高硬度的淬火钢球压在铸铁板上，缓慢地施加压力，压力到达一定值时，铸铁板上会出现明显的凹坑，表明铸铁受力点附近材料产生了塑性屈服，这是因为受力点附近单元体呈三向压应力状态。

根据试验资料，可将 4 种强度理论的应用范围归纳如下。

(1)　4 种强度理论均须在下列条件下应用：常温、静载、各向同性材料。

(2)　在三轴拉应力(相近)状态下，无论是脆性材料还是塑性材料都会发现脆断，宜采用最大拉应力理论。

(3)　在三轴压应力(相近)状态下，无论是脆性材料还是塑性材料，通常都产生屈服失效，一般采用畸变能密度理论。

(4)　对于脆性材料，在二轴拉伸应力状态下，或以拉应力为主的应力状态，应采用最大拉应力理论；在以压应力为主的应力状态下，可采用最大伸长线应变理论；对于拉应力和压应力同时存在的应力状态，宜采用莫尔强度理论(可参照有关教材)。

(5)　对于塑性材料，除三向拉应力状态外，各种复杂应力状态下都会产生屈服失效，一般采用最大切应力理论或畸变能密度理论。前者计算简单，计算结果偏于安全；后者与试验结果更为接近。

利用强度理论，可由材料单轴拉伸的许用拉应力$[\sigma]$推导出材料在纯剪切应力状态下的许用切应力$[\tau]$。在纯剪切应力状态下，3 个主应力为

$$\sigma_1=\tau，\quad \sigma_2=0，\quad \sigma_3=-\tau$$

对于低碳钢等塑性材料，若按畸变能密度理论建立强度条件，由式(7.60)可得

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\tau-0)^2+(0+\tau)^2+(-\tau-\tau)^2]}=\sqrt{3}\tau\leqslant[\sigma]$$

即

$$\tau\leqslant\frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$$

将上式与纯剪切应力状态下的强度条件$\tau\leqslant[\tau]$相比较，则可得这类材料在纯剪切应力状态下的许用切应力$[\tau]$，与单轴拉伸时的许用拉应力$[\sigma]$之间的关系为

$$[\tau]=\frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}=0.577[\sigma] \tag{7.63}$$

目前在钢结构设计规范中，基本上是按式(7.63)由低碳钢的许用拉应力来规定许用切应力的。在有的设计规范中，规定$[\tau]=0.5[\sigma]$，这是按最大切应力理论的强度条件推出的。同理，对于铸铁类的脆性材料，应用最大拉应力理论和最大伸长线应变理论，可推导出材料许用切应力$[\tau]$与许用拉应力$[\sigma]$的关系为

$$[\tau]=(0.8\sim1)[\sigma] \tag{7.64}$$

例 7.7 已知灰铸铁构件上危险点处的应力状态如图 7.22 所示。若铸铁材料的许用拉应力$[\sigma]=30\text{MPa}$，试校核该点处的强度是否安全。

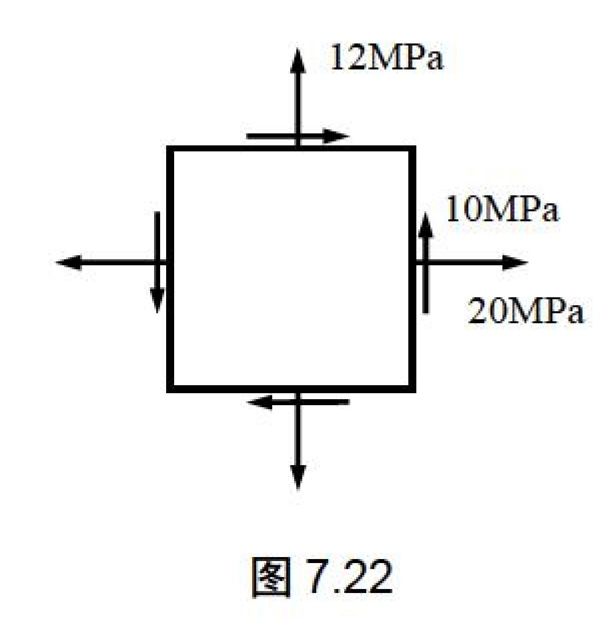


图 7.22

解：(1) 应力状态分析。

该点为平面应力状态，两个主应力为

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2}$$

$$=\frac{20+12}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{20-12}{2}\right)^2+(-10)^2}$$

$$=\begin{cases}28.8\\3.2\end{cases}\ (\text{MPa})$$

3 个主应力为：$\sigma_1=28.8\text{MPa}$，$\sigma_2=3.2\text{MPa}$，$\sigma_3=0$。

(2) 强度校核。

该危险点是平面应力状态，为二向拉伸应力状态，构件材料是脆性材料，故采用最大拉应力理论下的强度条件

$$\sigma_1\leqslant[\sigma]$$

显然，$\sigma_1=28.28\text{MPa}<[\sigma]=30\text{MPa}$。

故此，危险点强度是足够的。

例 7.8 两端简支的钢梁承受载荷如图 7.23(a)所示，已知钢梁型号为 20a 工字钢，材料许用正应力$[\sigma]=170\text{MPa}$，许用切应力$\tau=100\text{MPa}$。试确定梁上危险点并校核强度。

解：(1) 确定梁上的危险点。

绘制简支梁的剪力图和弯矩图如图 7.23(b)、(c)所示。从内力图可以看出，梁 C 截面左侧和 D 截面右侧上有最大的剪力和弯矩。以 C 截面为例，在其左侧横截面上，如

图 7.23(d)所示，b 点有最大的拉应力，切应力为零；O 点有最大的切应力，正应力为零；而在腹板与下翼缘的交界处的 a 点既有较大的正应力，也有较大的切应力，且为平面应力状态。因此，b、o、a 点都是危险点。

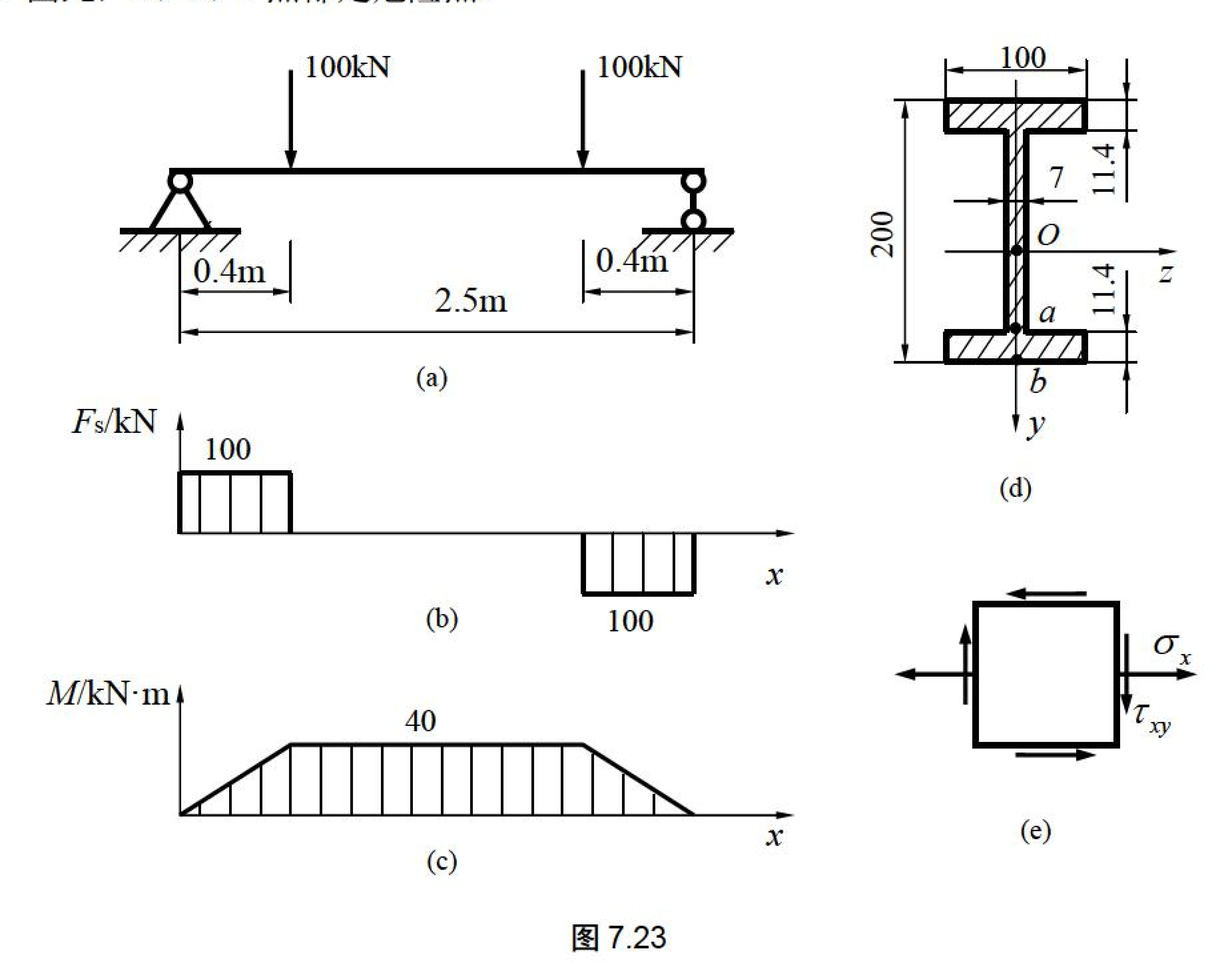


图 7.23

(2)　校核 b 点的正应力强度。

由型钢表查得 20a 工字钢截面的 $I_z = 2370\text{cm}^4$，$W_z = 237\text{cm}^3$，$\dfrac{I_z}{S^*_{z\max}} = 17.2\text{cm}$，工字钢截面尺寸可简化为图 7.23(d)所示尺寸。

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{40\times10^3}{237\times10^{-6}}\text{Pa}$$
$$= 168.8\times10^6\,\text{Pa} = 168.8\text{MPa} < [\sigma] = 170\text{MPa}$$

满足正应力强度条件。

(3) 校核 o 点的切应力强度。

$$\tau_{\max} = \frac{F_{s\max}S^*_z}{b\cdot I_z} = \frac{100\times10^3}{7\times10^{-3}\times17.2\times10^{-2}}\text{Pa}$$
$$= 83.1\times10^6\,\text{Pa} = 83.1\text{MPa} < [\tau] = 100\text{MPa}$$

满足切应力强度条件。

(4)　校核 a 点处的强度。

a 点处为平面应力状态，应根据该点 σ_x、σ_y、τ_{xy} 求出主应力状态，再由强度理论校核强度。如图 7.23(e)所示，该点的正应力 σ_x、切应力 τ_{xy} 为

$$\sigma_x=\frac{M_{\max}\cdot y_a}{I_z}=\frac{40\times10^3\times(200/2-11.4)\times10^{-3}}{2370\times10^{-8}}\text{Pa}$$
$$=149.5\times10^6\,\text{Pa}=149.5\text{MPa}$$
$$\tau_{xy}=\frac{F_{\text{smax}}\cdot S_{za}^*}{bI_z}=\frac{100\times10^3\times[11.4\times100\times(100-11.4/2)]\times10^9}{7\times10^3\times2370\times10^{-8}}\text{Pa}$$
$$=64.8\times10^6\,\text{Pa}=64.8\text{MPa}$$

对于图 7.23(e)所示单元体，主应力为

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1=\sigma_{\max}\\ \sigma_3=\sigma_{\min}\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2+\tau_{xy}{}^2}$$
$$\sigma_2=0$$

因为材料为碳钢，平面应力状态为拉压状态，故采用第三、第四强度理论来校核 a 点强度，由最大切应力理论的强度条件有

$$\sigma_{r3}=\sigma_1-\sigma_3=\sqrt{\sigma_x^2+4\tau_{xy}^2}=\sqrt{149.5^2+4\times64.8^2}\text{MPa}=197.9\text{MPa}>[\sigma]=170\text{MPa}$$

由畸变能密度理论强度条件有

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}=\sqrt{\sigma_x^2+3\tau_{xy}^2}$$
$$=\sqrt{149.5^2+3\times64.8^2}\text{MPa}=186.9\text{MPa}>[\sigma]=170\text{MPa}$$

尽管由第四强度理论计算出 a 点的相当应力较第三强度理论计算出的小，但还是大于许用正应力$[\sigma]$，且 $\frac{\sigma_{r4}-[\sigma]}{[\sigma]}\times100\%=\frac{186.9-170}{170}\times100\%=10\%>5\%$，说明梁的截面尺寸不能满足强度要求，需要改选较大型号的工字梁。选用 20b 工字钢后，重新计算 $\sigma_{r4}=164.2\text{MPa}<[\sigma]$。因此，此工字梁应改为 20b 型工字钢才能满足强度要求。

本 章 小 结

受力构件一点处不同方位截面上的应力的集合，称为该点的应力状态。单元体上有一对面上总是不存在应力时，称为平面应力状态；单元体所有面上均存在应力时，称为空间应力状态。单元体中三对互相垂直的面上只有正应力，而切应力等于零，这样的面称为主平面，主平面上的正应力称为主应力。

材料破坏失效有屈服或断裂两种形式。强度理论也分为两大类，第一类强度理论是解释材料脆性断裂破坏的，包括最大拉应力理论和最大伸长线应变理论；第二类强度理论是解释材料屈服破坏的，包括最大切应力理论和畸变能密度理论。

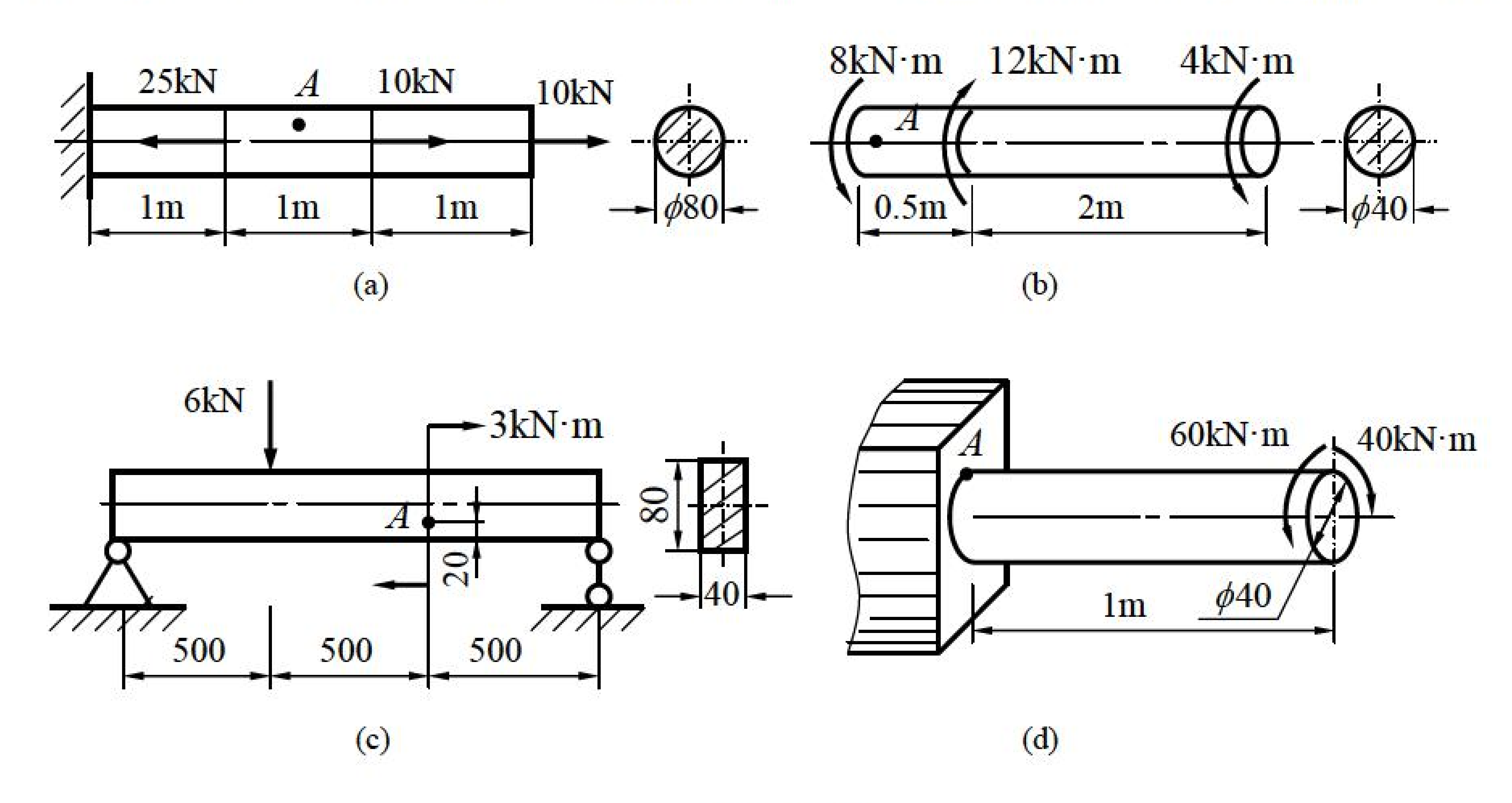
最大拉应力理论(第一强度理论)认为，引起材料断裂破坏的主要因素是最大拉应力。即无论材料处于何种应力状态，只要最大拉应力达到材料的极限应力，材料就发生脆性断裂。最大伸长线应变理论(第二强度理论)认为，引起材料断裂破坏的主要因素是最大伸长线应变，无论材料处于何种应力状态，只要最大伸长线应变达到材料在单轴拉伸时的极限应变值，材料就发生脆性断裂。最大切应力理论(第三强度理论)认为，引起材料屈服破坏的主要因素是最大切应力，无论材料处于何种应力状态，只要最大切应力达到材料在单轴

拉伸时的切应力极限值，材料就发生塑性屈服而破坏。畸变能密度理论(第四强度理论)认为，引起材料屈服破坏的主要因素是畸变能密度，无论材料处于何种应力状态，只要单元体内畸变能密度达到材料单轴拉伸时畸变能密度的极限值，材料就发生屈服破坏。

对于脆性材料，以拉应力为主的应力状态，采用最大拉应力理论；在以压应力为主(不含三向压缩)的应力状态下，采用最大伸长线应变理论。对于塑性材料，除三向拉应力状态外，一般采用最大切应力理论或畸变能密度理论。

习　　题

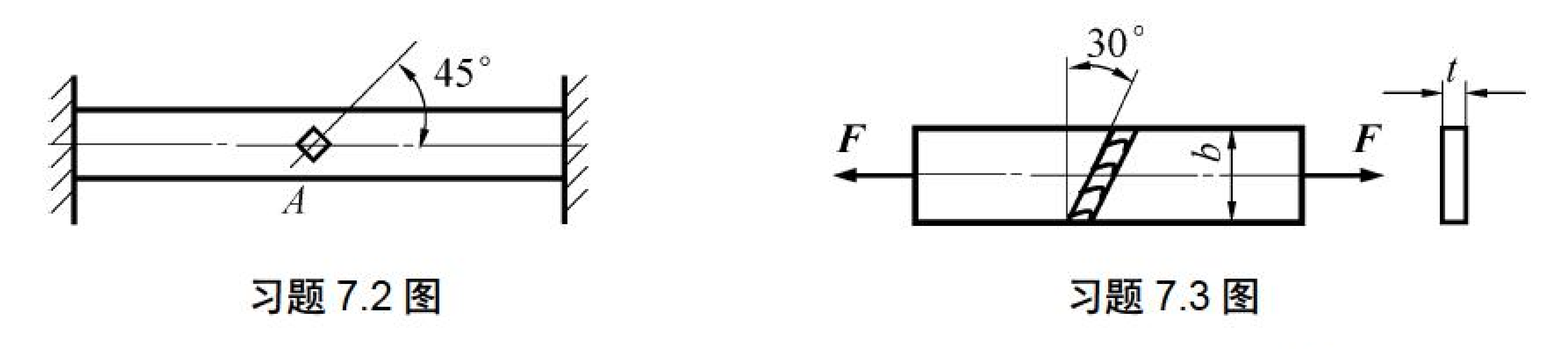
7.1　试从习题 7.1 图所示各结构中指定点 A 处取出单元体，并标明该点的应力状态。



习题 7.1 图

7.2　如习题 7.2 图所示一横截面面积为 A 的铜质圆杆，两端固定。已知铜的线胀系数 $\alpha = 2\times10^{-5}(℃)^{-1}$，弹性模量 E =110GPa，当铜杆温度升高 50℃ 时，试求铜杆上 A 点处所示单元体的应力状态。

7.3　如习题 7.3 图所示两块钢板由斜焊缝焊接，焊缝材料的许用应力 $[\sigma]$=145MPa，板料宽 b =200mm，板厚 t =10mm，焊缝夹角如图示，试求此焊缝所能承担的许可拉力 $[F]$。



习题 7.2 图　　　　习题 7.3 图

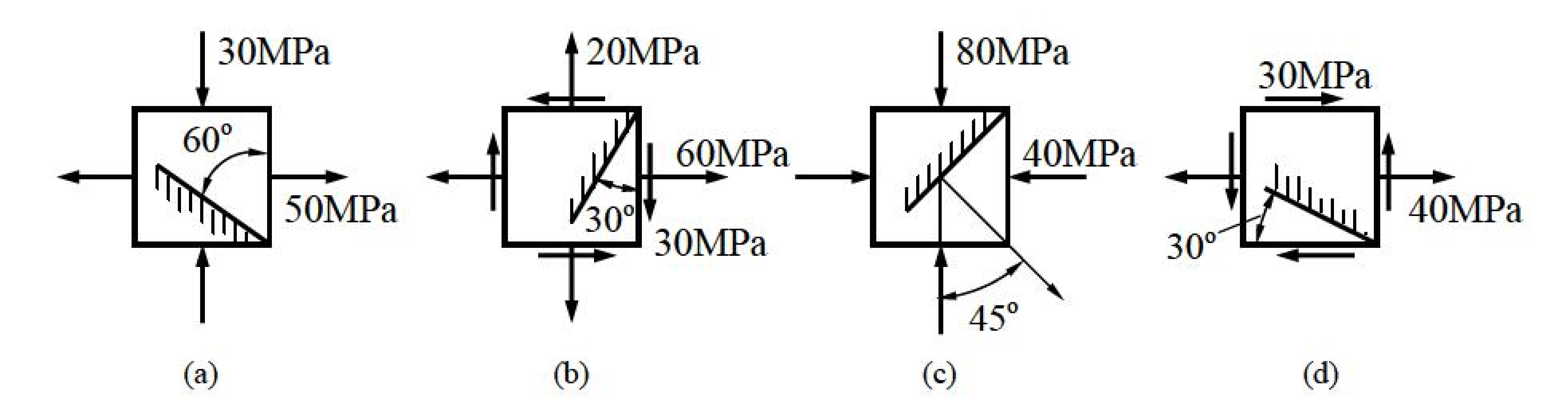
7.4　在习题 7.4 图所示各单元体中，试用解析法和图解法求指定斜截面上的应力值。

7.5　已知单元体的应力状态如习题 7.5 图所示。试利用解析法和图解法求：

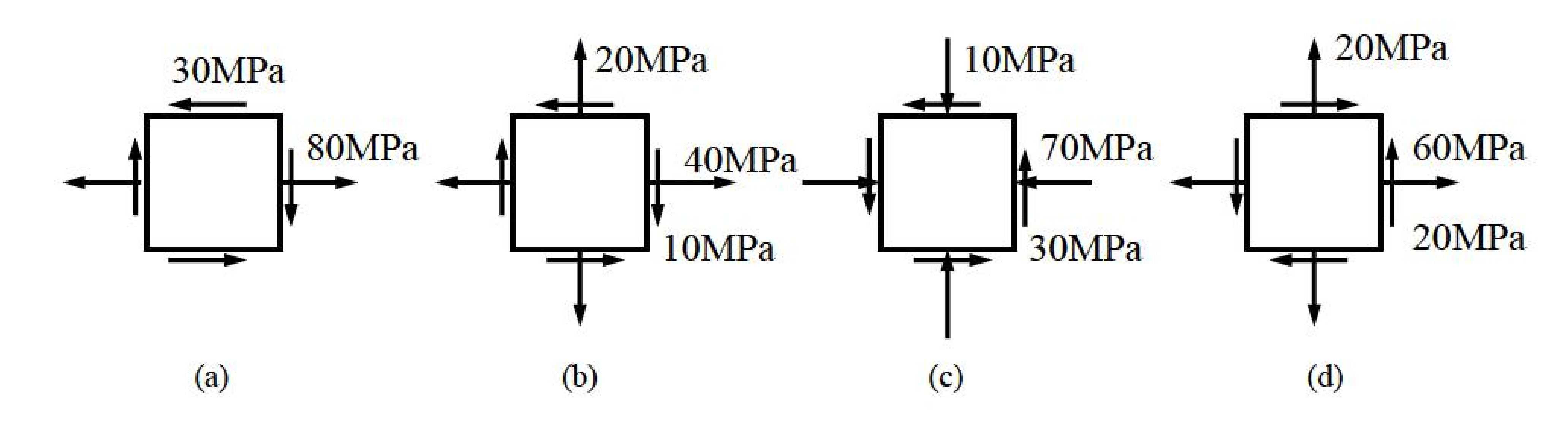
(1)　主应力大小，主平面位置。

(2) 在单元体绘出主平面位置和主应力方向。

(3) 极值切应力及所在平面。



习题 7.4 图

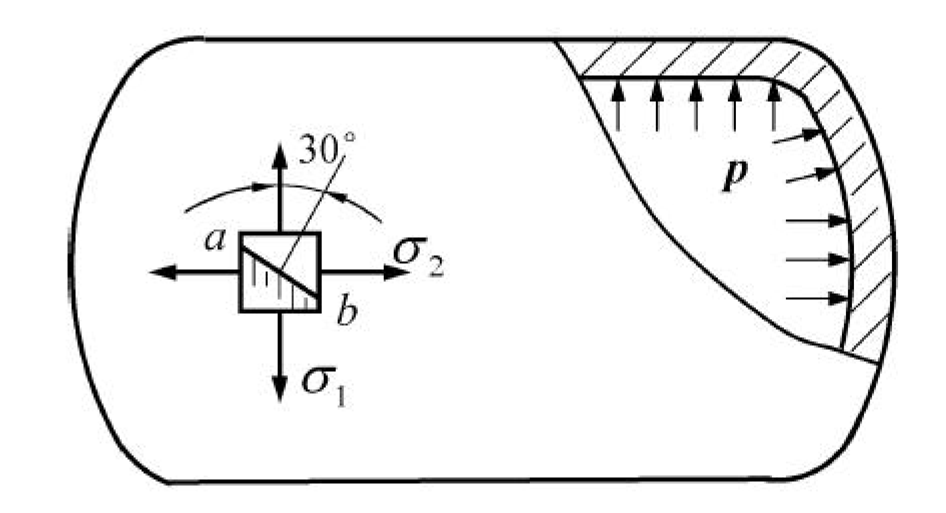


习题 7.5 图

7.6 习题 7.6 图所示锅炉内径 D=1m，壁厚 $\delta=10\text{mm}$，内部蒸汽压强 p =4MPa。试求：

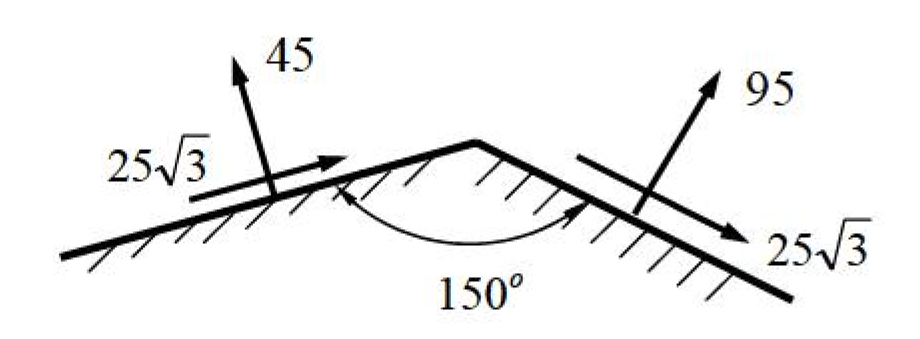
(1) 圆筒壁内任意点处的主应力 σ_1、σ_2 及图示平面内的极值切应力。

(2) 斜截面 ab 上的正应力和切应力。



习题 7.6 图

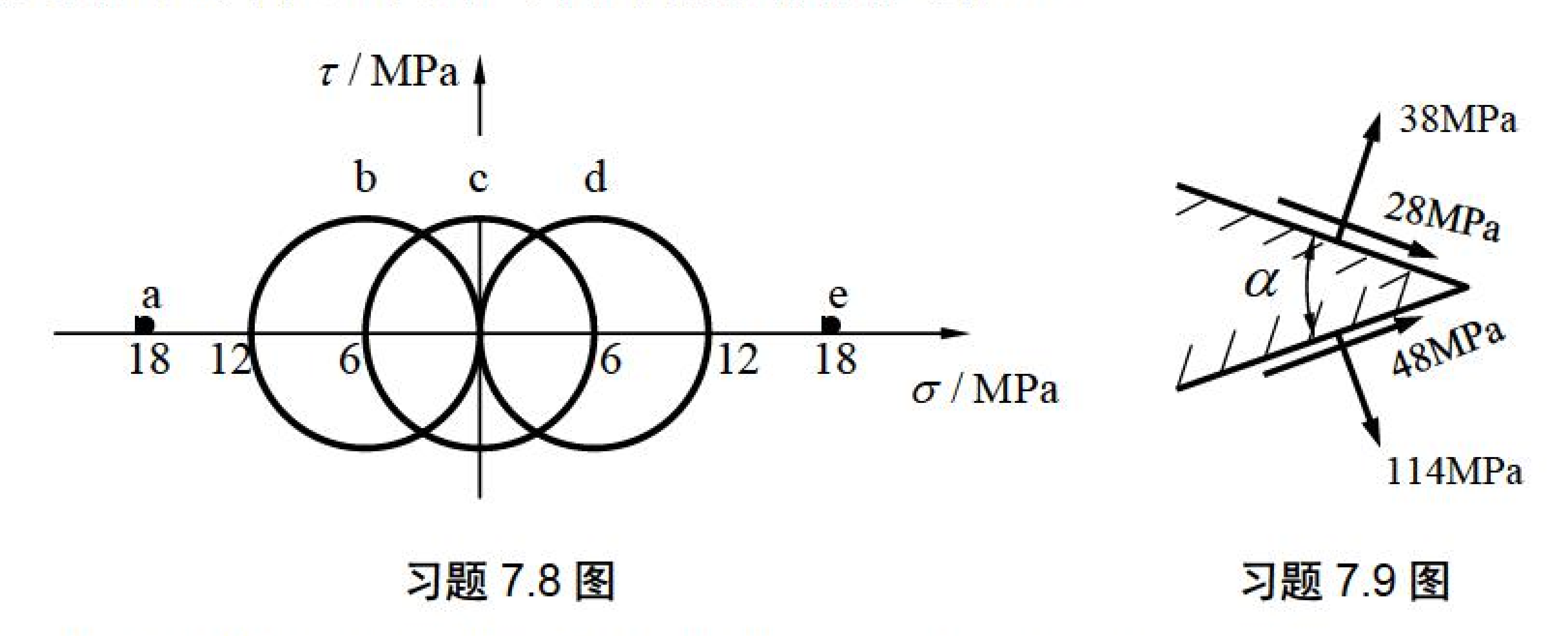
7.7 已知平面应力状态下某点的两个平面上，应力如习题 7.7 图所示，单位为 MPa，试求主应力大小和主平面位置，并用单元体表示出来。



习题 7.7 图

7.8　习题 7.8 图所示为 a、b、c、d、e 5 个平面应力状态的应力图，试用单元体表示各应力圆所对应的主应力状态。

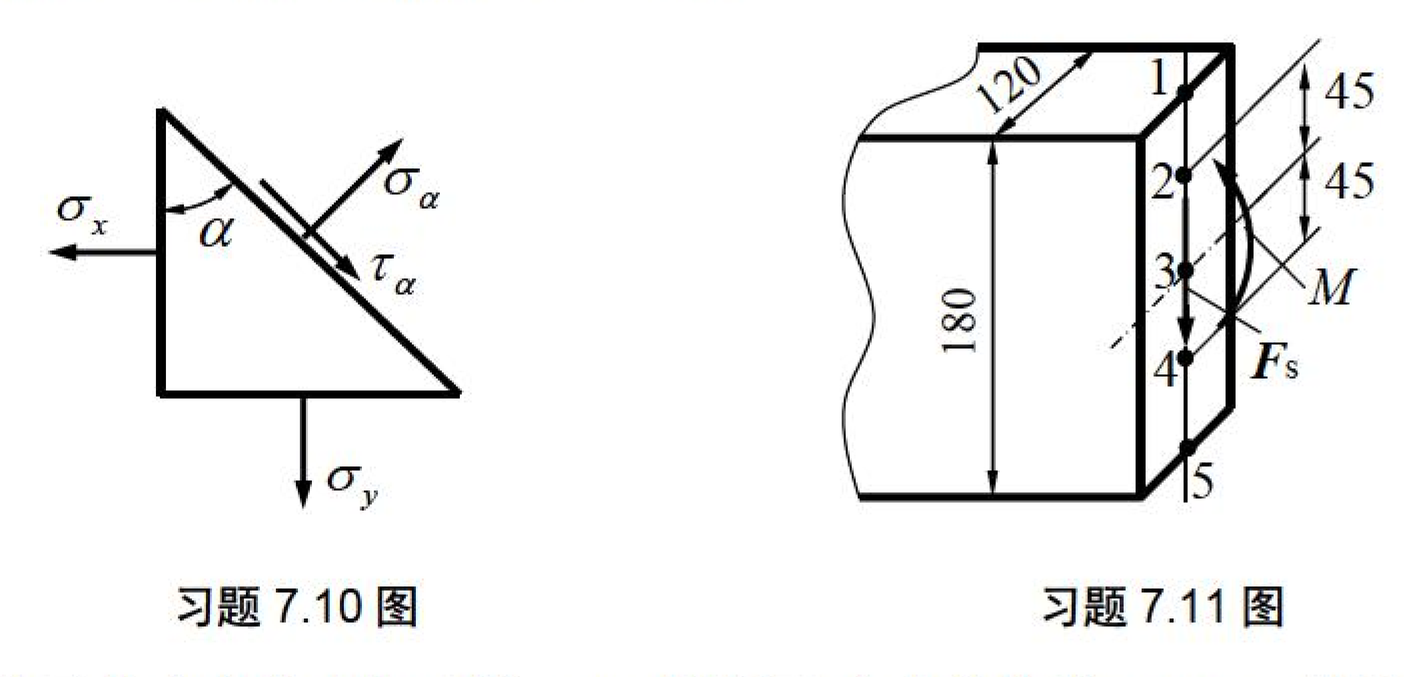
7.9　已知平面应力状态下某点处的两个截面上的应力如习题 7.9 图所示。试利用应力圆求该点处的主应力和主平面，并求两截面间的夹角 α 。



习题 7.8 图　　习题 7.9 图

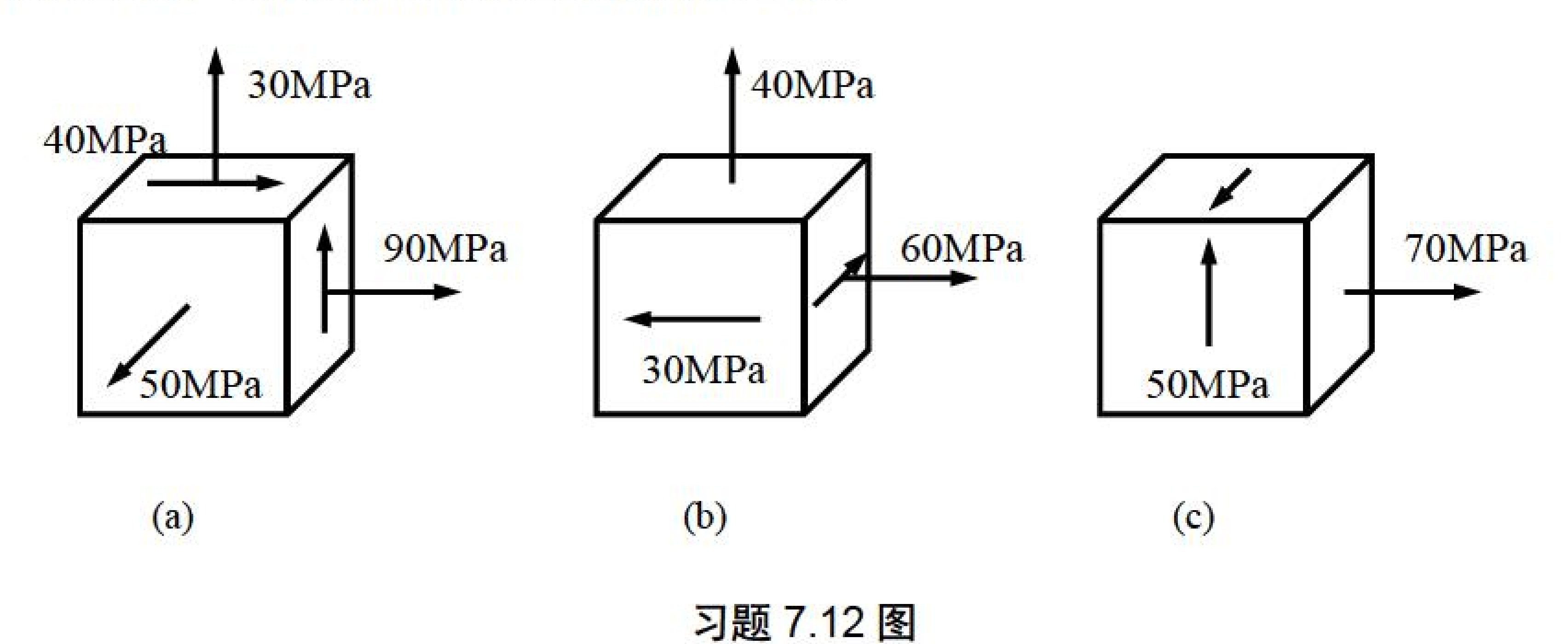
7.10　某点处的应力如习题 7.10 图所示，已知主应力 $\sigma_y = 30\text{MPa}$ ， $\tau_\alpha = 20\text{MPa}$ ， $\sigma_\alpha = 60\text{MPa}$ 。试用解析法和应力圆求另一主应力 σ_x 和 α 角。

7.11　已知矩形截面梁某横截面上的弯矩和剪力分别为 M=15kN·m，F_s=100kN，试求习题 7.11 图所示 1~5 点的应力状态及主应力。



习题 7.10 图　　习题 7.11 图

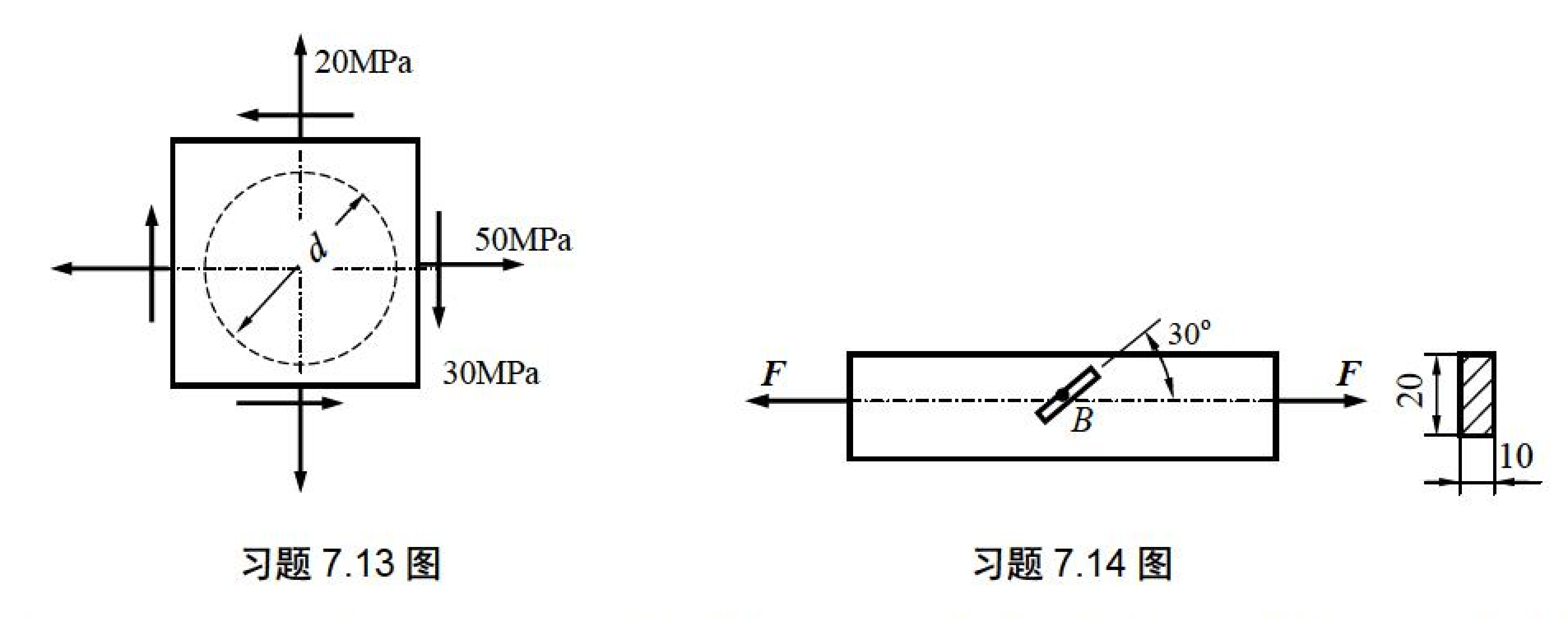
7.12　各单元体应力状态如习题 7.12 图所示(应力单位为 MPa)，试用应力圆求其主应力及极限切应力，并图示极限切应力所在平面。



习题 7.12 图

7.13　习题 7.13 图所示一钢板上有一直径为 d = 400mm 的圆，若钢板上施加有应力，已知钢板的弹性模量 E=210GPa，泊松比 $\mu = 0.3$ 。试问钢板的圆会变成何种形状？并计算圆变形后的尺寸。

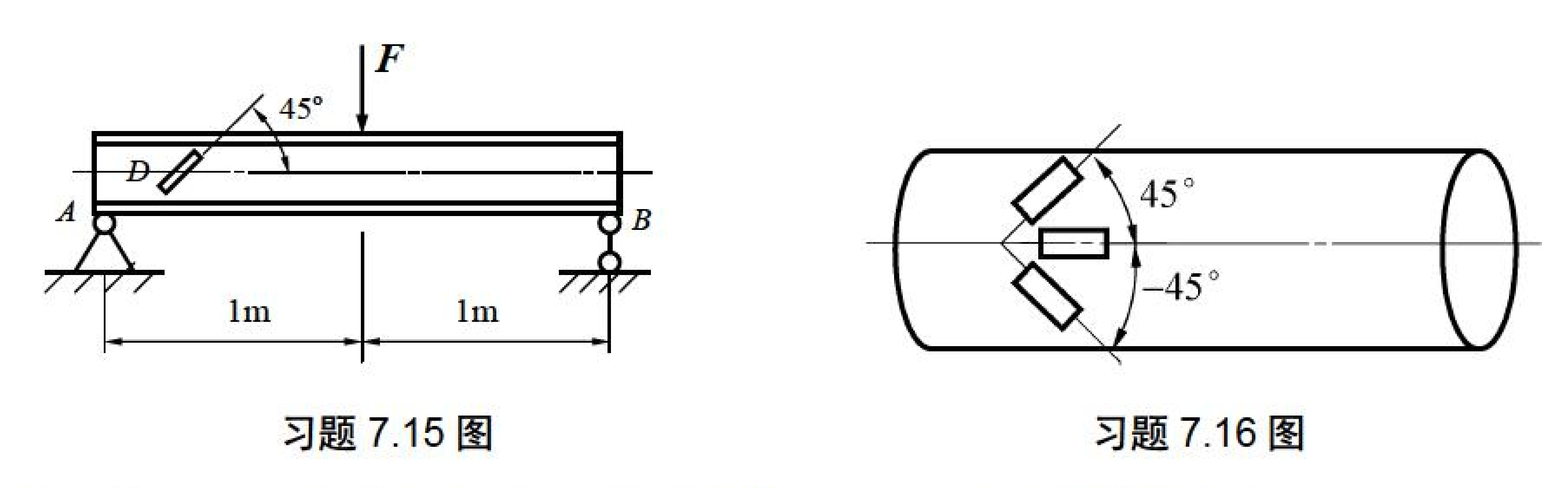
7.14 如习题 7.14 图所示，矩形截面钢拉杆的轴向尺寸，材料弹性模量 E=210GPa，泊松比 $\mu = 0.3$，测得拉杆中心线处 B 点与轴线成30°的线应变$\varepsilon_{30^\circ} = 3.25\times10^{-4}$。试求轴向拉力$F$。



习题 7.13 图　　　　习题 7.14 图

7.15 如习题 7.15 图所示，一简支梁由 28a 工字钢制成，测得中性层上 D 点处沿45°方向的线应变$\varepsilon_{45^\circ} = -2.6\times10^{-5}$。若材料弹模量 E=210MPa，材料的泊松比μ=0.3。试确定梁上的荷载F为多大？。

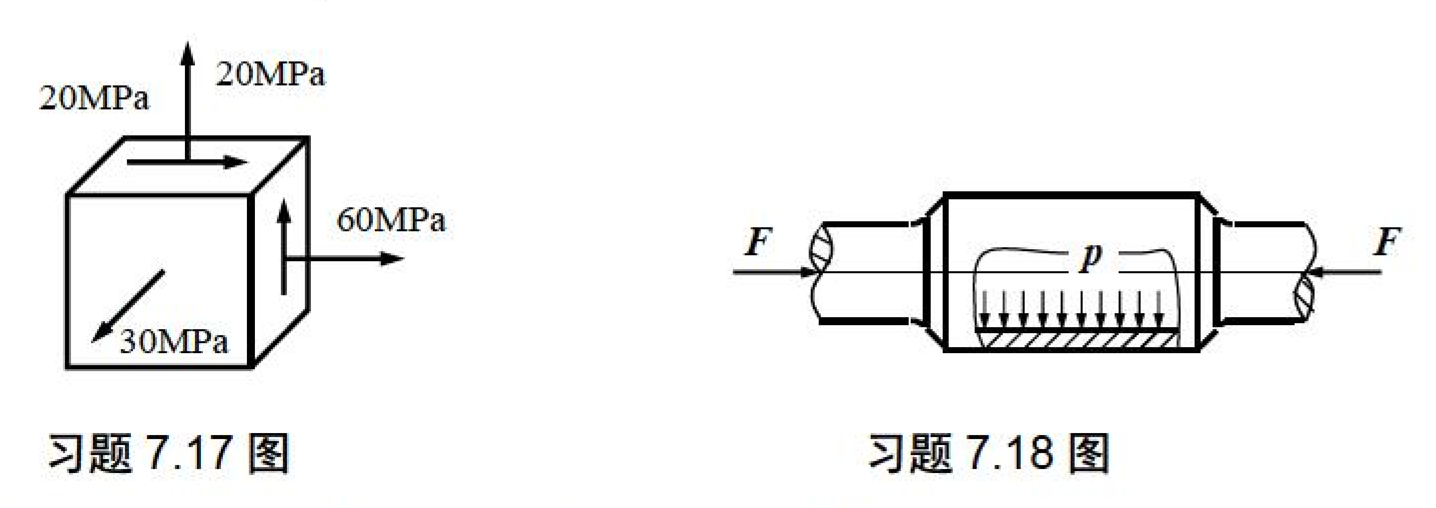
7.16 如习题 7.16 图所示，一圆柱面上一点贴有一应变花，若受外力后测得直角应变化在 3 个方向上主线应变分别为$\varepsilon_{0^\circ} = 4\times10^{-4}$，$\varepsilon_{45^\circ} = 6\times10^{-4}$，$\varepsilon_{90^\circ} = -3\times10^{-5}$，若材料的弹性模量 E=208 GPa，泊松比$\mu = 0.28$，试求该点主应力及方向。



习题 7.15 图　　　　习题 7.16 图

7.17 单元体应力状态如习题 7.17 图所示，已知材料弹性模量 E=210GPa，泊松比$\mu = 0.3$，试求该单元体的应变能密度和畸变能密度。

7.18 习题 7.18 图所示两端封闭的铸铁薄壁圆筒，其内径 $D = 100$mm，壁厚$\delta = 10$mm，承受内压力$p = 5$MPa，且在两端受轴向压力$F = 100$kN 作用。材料的许用拉伸应力$[\sigma_t] = 40$MPa、泊松比$\mu = 0.25$，试用第二强度理论校核其强度。

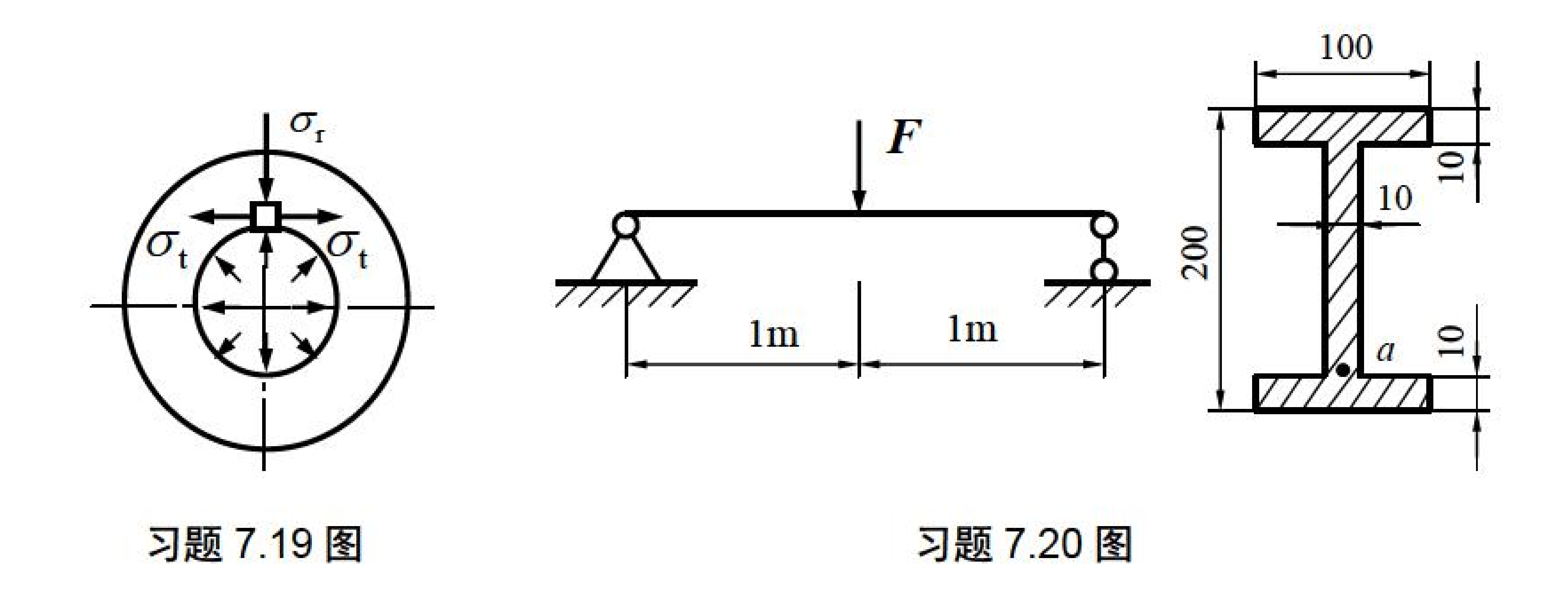


习题 7.17 图　　　　习题 7.18 图

7.19 炮筒横截面如习题 7.19 图所示，在危险点处$\sigma_t = 550$MPa，$\sigma_r = -350$MPa，第三个主应力是垂直于图面的拉应力，且为 420MPa，试按第三、第四强度理论计算其相当

应力。

7.20　习题 7.20 图所示为一简支工字梁，由钢板焊接而成，已知 $F=100\text{kN}$，材料的许用应力 $[\sigma]=170\text{MPa}$，$[\tau]=100\text{MPa}$。试校核翼缘与腹板交界处 a 点的强度。



习题 7.19 图　　　　习题 7.20 图

第8章　组 合 变 形

【本章学习重点】

本章学习重点是斜弯曲、拉(压)弯组合、弯扭组合等组合变形杆件的强度计算。

【本章学习目标】

- 理解组合变形的概念及分析方法——先分解或简化，后叠加。
- 分析杆件在组合变形时的危险截面和危险点的位置。
- 能计算斜弯曲、拉(压)弯组合、弯扭组合变形杆件危险点的最大应力，并正确选用合适的强度理论进行强度计算。

8.1　组合变形的概念

工程中有些构件的受力情况较为复杂，即不能满足基本变形的载荷条件，使构件在载荷作用下同时产生两个或两个以上的基本变形的组合作用，这种变形称为**组合变形**。例如，摇臂钻床中(见图 8.1(a))，在工件对钻杆的阻力 $\boldsymbol{F}$ 作用下，钻床主柱既受轴向拉伸变形，又受弯曲变形；图 8.1(b)中起重机的工字梁 AB 在重物作用下，受到了轴向压缩和弯曲变形；工业厂房的牛腿立柱(见图 8.1(c))在偏心载荷(吊车梁作用力)作用下，也受到压缩和弯曲变形；机器设备中常用的传动轴(见图 8.1(d))，作用在齿轮上的外力，使传动轴既产生扭转变形，又在两个相互垂直平面内产生弯曲变形。

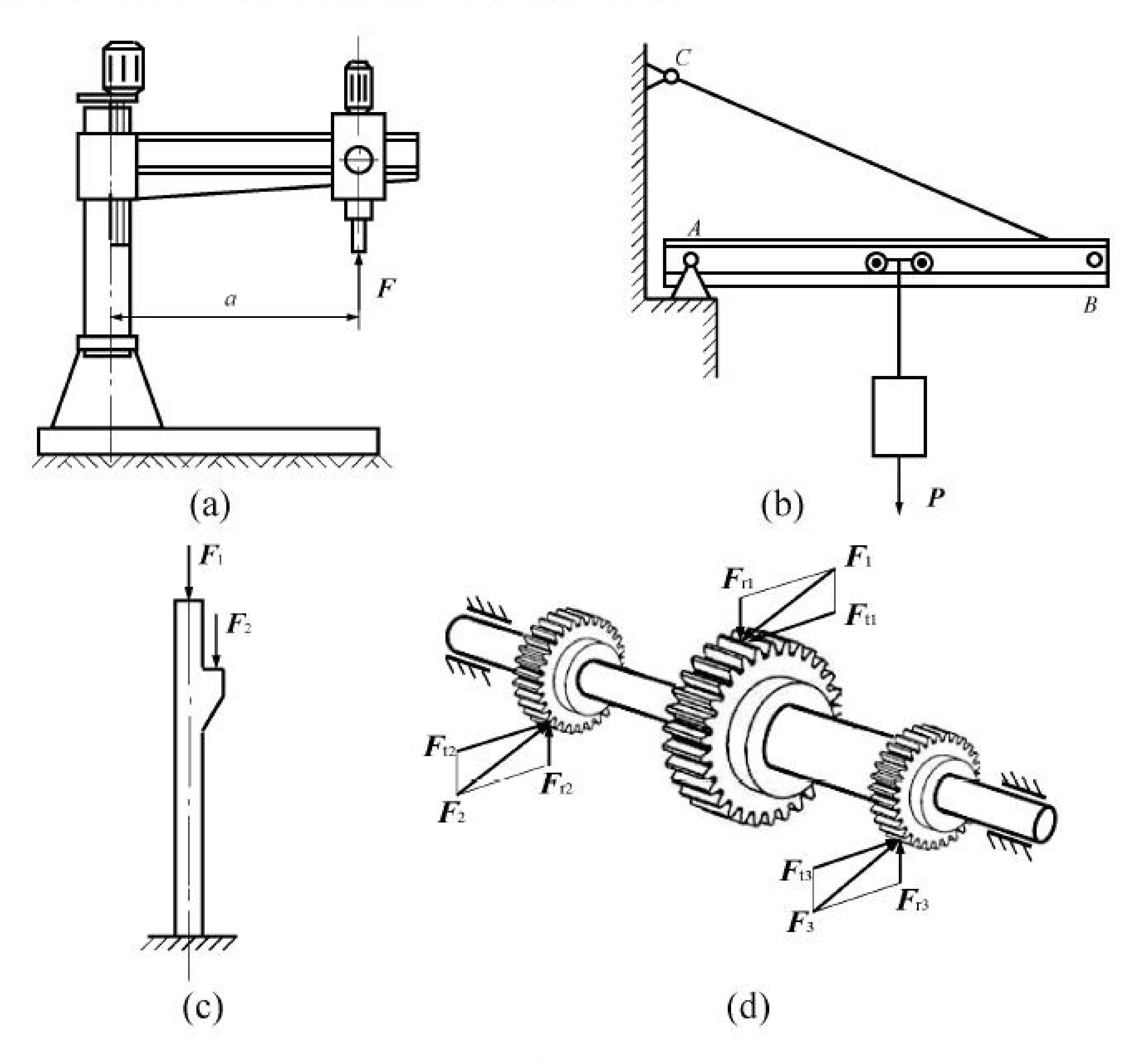


图 8.1

分析组合变形，通常采取“先分解，再叠加”的方法。“先分解”就是利用静力学方法将构件上的外力分解为几种载荷，使其中每一种载荷对应一种基本变形。如图 8.1(a)、(c)中的载荷 $\boldsymbol{F}$ 平移到分析对象(构件)的轴线上，得到轴向力 $\boldsymbol{F}'$和外力偶 M，形成轴向拉伸或压缩变形、弯曲变形两种基本变形。叠加就是分别分析每一种基本变形下的内力、应力、变形和位移等变形效应，然后利用叠加原理，得到构件组合变形下的应力、应变和位移等总的变形效应。

需要强调的是，叠加原理是建立在内力、应力、应变和位移等呈线性关系的条件上的，如构件的组合变形超出了线弹性范围或大变形情况下，则保证不了上述线性关系，不能应用叠加原理。

8.2　斜　弯　曲

当外力作用在梁的纵向对称面内时，梁将产生平面弯曲。平面弯曲中，中性轴在变形前后始终垂直于纵向对称面，挠曲线是该面内的平面曲线。但在如图 8.2(a)所示的受力梁中，虽然外力作用在一平面内，但这一平面不是纵向对称面，梁也会产生弯曲，而不是平面弯曲。这种情形下，梁在两个相互垂直的纵向对称面内同时发生弯曲，这种弯曲称为**斜弯曲**或**双向弯曲**，如倾斜放置在屋顶上的屋面檩条(见图 8.2(b))就是斜弯曲。还有一种情况是在两个互相垂直的纵向对称面都作用有外力(见图 8.2(c))，这种情形也会产生斜弯曲。

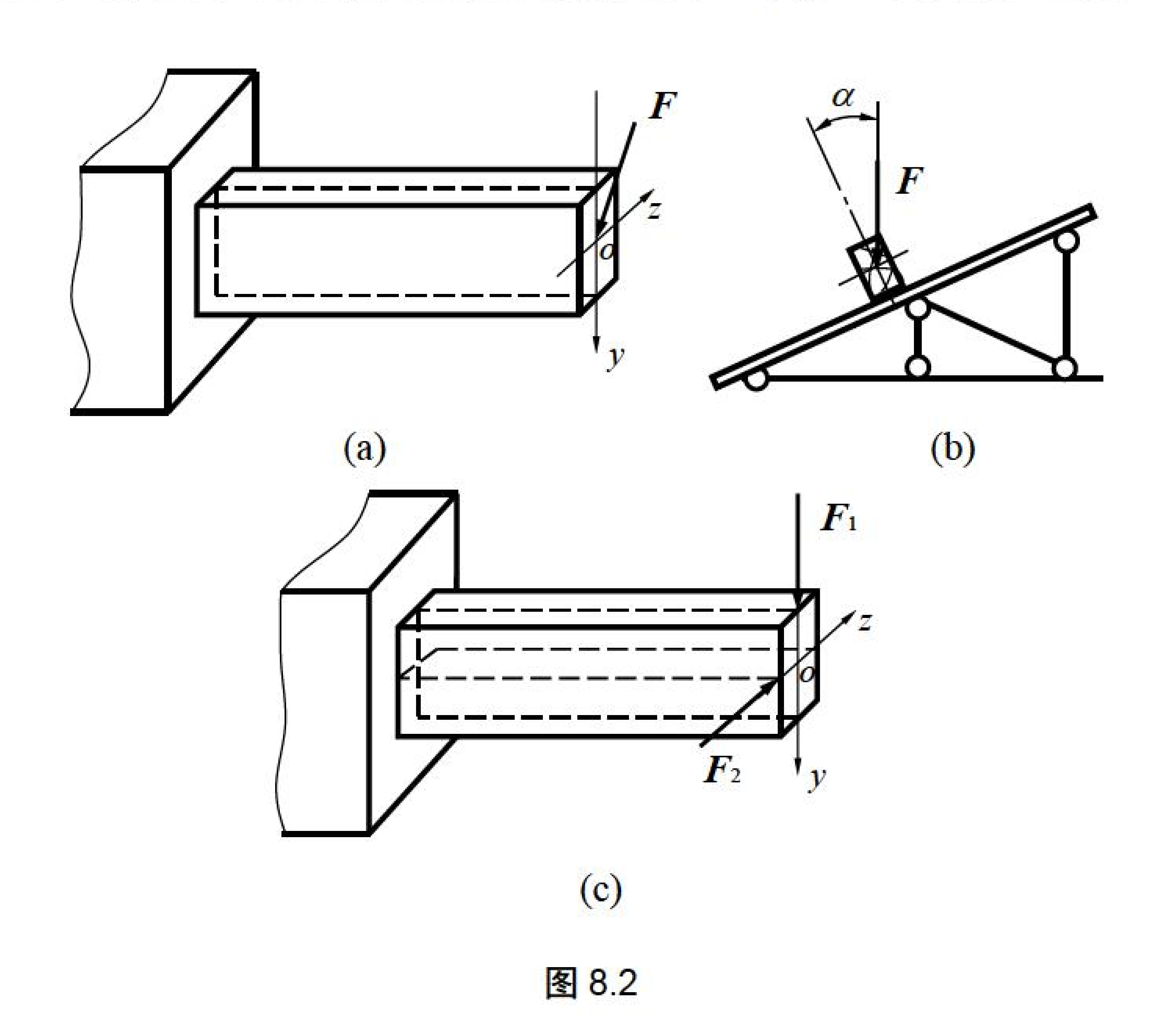


图 8.2

8.2.1　斜弯曲横截面上正应力及强度条件

以图 8.3 所示的矩形截面悬臂梁为例，当自由端作用力 F 通过截面形心，且与纵向对称面成 φ 角时，梁会发生斜弯曲。为了确定离固定端距离为 x 的横截面 $m—m$ 上任意点的

正应力，首先将载荷 F 沿 y 轴、z 轴方向分解为

$$F_y = F\cos\varphi$$

$$F_z = F\sin\varphi$$

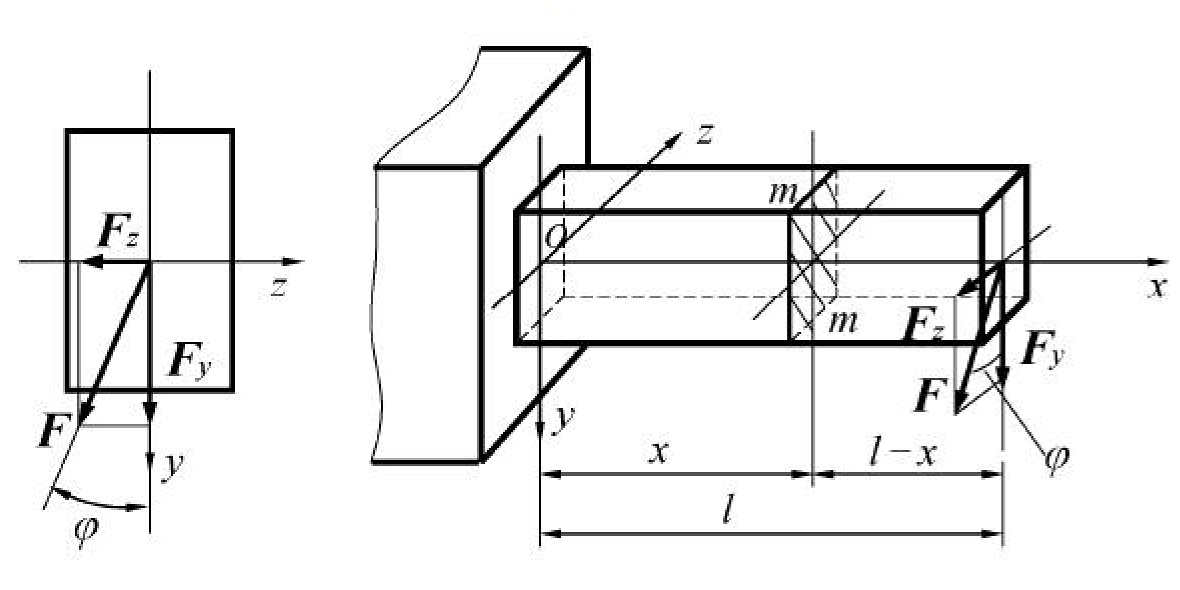


图 8.3

上述两个力在横截面 m—m 上分别产生弯矩 M_y、M_z，其数值为

$$\left.\begin{aligned} M_y &= F_z(l-x) = F(l-x)\sin\varphi \\ M_z &= F_y(l-x) = F(l-x)\cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

横截面 m—m 上任一点 $C(y$、$z)$处，由 M_y、M_z 产生的正应力分别为

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \frac{M_y}{I_y}z \\ \sigma'' &= -\frac{M_z}{I_z}y \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

上式中 σ'、σ'' 的正负是根据图中弯矩和坐标轴方向确定的，σ'、σ'' 在横截面上的分布如图 8.4(a)、(b)所示。

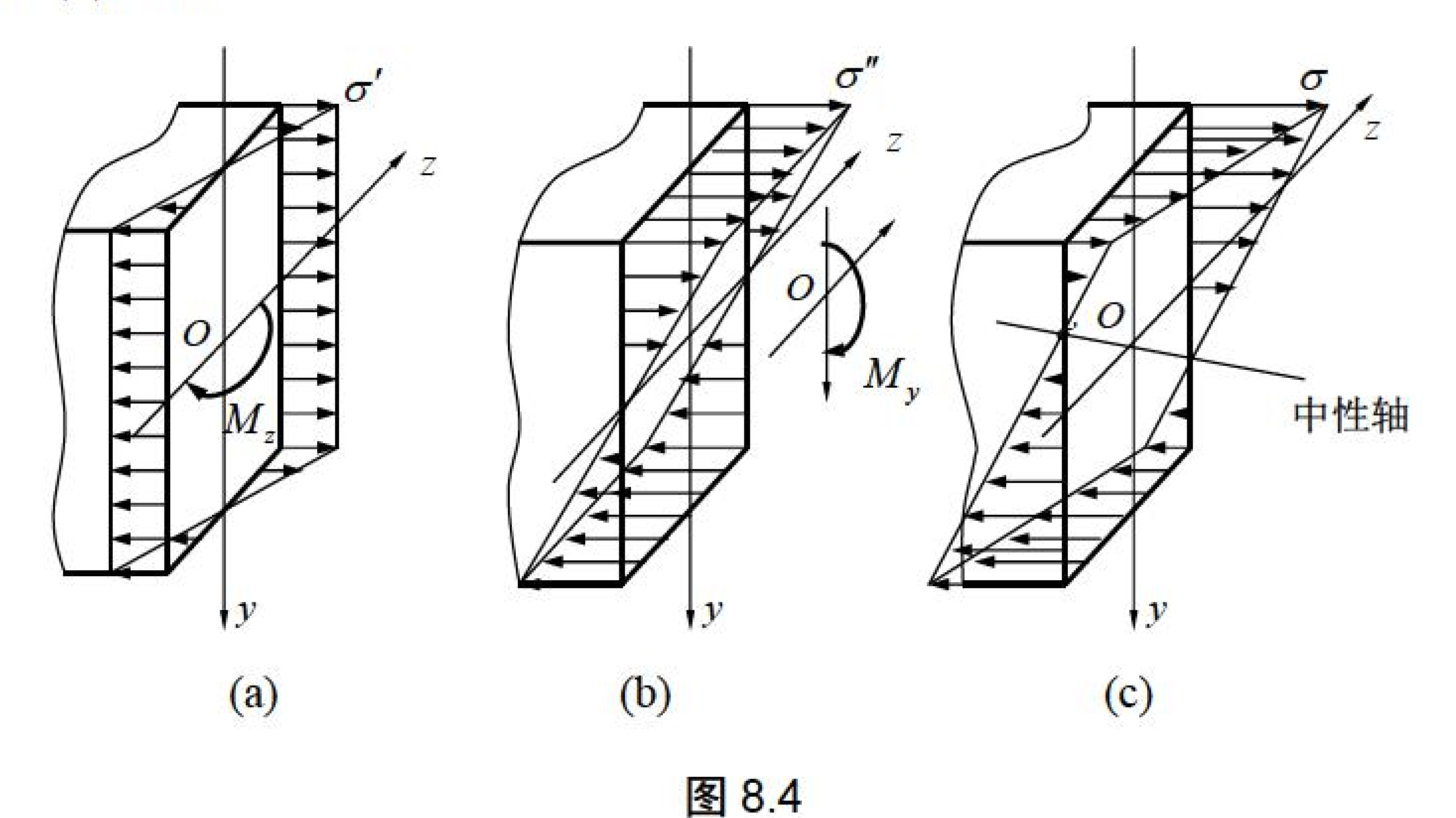


图 8.4

将两个弯矩 M_y、M_z 在横截面 m—m 上任意点处产生的正应力 σ'、σ'' 用叠加原理，即得该点的总应力 σ 为

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y \tag{8.3}$$

σ 在横截面上的正应力分布如图 8.4(c)所示。从图中可看出最大拉应力 $\sigma_{t\max}$ 发生在两

个弯矩引起的最大拉应力的一点，最大压应力 σ_{cmax} 在两个弯矩产生最大压应力的一点，其大小为

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{tmax}\\ \sigma_{cmax}\end{matrix}\right\} = \pm\left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}\right) \tag{8.4}$$

斜弯曲时的正应力强度条件与平面弯曲的正应力强度条件完全相同，即

$$\sigma_{max} \leqslant [\sigma]$$

8.2.2　斜弯曲中性轴位置

中性轴上各点处正应力等于零，所以斜弯曲中，正应力为零的点组成的直线即为中性轴(见图 8.4(c))。设 y_o、z_o 分别代表中性轴上任意点的坐标，由式(8.1)可得中性轴方程为

$$\frac{M_y}{I_y}\cdot z_o - \frac{M_z}{I_z}\cdot y_o = 0 \tag{8.5}$$

由式(8.5)可知，斜弯曲中性轴是一条通过横截面形心的直线。如图 8.5 所示，设中性轴与 z 轴的夹角为 θ，则由式(8.5)、式(8.1)有

$$\tan\theta = \frac{y_o}{z_o} = \frac{M_y}{M_z}\cdot\frac{I_z}{I_y} = \frac{I_z}{I_y}\cdot\tan\varphi \tag{8.6}$$

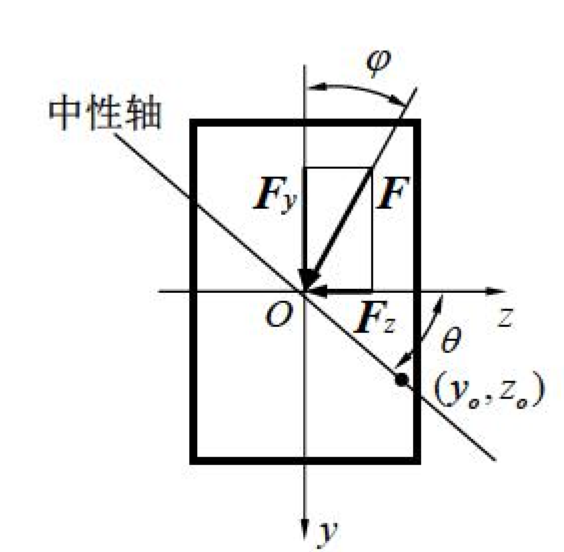


图 8.5

从式(8.6)可以看出，一般情况下，$I_y \neq I_z$，因此，$\theta \neq \varphi$，即斜弯曲中性轴与作用力所在平面不垂直。只有当 $I_y = I_z$ 时，中性轴才会与作用力所在平面垂直。所以，当横截面为圆形或正方形时，只要外力通过形心，所发生的弯曲变形就是平面弯曲而非斜弯曲。

8.2.3　斜弯曲的变形

斜弯曲的变形仍以图 8.3 所示矩形悬臂梁为例。首先分别求出 F_y、F_z 两个分力作用下自由端的挠度 w_y、w_z，然后求梁的总挠度 w。

因为 w_y、w_z 两个挠度相互垂直，所以斜弯曲的挠度 w 为

$$w = \sqrt{w_y^2 + w_z^2} \tag{8.7}$$

例 8.1　如图 8.6(a)所示，桥式起重机大梁为 32a 工字钢，两端由钢轨支承。工字钢材料的许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$，梁的跨度 $l = 4\text{m}$，起吊的重物重量 $F = 50\text{kN}$，并作用在梁中点，起重机大梁在行进时，由于惯性或斜面起吊等原因，使重物载荷 F 的方向与大梁的纵向对称面之间产生了一个角度 $\varphi=15°$。试校核梁的强度。

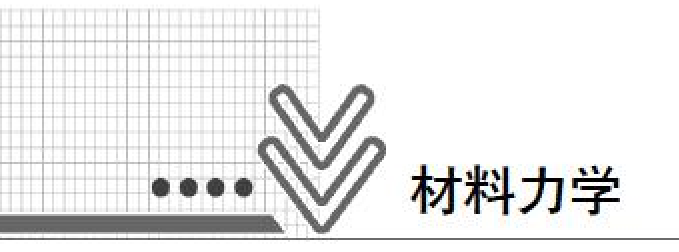
解：(1)　首先分解载荷 F，如图 8.6(b)所示，有

$$F_y = F\cos15°，\quad F_z = F\sin15°$$

(2)　求两个平面内的最大弯矩。

对于简支梁受集中载荷作用下，最大弯矩分别为

$$M_y = \frac{F_z l}{4} = \frac{Fl\sin15°}{4}，\quad M_z = \frac{F_y l}{4} = \frac{Fl\cos15°}{4}$$



(3) 计算梁跨中横截面上的最大正应力并校核强度。

如图 8.6(b)所示，最大拉应力σ_{max}出现在工字梁 c 点处，即

$$\sigma_{max}=\frac{M_z}{W_z}+\frac{M_y}{W_y}=\frac{Fl\cos15^\circ}{4W_z}+\frac{Fl\sin15^\circ}{4W_y}$$

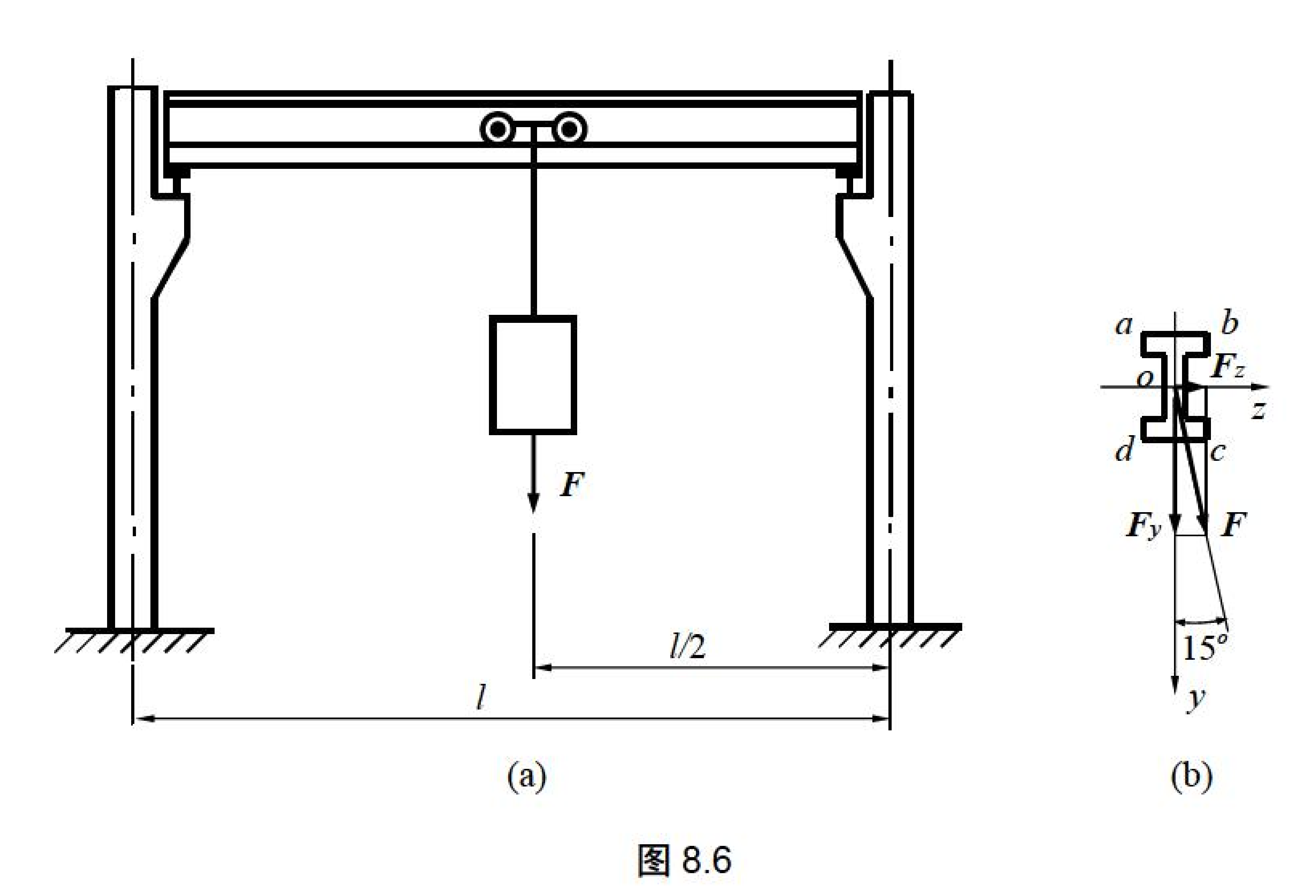


图 8.6

将 $l=4$m，F=30kN，查型钢表 32a 工字钢$W_z=692\text{cm}^3$、$W_y=70.8\text{cm}^3$代入上式，得

$$\sigma_{max}=\frac{50\times10^3\times4\times\cos15^\circ}{4\times692\times10^{-6}}\text{Pa}+\frac{50\times10^3\times4\times\sin15^\circ}{4\times70.8\times10^{-6}}\text{Pa}$$

$$=252.5\times10^6\text{Pa}=252.5\text{MPa}>[\sigma]=160\text{MPa}$$

因此，该梁在斜弯曲下是不安全的。

若载荷 $\boldsymbol{F}$ 不偏离梁的纵向对称面，即$\varphi=0^\circ$，产生平面弯曲，则跨中截面的最大正应力为

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W_z}=\frac{Fl}{4W_z}=\frac{50\times10^3\times4}{4\times692\times10^{-6}}\text{Pa}=72.2\times10^6\text{Pa}=72.2\text{MPa}<[\sigma]$$

可见，载荷方向仅偏离了一个不大的角度$\varphi=15^\circ$，最大正应力由 72.2MPa 变成了 252.5MPa，增大了近 2.5 倍。这主要是由于工字钢截面W_y远小于W_z的原因造成的。因此，产生斜弯曲对吊车梁强度是一种很大的威胁，实际生产中应尽量避免这种现象的产生。这就是吊车起吊重物时只能在吊车梁垂直下方起吊，而绝不允许在大梁侧面斜方向起吊的原因。

8.3 拉伸(压缩)与弯曲的组合

8.3.1 横向力与轴向力共同作用

如果作用在杆件上的载荷既有横向力又有轴向力，杆件将发生弯曲与拉伸的组合变

形。图 8.7(a)所示为一矩形悬臂梁，在其自由端纵向对称面内受横向力 F_1 和轴向拉力 F_2 的共同作用，则可分解为 F_1 力作用下的弯曲变形和 F_2 力作用下的轴向拉伸变形。

横向力 F_1 力作用下，在固定端截面有最大弯矩 $M_{\max}=F_1 l$，该载面上最大的弯曲正应力发生在截面的上、下缘处，其绝对值为

$$\sigma_1=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{F_1 l}{W_z}$$

应力 σ_1 在固定端截面的分布如图 8.7(b)所示。

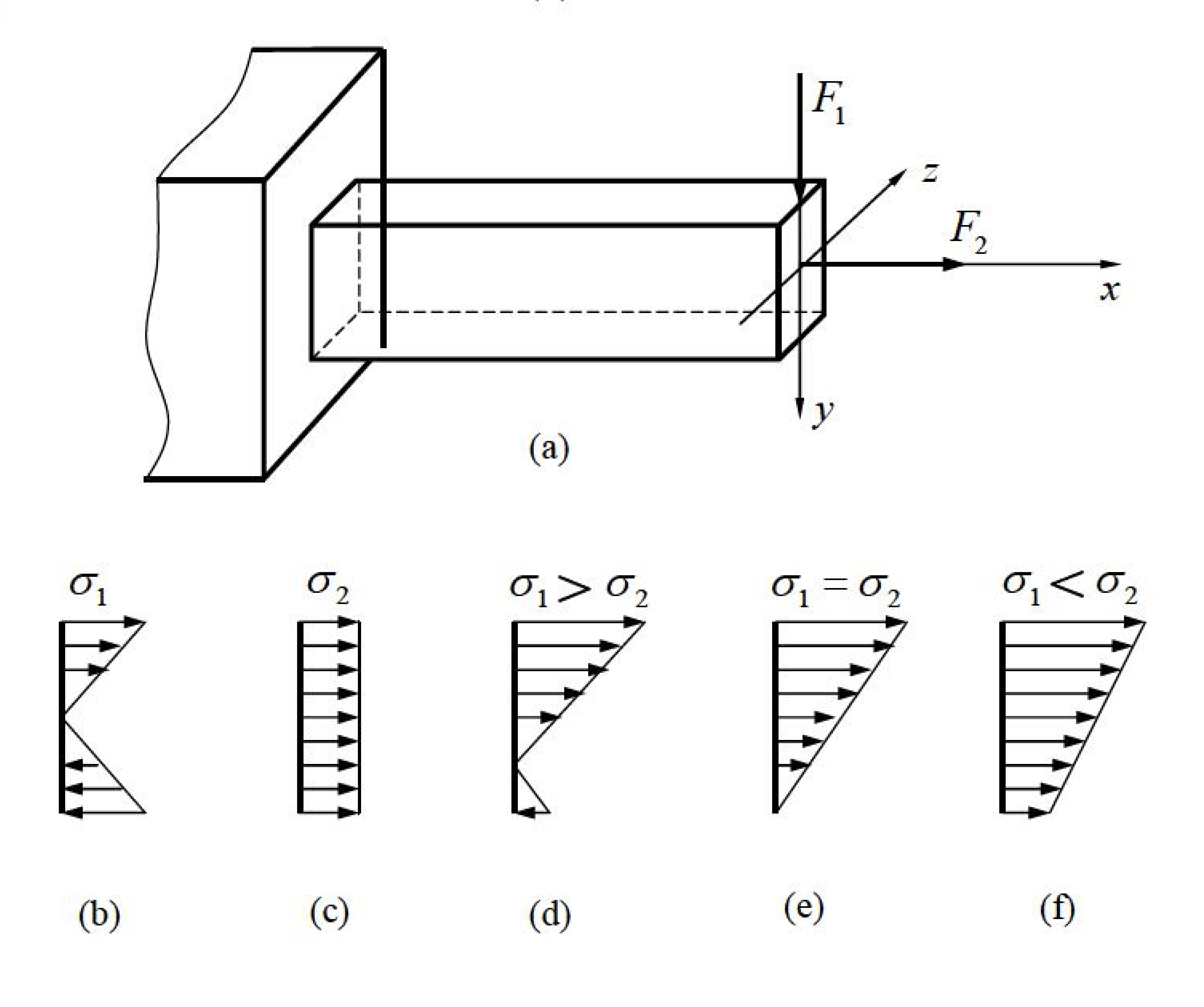


图 8.7

在轴向拉力 F_2 作用下，每个横截面上的轴力为 $F_{\mathrm{N}}=F_2$，拉应力为

$$\sigma_2=\frac{F_{\mathrm{N}}}{A}=\frac{F_2}{A}$$

应力 σ_2 在固定端截面的分布如图 8.7 (c)所示。

由叠加原理，固定端截面应力分布可能出现如图 8.7(d)～(f)所示的 3 种情况。可以肯定的是，最大拉应力发生在固定端横截面的上缘处，其大小为

$$\sigma_{\max}=\frac{F_2}{A}+\frac{M_{\max}}{W_z} \tag{8.8}$$

强度条件为

$$\sigma_{\max}\leqslant[\sigma]$$

上例中假设轴向力为压力，则最大正应力为压应力(数值同上)，出现在固定端截面的下缘处，上缘处可能出现一定的拉应力。如果杆件为脆性材料，因材料抗拉强度低，此时须分别校核抗拉强度和抗压强度。

8.3.2　偏心拉伸(压缩)

当作用在杆件上的外力作用线与杆轴线平行但不重合时，这种变形称为**偏心拉伸**(压缩)，如图 8.1(a)、(c)所示。由力的平移定理可知，偏心位伸(压缩)是一种拉伸(压缩)与弯曲的组合变形。偏心拉伸(压缩)有两种情形：一种情形是偏心力在纵向对称面内，偏心距为 e，如图 8.8(a)所示；另一种情形是偏心力在平面内任意点 $C(y_F, z_F)$，偏心距为 $e=\sqrt{y_F^2+z_F^2}$，如图 8.8(b)所示。

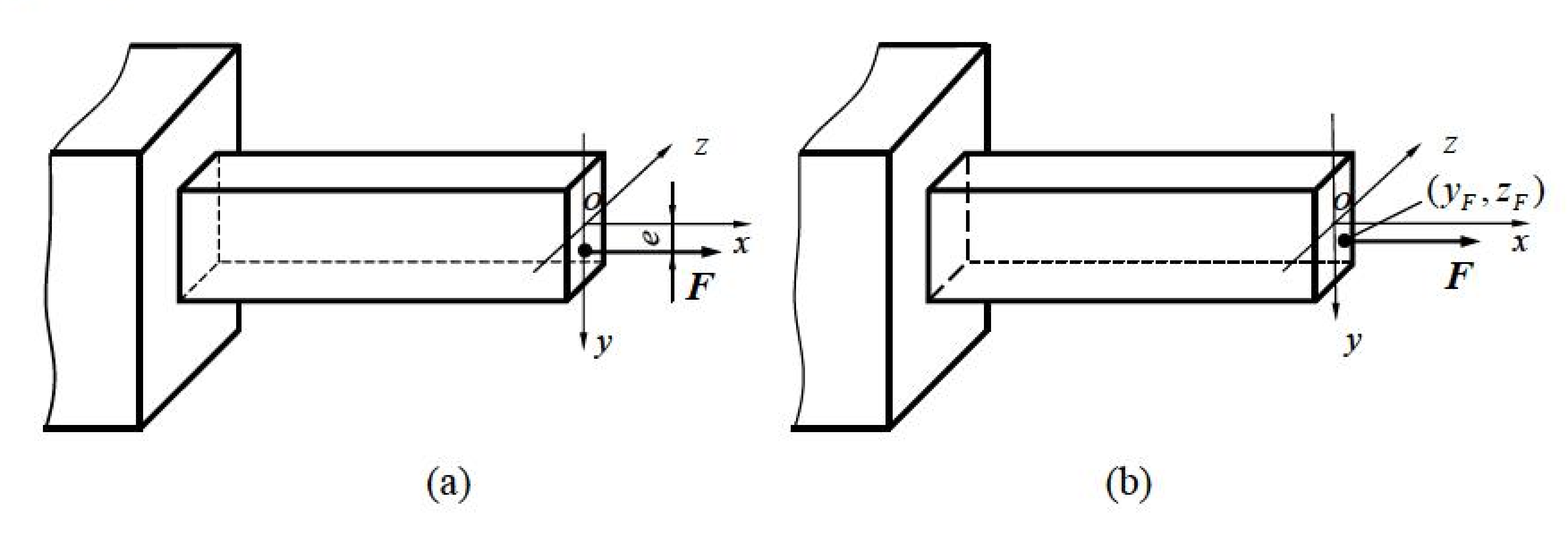


图 8.8

在图 8.8(a)所示情况下，任意横截面内都存在轴力 $F_N=F$ 和弯矩 $M=Fe$，横截面内任意点的正应力为

$$\sigma=\frac{F_N}{A}+\frac{My}{I_z}=\frac{F}{A}+\frac{Fey}{I_z} \tag{8.9}$$

最大拉应力发生在矩形梁横截面的下缘，最大拉应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{F}{A}+\frac{Fe}{W_z} \tag{8.10}$$

如图 8.8(b)所示，偏心力 $\boldsymbol{F}$ 作用在平面内任意点 C 时，设 C 点坐标为(y_F，z_F)，任意横截面内就存在一个轴力 $F_N=F$，两个弯矩 $M_y=Fz_F$，$M_z=Fy_F$，所产生的正应力分别为

$$\sigma'=\frac{F_N}{A}=\frac{F}{A}$$

$$\sigma''=\frac{M_y}{I_y}z=\frac{Fz_Fz}{I_y}$$

$$\sigma'''=\frac{M_z}{I_z}y=\frac{Fy_Fy}{I_z}$$

σ'、σ''、σ''' 在横截面内分布如图 8.9(a)、(b)、(c)所示。

由叠加原理，横截面内任一点处的正应力为

$$\sigma=\sigma'+\sigma''+\sigma'''=\frac{F}{A}+\frac{Fz_Fz}{I_y}+\frac{Fy_Fy}{I_z} \tag{8.11}$$

正应力 σ 在横截面内分布如图 8.9(d)所示，最大拉应力发生在图中 D 点处，最大拉应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \frac{F|z_F|}{W_y} + \frac{F|y_F|}{W_z} \tag{8.12}$$

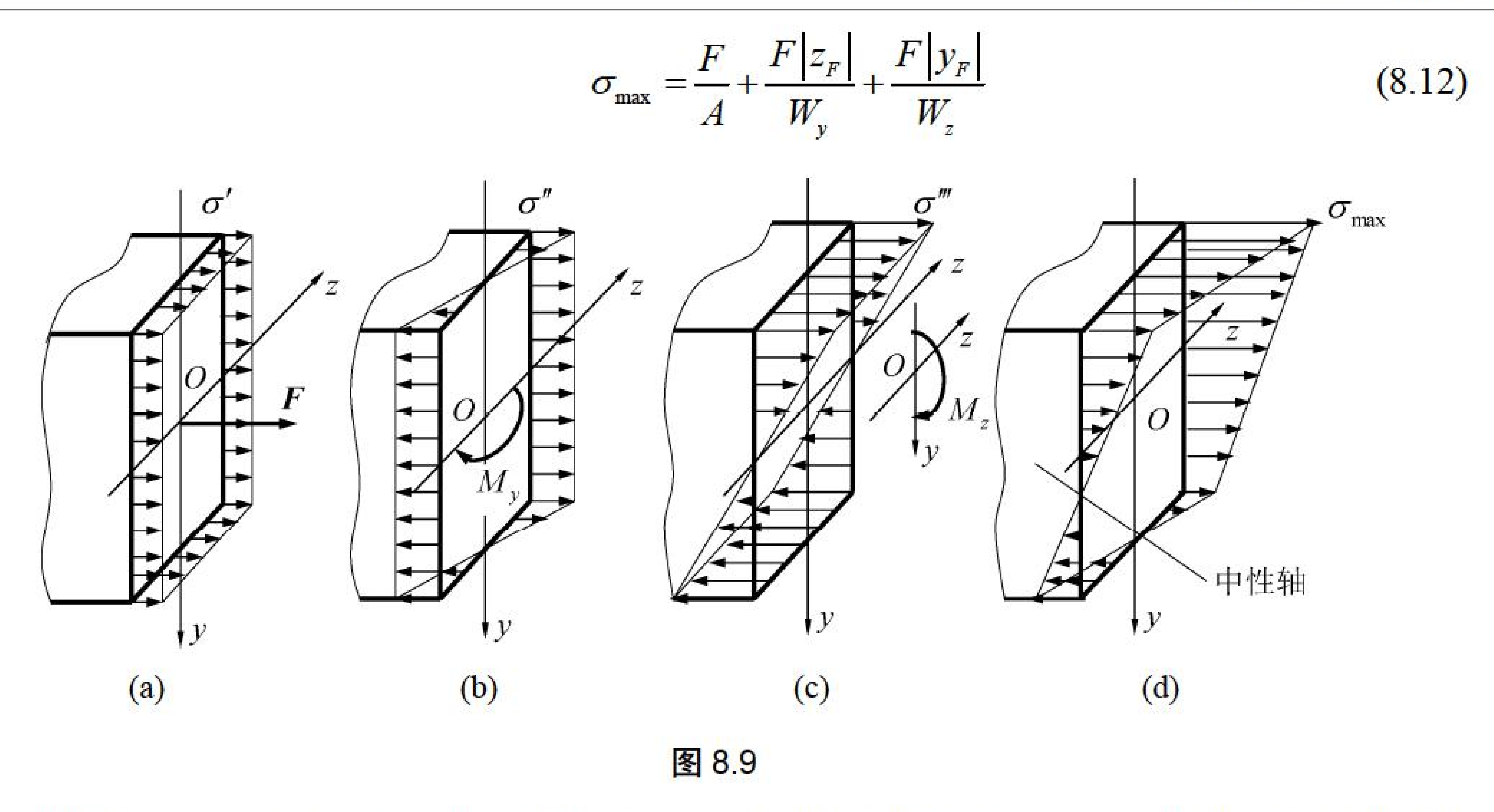


图 8.9

例 8.2　简易起重吊车如图 8.10(a)所示，已知最大吊重 F =40kN，横梁 AB 采用工字钢，许用应力$[\sigma]=160\text{MPa}$，拉杆 BC 与横梁 AB 间的夹角$\alpha=30°$。试按正应力强度条件选用工字钢型号。

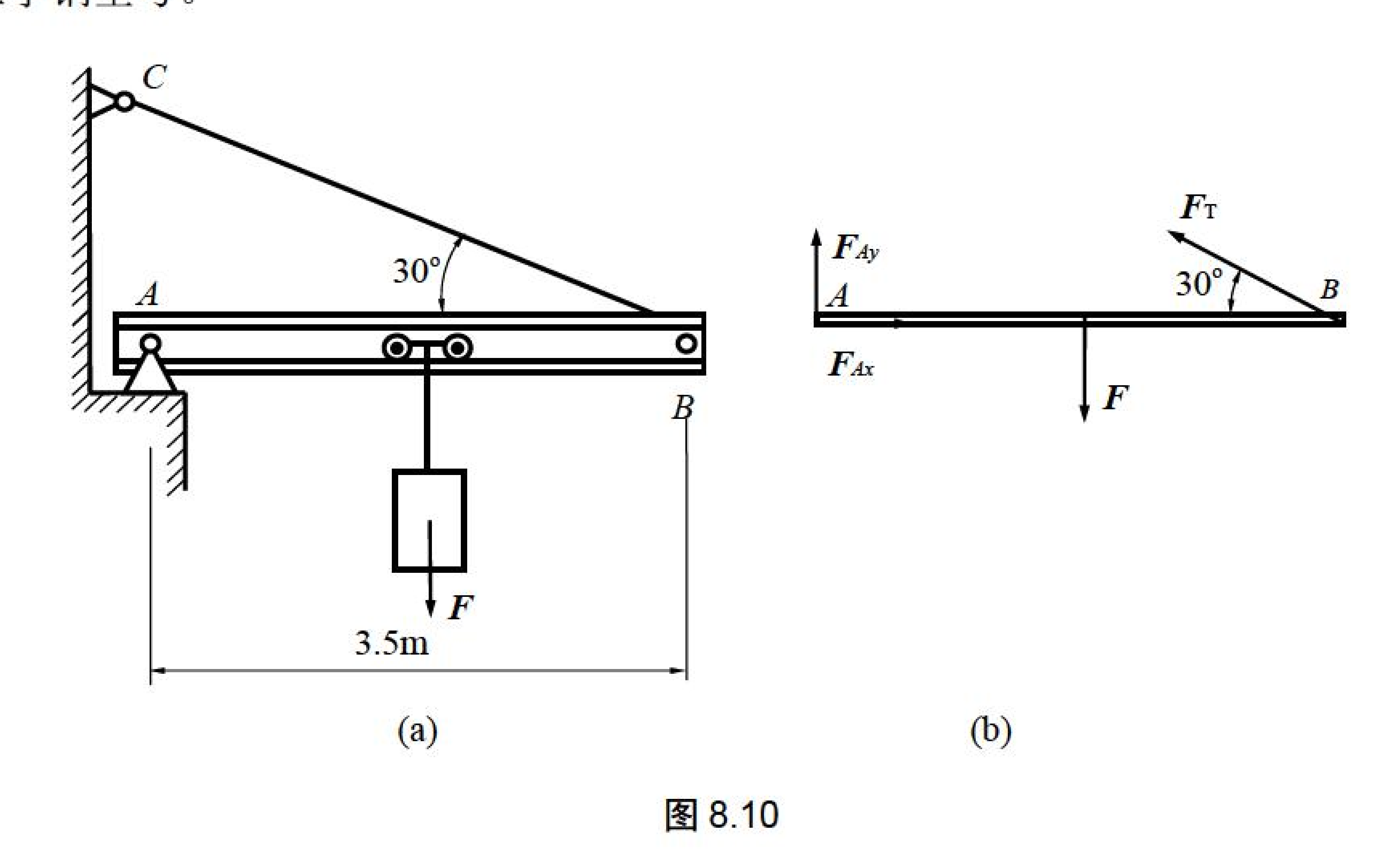


图 8.10

解：(1)　最大正应力计算。

横梁 AB 属压缩和弯曲组合变形。因为弯曲变形是主要变形，故载荷在横梁中点处时梁横截面内的正应力最大。

横梁受力情况如图 8.10(b)所示，由平衡方程求得

$$F_{Ax} = F\cos 30°，\quad F_T = F$$

横梁的危险截面上的内力分量为

$$F_N = F_{Ax} = F\cdot\cos 30° = 40\times10^3\,\text{N}\times\cos 30° = 34.64\times10^3\,\text{N}$$

$$M = \frac{Fl}{4} = \frac{40\times10^3\times3.5}{4}\,\text{N}\cdot\text{m} = 35\times10^3\,\text{N}\cdot\text{m}$$

梁危险截面上的最大压应力值为

$$\sigma_{\max}=\frac{F}{A}+\frac{Fl}{4W_z}$$

(2) 试选工字钢型号并校核强度。

考虑到弯曲变形为主要变形，可暂不考虑轴力的影响，按弯曲强度选取工字钢型号，则有

$$\sigma''=\frac{Fl}{4W_z}\leqslant[\sigma]$$

则
$$W_z\geqslant\frac{Fl}{4[\sigma]}=\frac{40\times10^3\times3.5}{4\times160\times10^6}\mathrm{m}^3=219\times10^{-6}\mathrm{m}^3=219\mathrm{cm}^3$$

查型钢表，初选 20a 工字钢，$W_z=237\mathrm{cm}^3$，$A=35.58\mathrm{cm}^2$。按压缩和弯曲组合变形计算最大应力值，即

$$\sigma_{\max}=\frac{F}{A}+\frac{Fl}{4W_z}=\frac{40\times10^3}{35.58\times10^{-4}}\mathrm{Pa}+\frac{40\times10^3\times3.5}{4\times237\times10^{-6}}\mathrm{Pa}$$
$$=159\times10^6\mathrm{Pa}=159\mathrm{MPa}<[\sigma]=160\mathrm{MPa}$$

所选工字钢强度足够，故选定 20a 号工字钢。

例 8.3 开口链环由直径 d =12mm 的圆钢弯制而成。链环的受力及尺寸如图 8.11(a)所示，试求：(1)链环直段部分横截面上的最大拉应力和最大压应力；(2) 中性轴与截面形心之间的距离。

解：(1) 计算链环直段部分的最大拉应力和最大压应力。

从链环直段某处截开，其受力情况如图 8.11(b)所示。链环直段部分受轴向拉伸和弯曲的组合变形。轴力 F_{N} 和弯矩 M 为

$$F_{\mathrm{N}}=1.6\mathrm{kN}=1600\mathrm{N}$$
$$M=1600\times0.015\mathrm{N\cdot m}=24\mathrm{N\cdot m}$$

轴力 F_{N} 引起的正应力分布如图 8.11(c)所示，其值为

$$\sigma'=\frac{F_{\mathrm{N}}}{A}=\frac{F_{\mathrm{N}}}{\pi d^2/4}=\frac{1600\times4}{\pi\times0.012^2}\mathrm{Pa}=14.15\times10^6\mathrm{Pa}=14.15\mathrm{MPa}$$

弯矩 M 引起的正应力分布如图 8.11(d)所示，应力的最大值为

$$\sigma''=\frac{M_z}{W_z}=\frac{F\times0.015}{\pi d^3/32}=\frac{32\times1600\times0.015}{\pi\times0.012^3}\mathrm{Pa}=141.47\times10^6\mathrm{Pa}=141.47\mathrm{MPa}$$

最大拉应力和最大压应力发生在截面 A、B 点处(见图 8.11(e))，其值分别为

$$\sigma_{\mathrm{t\,max}}=\sigma'+\sigma''=14.15\mathrm{MPa}+141.47\mathrm{MPa}=155.62\mathrm{MPa}$$
$$\sigma_{\mathrm{c\,max}}=\sigma'-\sigma''=14.15\mathrm{MPa}-141.47\mathrm{MPa}=-127.32\mathrm{MPa}$$

(2) 计算中性轴与形心之间的距离。

设中性轴与形心之间距离为 y_o，因为中性轴处应力等于零，由截面内任一点应力公式(式(8.9))有

$$\sigma=\frac{F_{\mathrm{N}}}{A}+\frac{My}{I_z}=\frac{F}{A}+\frac{Fey}{I_z}=0$$

$$y_o = -\frac{I_z}{Ae} = -\frac{\pi d^4/64}{(\pi d^2/4)\cdot e} = -\frac{0.012^2}{16\times 0.015}\text{m} = -6\times 10^{-4}\text{m} = -0.6\text{mm}$$

式中，y_o 为负表示中性轴在 y 轴反方向偏离形心。

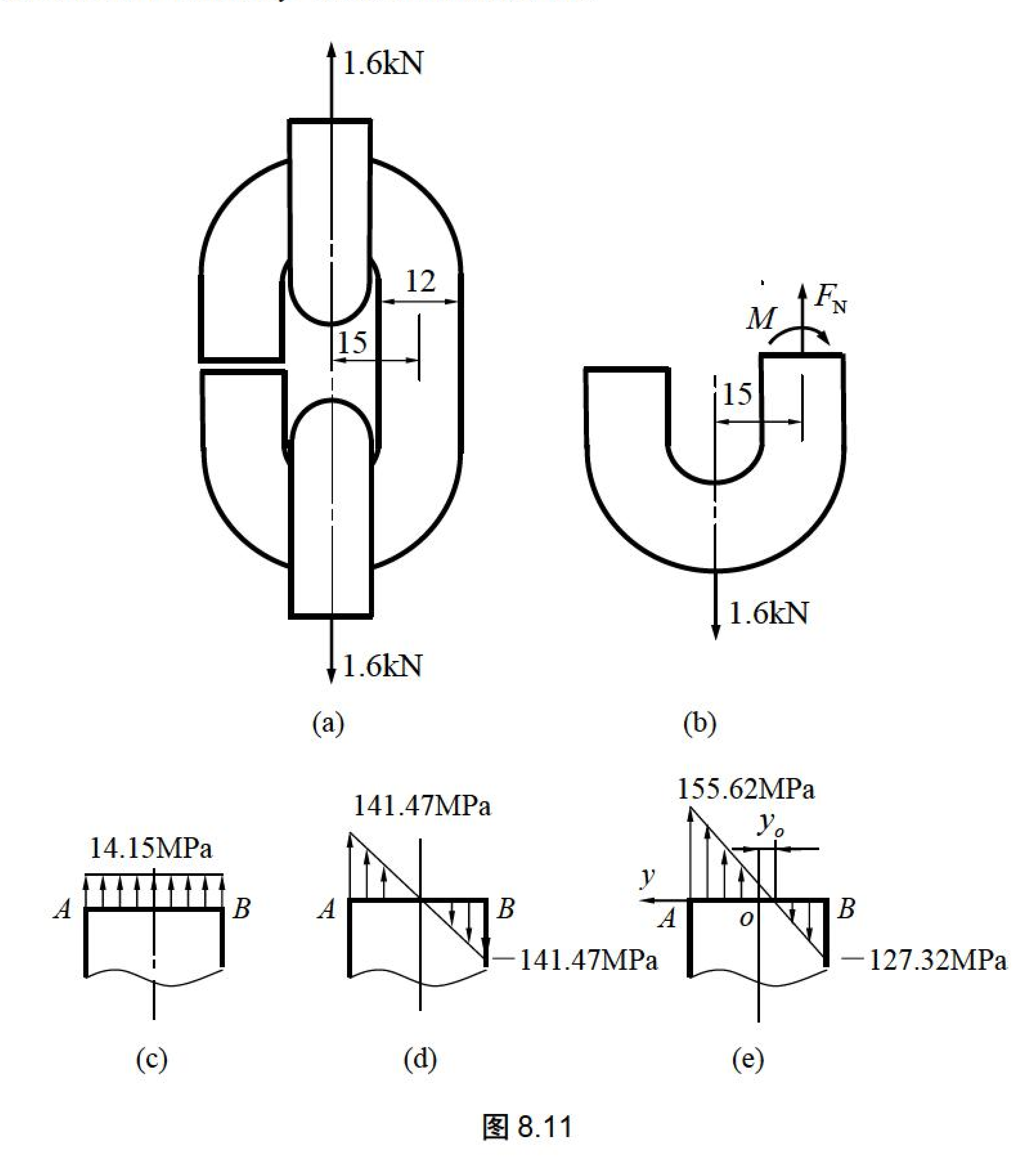


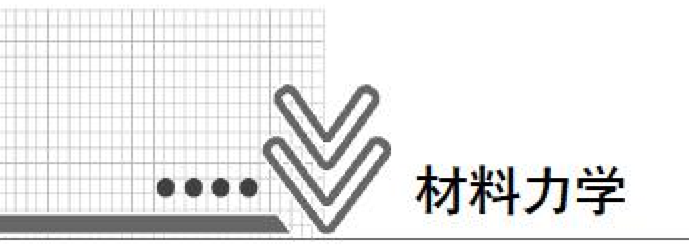
图 8.11

8.4　扭转与弯曲的组合

扭转与弯曲的组合变形在机械工程中是很常见的，如连接有齿轮、带轮和飞轮等的传动轴及曲轴等构件。因为这些构件大都是圆截面杆件，因而可利用扭转和弯曲基本变形来进行组合变形分析。

如图 8.12(a)所示，一直径为 d 的等直圆杆 AB，A 端固定，B 端伸出与 AB 直线成直角的一段长度为 a 的刚臂，在刚臂自由端作用铅垂向下的作用力 $\boldsymbol{F}$。由力的平移原理，可将 AB 杆受力简化为在自由端 B 处受横向力 F 和力偶矩 M=Fa(见图 8.12(b))。因此，杆 AB 产生扭转与弯曲的组合变形。由两种基本变形的内力图(见图 8.12(c))可知，杆 AB 的危险截面在固定端截面，其内力分量最大值分别为

$$M = Fl$$



$$T = Fa$$

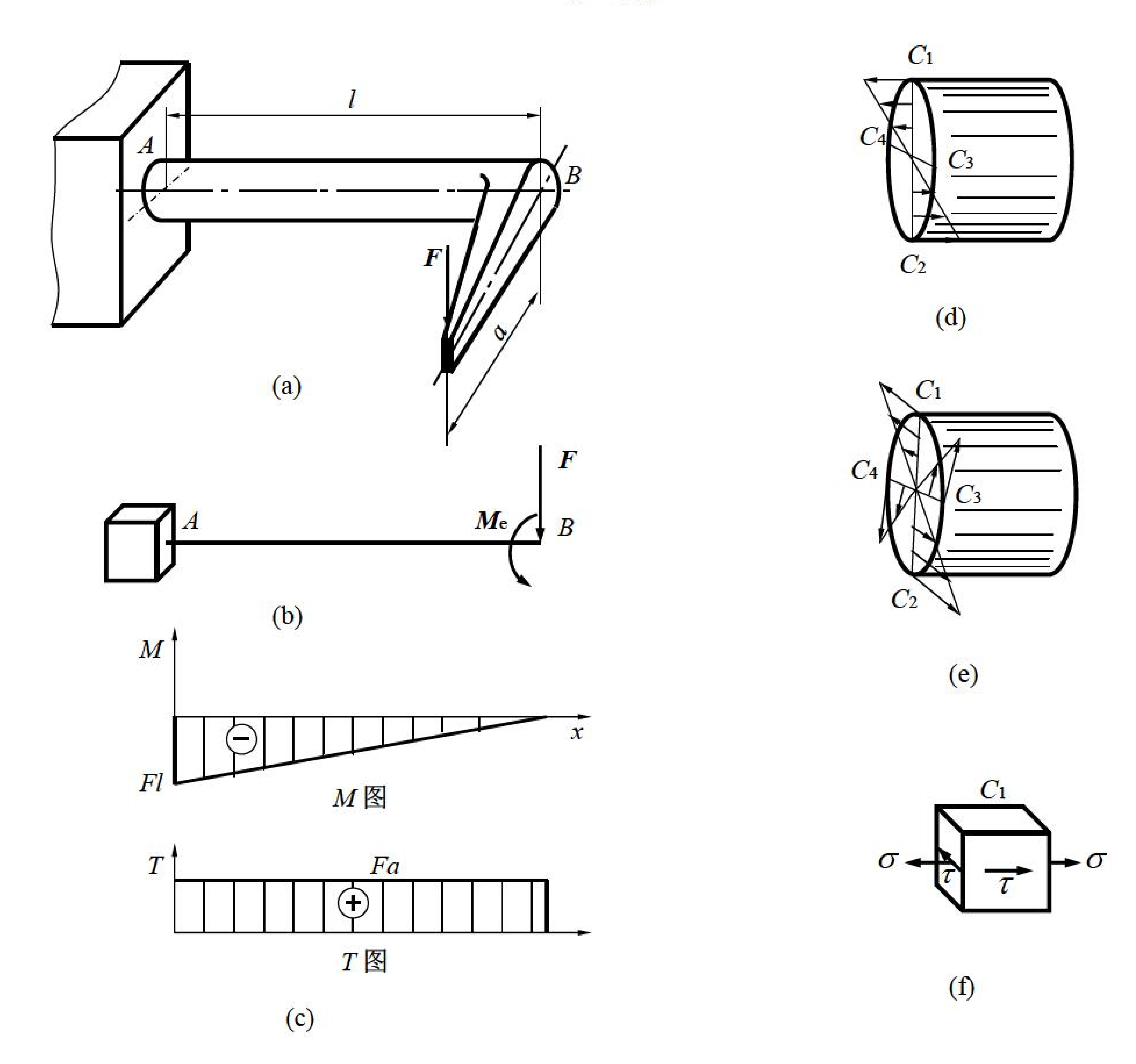


图 8.12

弯曲和扭转变形在固定端截面产生的正应力和切应力分布如图 8.12(d)、(e)所示。显然，最大弯曲正应力σ_{max}发生在铅垂直径的上、下两端点C_1处和C_2处；最大扭转切应力τ_{max}发生在截面周边上各点处。因此，危险截面上的危险点为C_1点和C_2点。任取C_1点进行分析，围绕C_1点沿横截面、轴向剖面取单元体，可得C_1点的应力状态如图 8.12(f)所示。因为C_1是平面应力状态，应求出主应力后再由强度理论建立强度条件。

C_1点 3 个主应力为

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_3\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}，\ \sigma_2 = 0 \tag{8.13}$$

对于用塑性材料制成的杆件，选用第二类强度理论来建立强度条件。按第三强度理论，强度条件为

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leqslant [\sigma]$$

将式(8.13)代入上式，经简化后得

$$\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\leqslant[\sigma] \quad (8.14)$$

若按第四强度理论，强度条件为

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}\leqslant[\sigma]$$

将式(8.13)代入上式，经简化后得

$$\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}\leqslant[\sigma] \quad (8.15)$$

最大弯曲正应力$\sigma=\dfrac{M}{W}$，最大扭转切应力$\tau=\dfrac{T}{W_t}$，对于圆截面$W_t=2W$，于是圆轴在扭转与弯曲组合变形下的强度条件又可表达为

$$\frac{\sqrt{M^2+T^2}}{W}\leqslant[\sigma] \quad (8.16)$$

或

$$\frac{\sqrt{M^2+0.75T^2}}{W}\leqslant[\sigma] \quad (8.17)$$

在求得危险截面的弯矩 M 和扭矩 T 后，就可直接利用式(8.16)或式(8.17)建立强度条件，进行强度计算。

例 8.4 如图 8.13(a)所示，一钢制实心圆轴，轴上的齿轮 C 上作用有铅垂切向力 5kN、径向力 1.82kN；齿轮 D 上作用有水平切向力 10kN、径向力 3.64kN。齿轮 C 的节圆直径 $d_C=400\text{mm}$，齿轮 D 的节圆直径 $d_D=200\text{mm}$，轴的许用应力$[\sigma]=120\text{MPa}$，试按第三强度理论设计轴的直径 d。

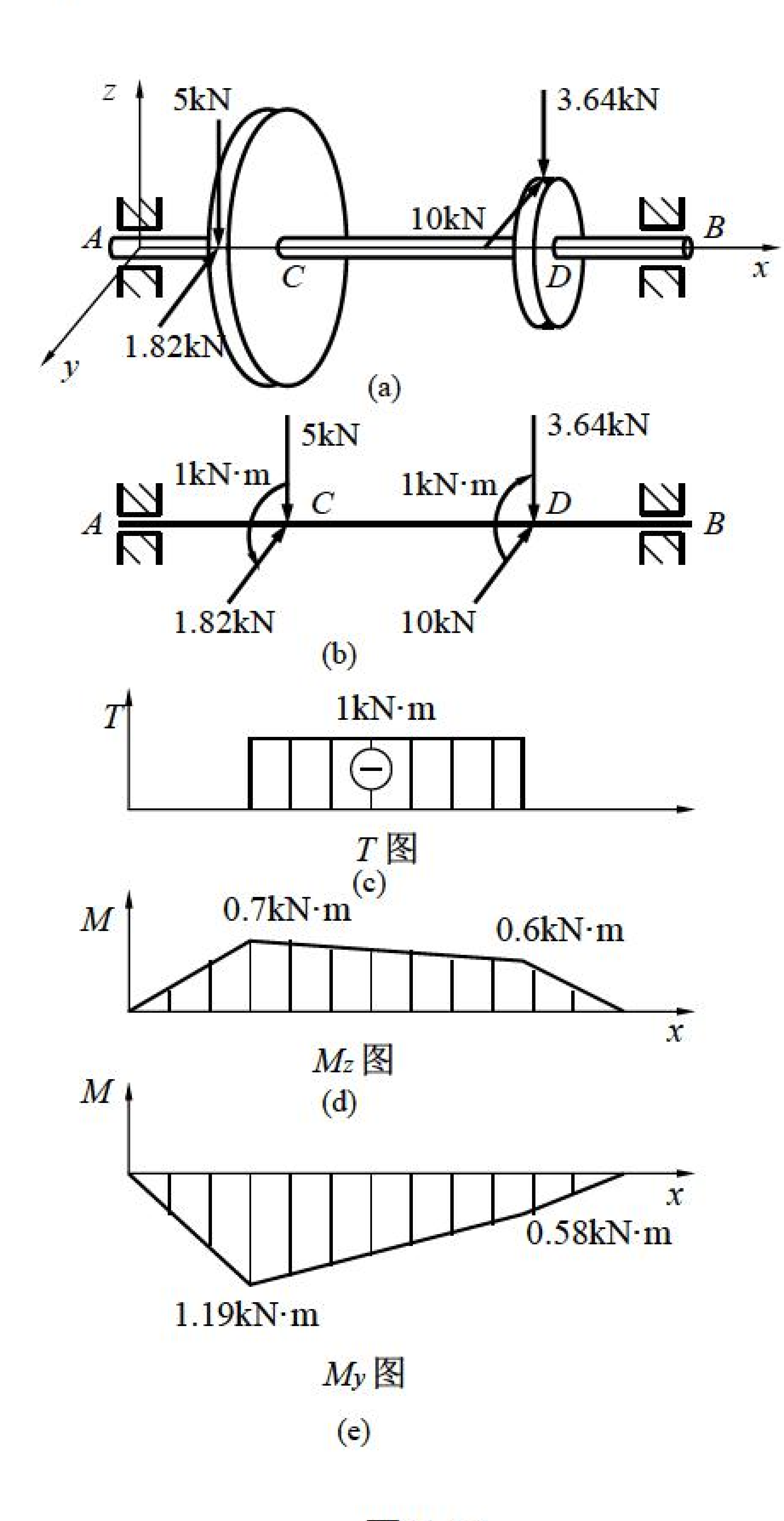


图 8.13

解：(1) 外力分析。

将每个齿轮上的作用力向齿轮轴的截面形心简化，得到轴的计算简图，如图 8.13(b)所示。

(2) 内力分析。

轴的扭矩图如图 8.13(c)所示，C、D 段内的扭矩为$T=1\text{kN}$。

轴在竖向平面的弯矩图如图 8.13(d)所示，C、D 截面弯矩值分别为

$$M_{zC}=0.70\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{zD}=0.60\text{kN}\cdot\text{m}$$

轴在水平平面内的弯矩图如图 8.13(e)所示，C、D 截面弯矩值分别为

$$M_{yC}=1.19\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{yD}=0.58\text{kN}\cdot\text{m}$$

由内力图可以断定 C 截面为轴的危险截面。在 e 截面上，合成弯矩为

$$M=\sqrt{M_{zC}^2+M_{yC}^2}=\sqrt{0.7^2+1.19^2}=1.38(\text{kN}\cdot\text{m})$$

(3) 计算轴径。

按第三强度理论建立强度条件，由式(8.16)得

$$\frac{\sqrt{M^2+T^2}}{W}=\frac{\sqrt{1380^2+1000^2}}{W}=\frac{1704}{W}\leqslant[\sigma]$$

对于实心轴 $W=\frac{\pi d^3}{32}$，代入上式求得轴径 d 为

$$d\geqslant\sqrt[3]{\frac{32\times1704}{\pi[\sigma]}}=\sqrt[3]{\frac{32\times1704}{\pi\times120\times10^6}}\text{m}=0.0525\text{m}=52.5\text{mm}$$

本 章 小 结

构件在载荷作用下同时产生两个或两个以上的基本变形的组合作用，称为组合变形。分析组合变形，通常采取“先分解，再叠加”的方法。先利用静力学方法将构件上的外力分解或简化为几种载荷，使其中每一种载荷对应一种基本变形；再利用叠加原理将几种基本变形下的内力、应力、变形和位移等变形效应成为对应的总变形效应。

斜弯曲是梁在两个相互垂直的纵向对称面内同时发生弯曲。斜弯曲时的正应力强度条件与平面弯曲的正应力强度条件完全相同。斜弯曲中性轴是一条通过横截面形心的直线，但不与梁的纵向对称面垂直。梁截面为圆形或正方形时，只要外力通过形心，其弯曲变形就是平面弯曲而非斜弯曲。

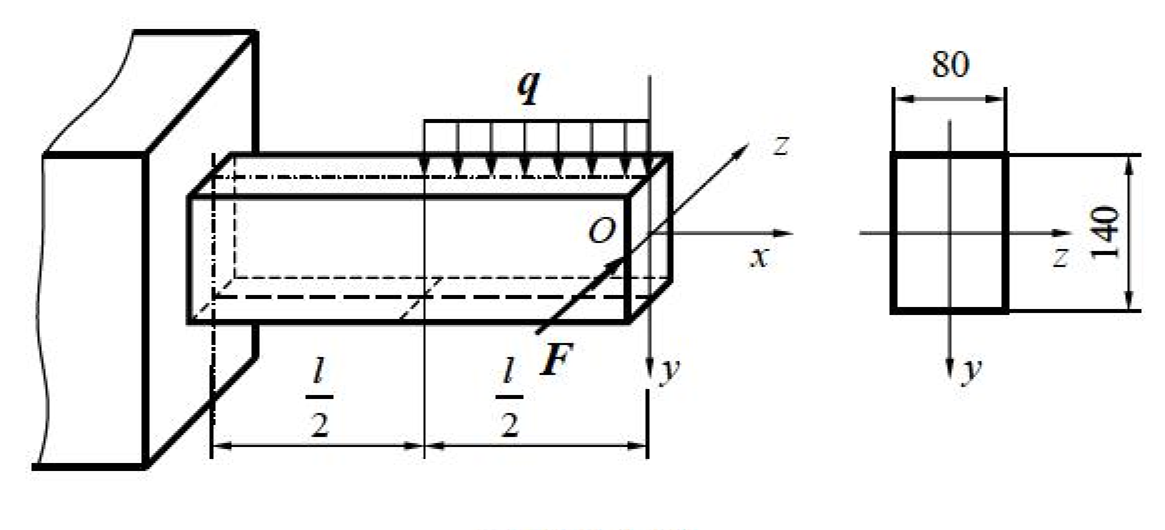
横向力与轴向力共同作用于杆件上时，产生弯曲与拉(压)的组合变形。偏心拉伸(压缩)是指作用在杆件上的外力作用线与杆轴线平行但不重合。

塑性材料制成的圆杆在弯扭曲组合变形时，求得危险截面的弯矩和扭矩后，按第三强度理论和第四强度理论，计算强度条件。

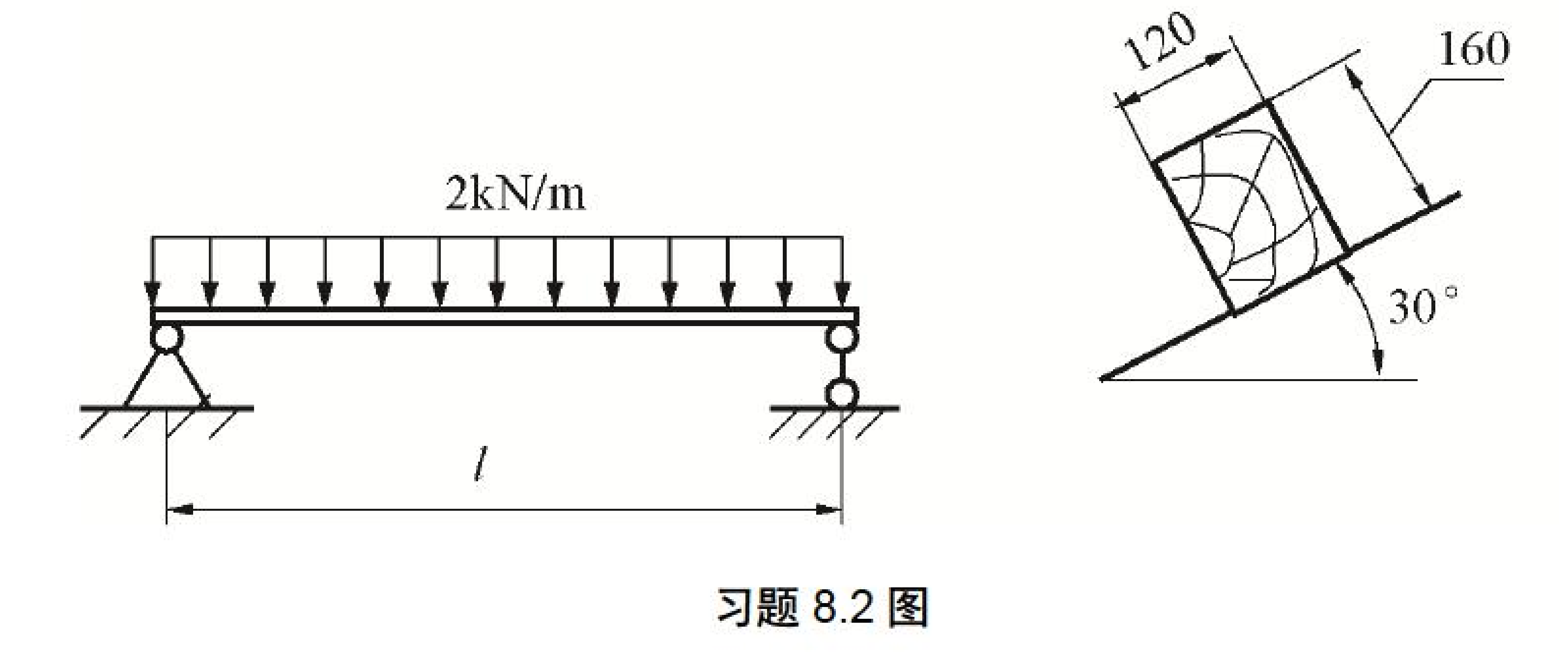
习　　题

8.1　一矩形悬臂梁受力情况如习题 8.1 图所示，已知 l =1m，F = 15kN，q =40kN/m，试求危险截面上的最大应力。

8.2　矩形截面木檩条的跨度 l =4m，载荷与截面尺寸如习题 8.2 图所示，木材的弹性模量 E=10GPa，许用应力 $[\sigma]=12\text{MPa}$，许可挠度 $[w]=\frac{l}{150}$。试校核木梁的强度和刚度。

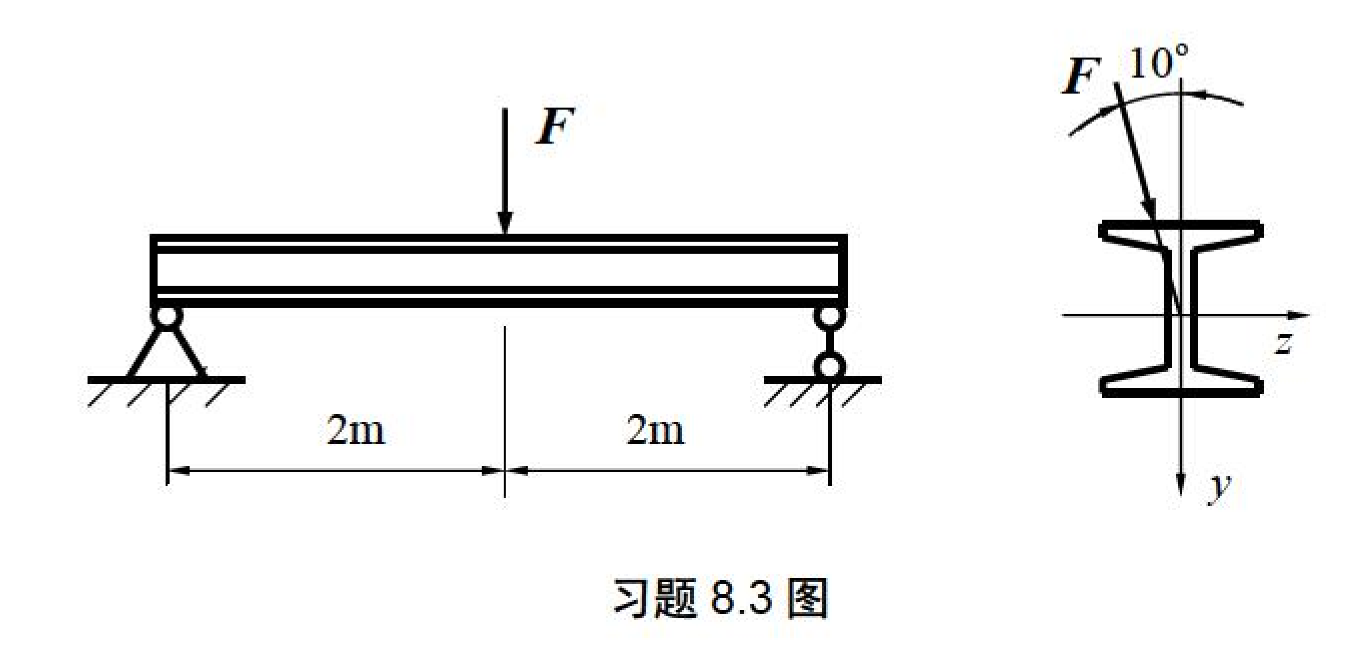


习题 8.1 图



习题 8.2 图

8.3　No.32a 普通热轧工字钢简支梁，受力情况如习题 8.3 图所示。已知 F=50kN，材料许用应力$[\sigma]=150\text{MPa}$。试校核梁的强度。

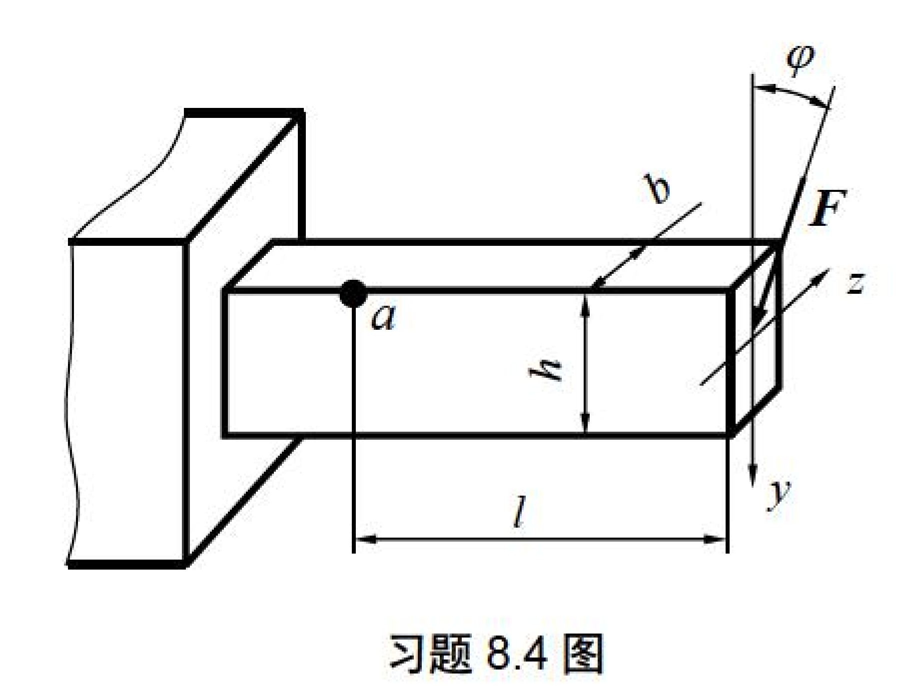


习题 8.3 图

8.4 矩形截面梁受力情况如习题 8.4 图所示，力 $\boldsymbol{F}$ 的作用线通过梁截面形心 O，试求：

(1)　已知 $\boldsymbol{F}$、b、h、l 和 φ 时，图中 a 点处的正应力；

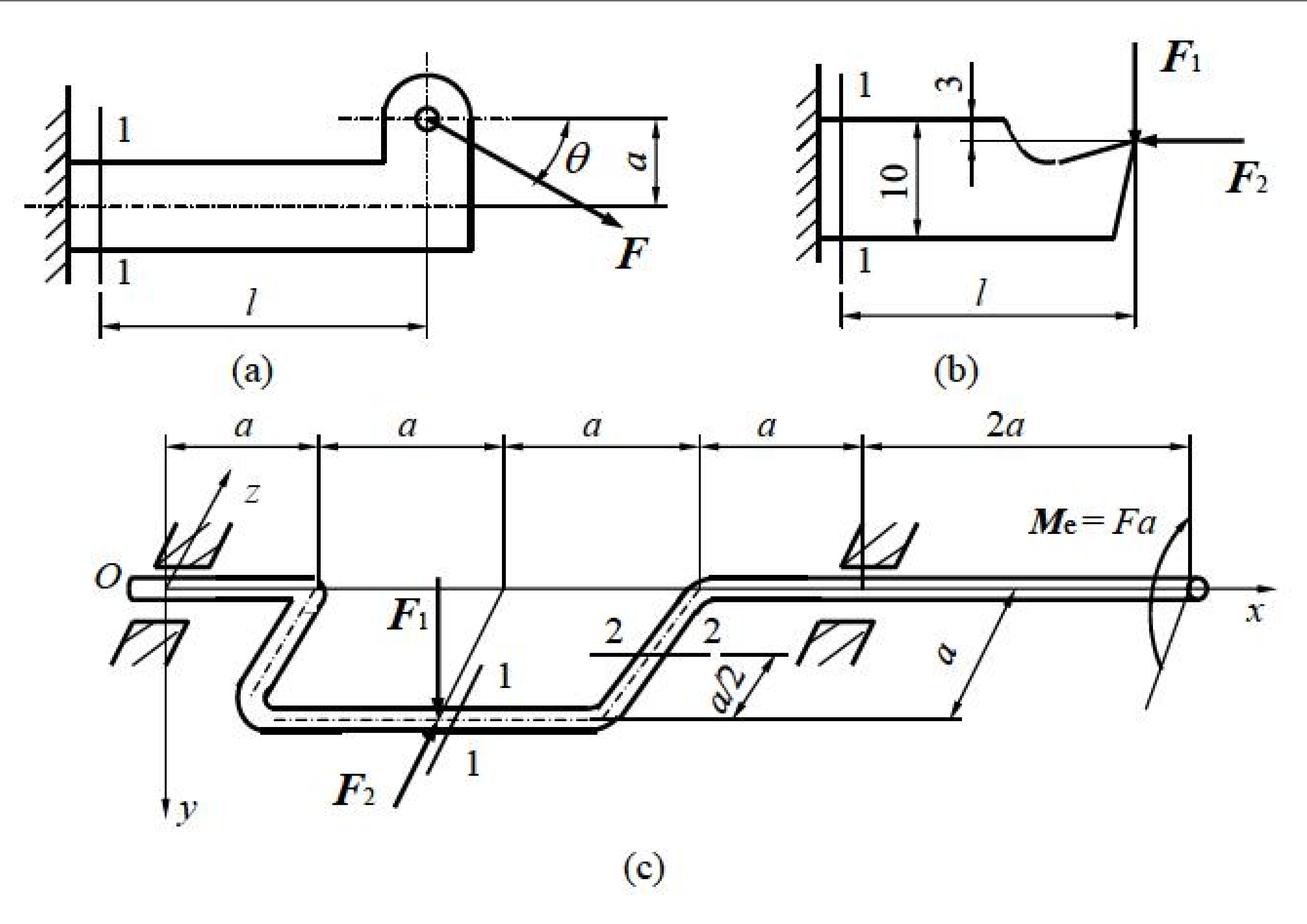
(2)　使 a 点正应力为零时的角度 φ 值。



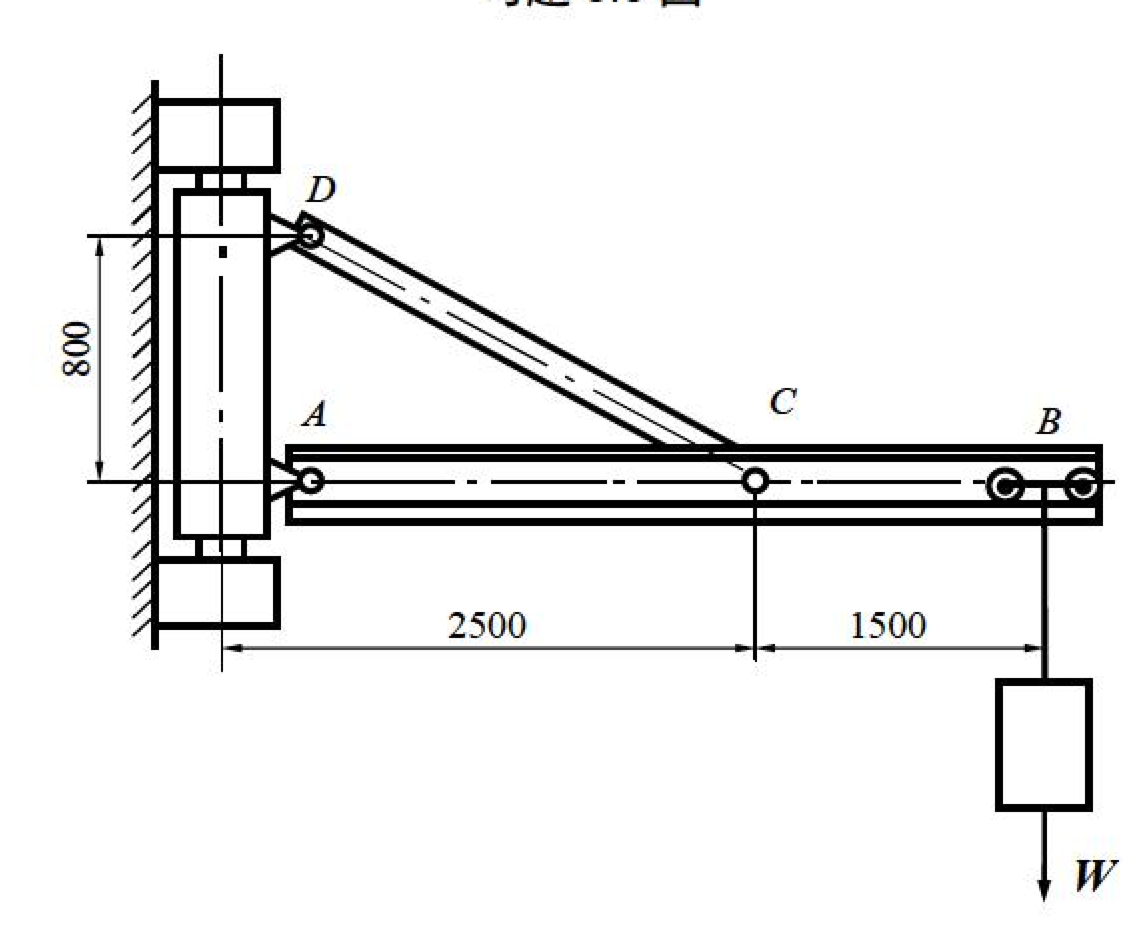
习题 8.4 图

8.5　试求习题 8.5 图所示各构件在指定截面的内力分量。

8.6　习题 8.6 图所示起重机的最大吊重 W = 8kN，横梁 AB 为工字钢，材料许用应力$[\sigma]=120\text{MPa}$。试选择工字钢型号。



习题 8.5 图



习题 8.6 图

8.7 一拆卸工具如习题 8.7 图所示，其爪由 45 钢制成，许用应力$[\sigma]=180\text{MPa}$。试按爪的强度确定拆卸工具的最大顶压力$F_{\max}$。

8.8 如习题 8.8 图所示钻床的立柱由铸铁制成，许用应力$[\sigma_t]=35\text{MPa}$，最大载荷F=18kN。试设计立柱的直径d。

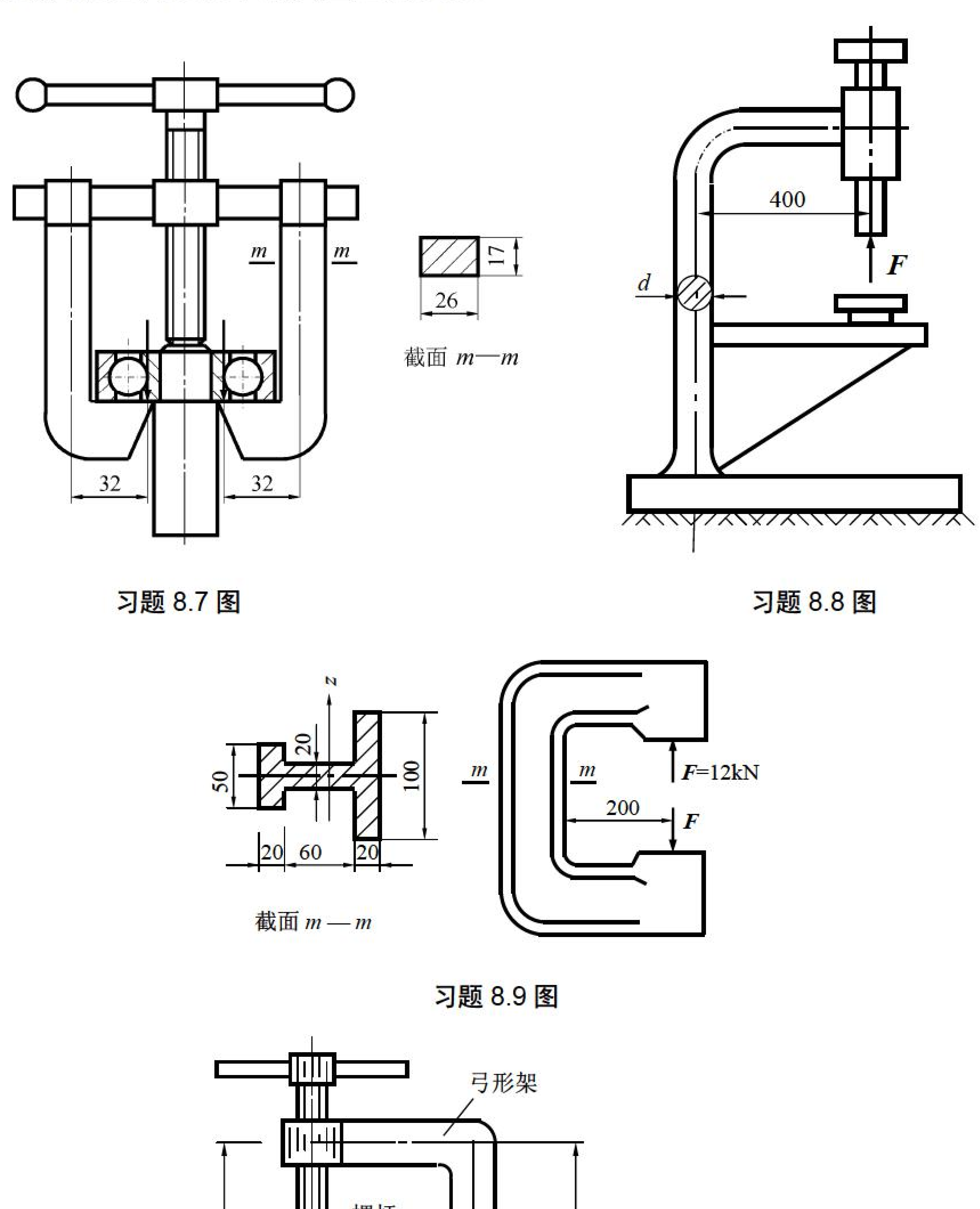
8.9 材料为灰铸铁的压力机框架如习题 8.9 图所示。铸铁许用拉应力$[\sigma_t]=30\text{MPa}$，许用压应力$[\sigma_c]=90\text{MPa}$，试校核框架立柱的强度。

8.10 一弓形夹紧器如习题 8.10 图所示。弓形架的长度$l_1=150\text{mm}$，偏心距 e = 60mm，截面为矩形$h\times b=20\text{mm}\times 10\text{mm}$，弹性模量$E_1=200\text{GPa}$；螺杆的工作长度$l_2=100\text{mm}$，根径$d_2=8\text{mm}$，弹性模量$E_2=220\text{GPa}$；工件的长度$l_3=40\text{mm}$，直径$d_3=10\text{mm}$，弹性模量$E_3=180\text{GPa}$。当螺杆与工件接触后，再将螺杆旋进 1mm 以压紧工件，试求弓形架内的最大正应力以及弓形架两端 A、B 间的相对位移δ_{AB}。

8.11 如习题 8.11 图所示一 T 形截面的悬臂梁，承受与杆轴线平行的力 $\boldsymbol{F}$ 作用，试求

杆内的最大正应力。

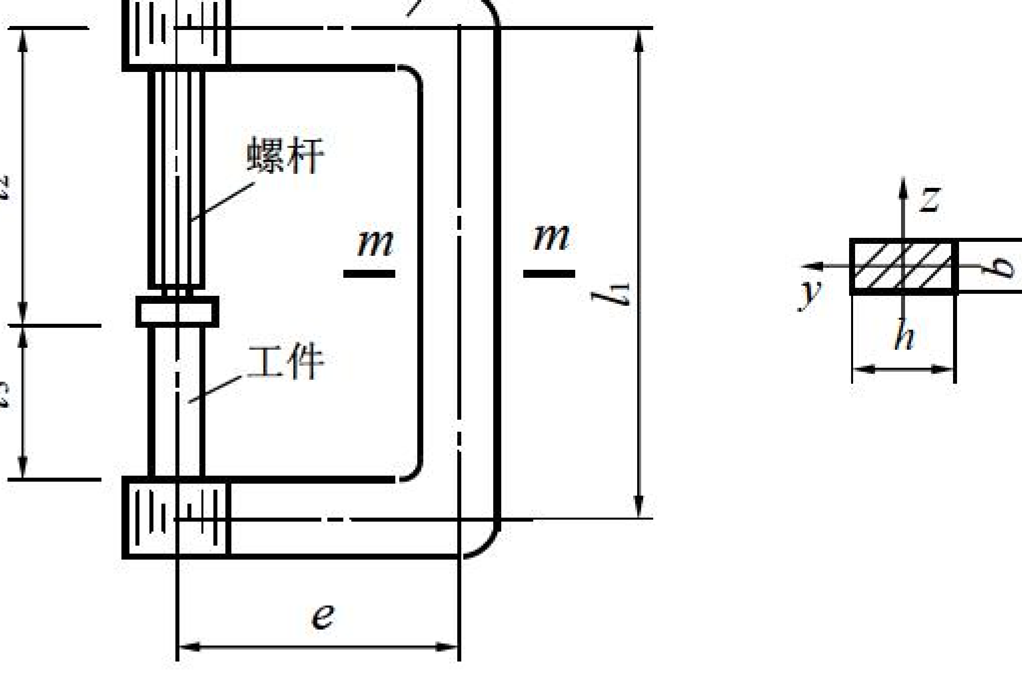
8.12 如习题 8.12 图所示 3 种形状不同而截面积相同的受力压杆，试求图示受力情况下三杆的最大拉应力之比和最大压应力之比。



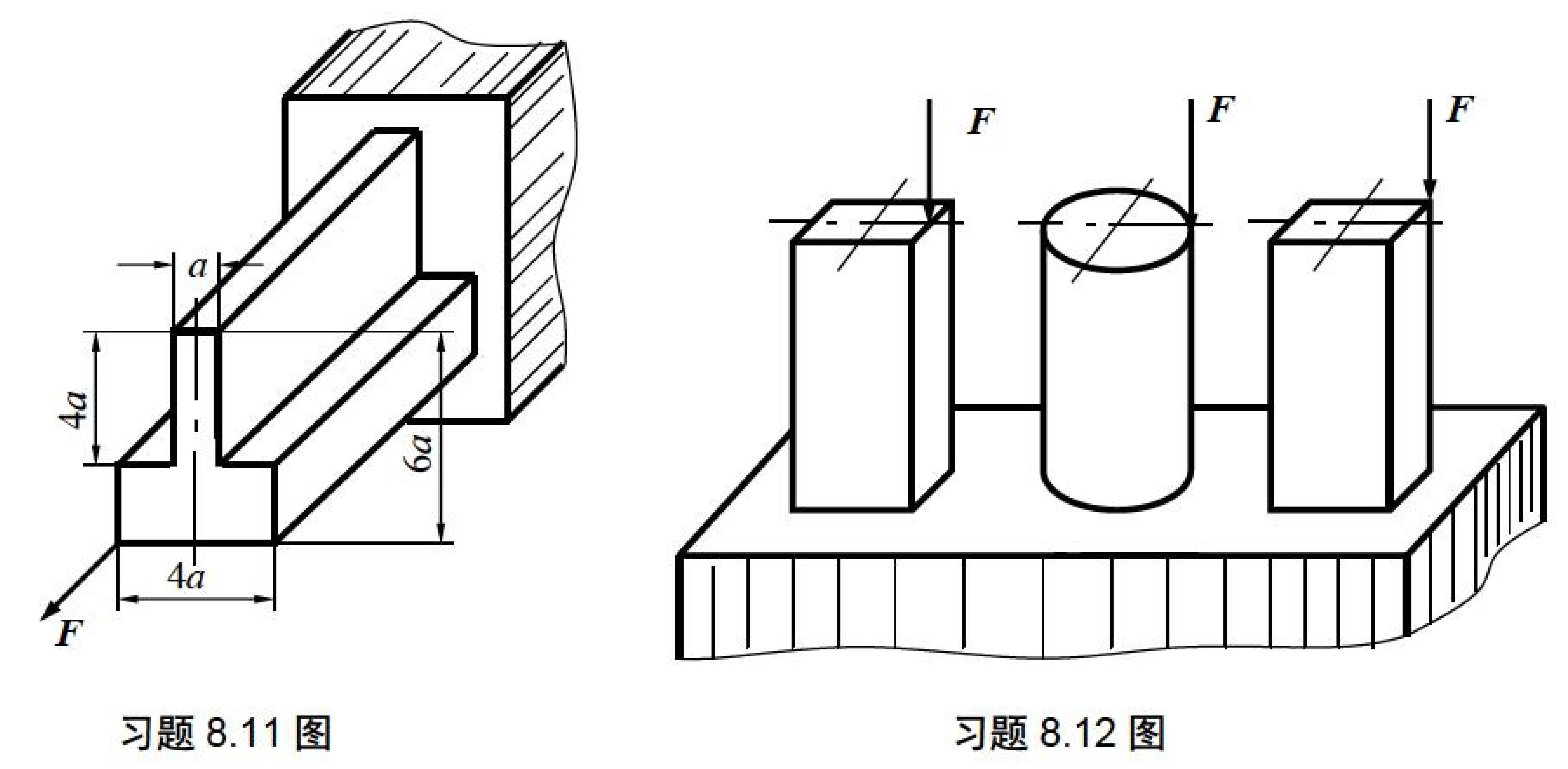
习题 8.7 图

习题 8.8 图

习题 8.9 图

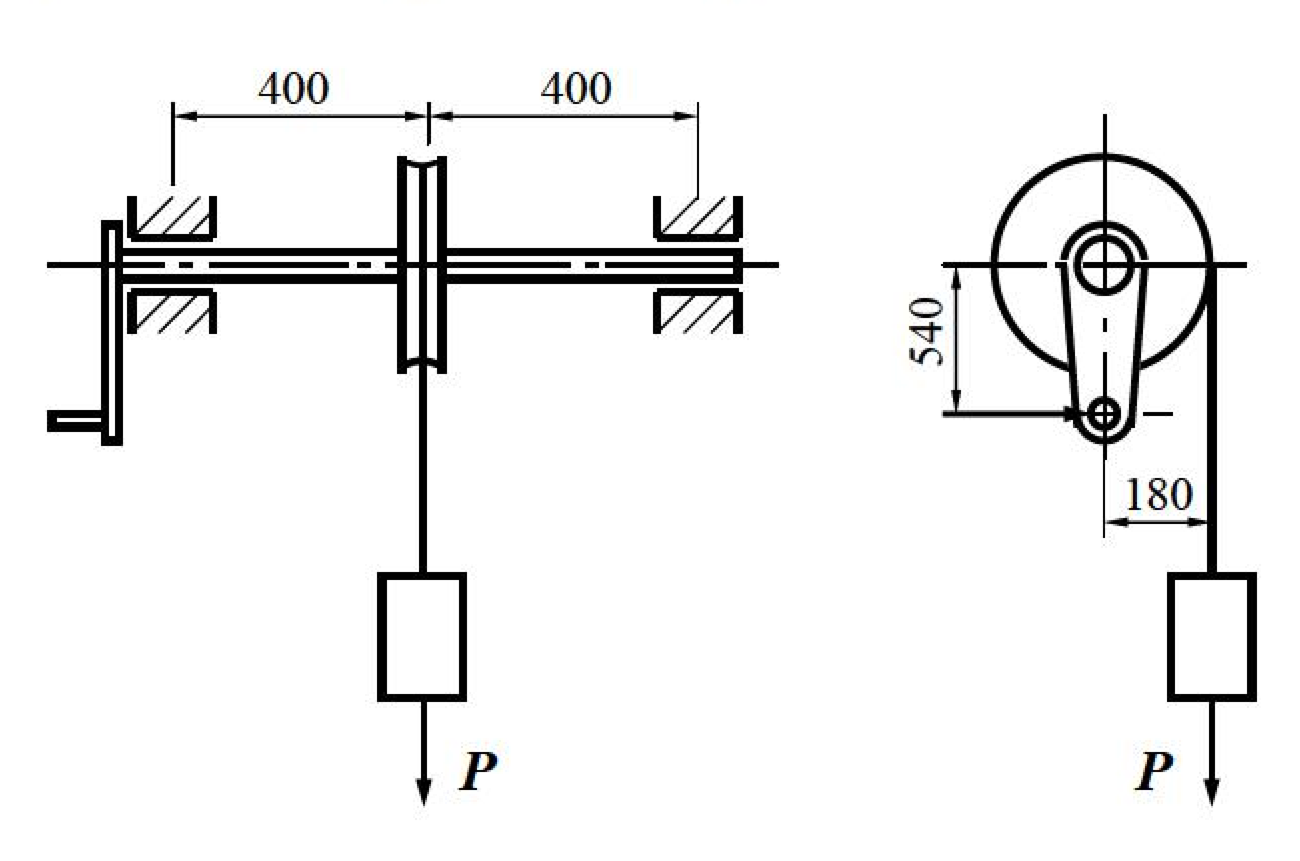


习题 8.10 图



习题 8.11 图　　　　　　　　习题 8.12 图

8.13　手摇绞车如习题 8.13 图所示，轴的直径 d = 30mm，材料为 Q235 钢，许用应力 $[\sigma]=80\text{MPa}$。试按第三强度理论求绞车的最大起吊重量 $\boldsymbol{P}$。



习题 8.13 图

8.14　如习题 8.14 图所示，电动机的功率 P =10kW，转速 n = 715r/min，带轮直径 D=250mm，主轴外伸部分长度 l =120mm，主轴直径 d = 40mm。若主轴材料许用应力 $[\sigma]=80\text{MPa}$，试用第三强度理论校核轴的强度。

8.15　某型水轮机主轴示意图如习题 8.15 图所示。水轮机的输出功率为 P=37520kW，转速 n =150r/min。已知轴向推力 F =4800kN，转轮重 $W_1=390\text{kN}$；主轴内径 d =340mm，外径 D = 750mm，自重 $W_2=285\text{kN}$。主轴材料为 45 钢，其许用应力 $[\sigma]=120\text{MPa}$，试按第四强度理论校核主轴的强度。

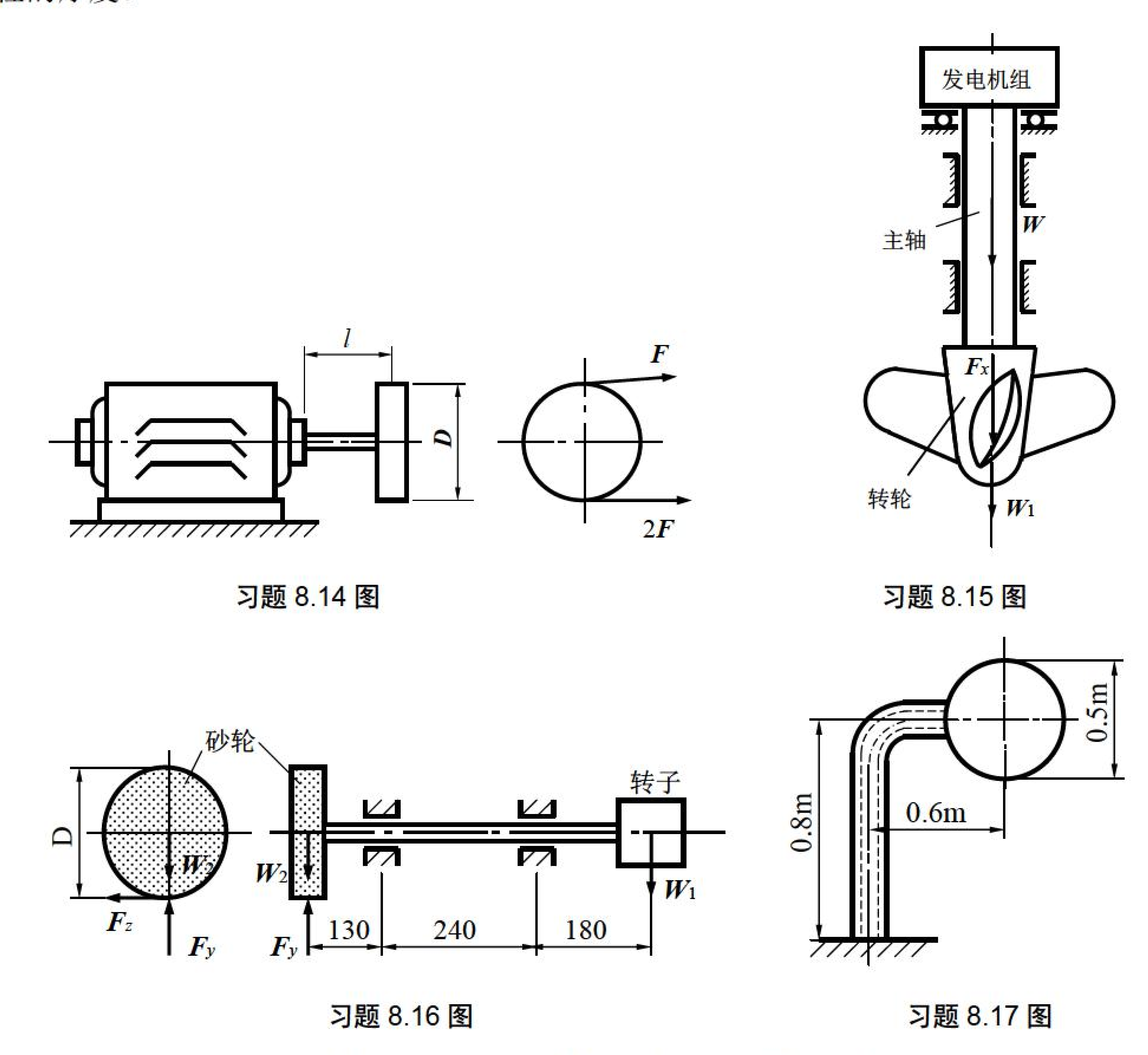
8.16　习题 8.16 图所示为某磨床砂轮轴的示意图，已知电机功率 P =3kW，转动转速 n=1400r/min，转子重量 $W_1=101\text{N}$，砂轮直径 D=250mm，砂轮重量 $W_2=275\text{N}$。磨削力 $F_y:F_z=3$∶1，砂轮轴直径 d =50mm，材料为轴承钢，许用应力 $[\sigma]=80\text{MPa}$。

(1)　试用单元体表示轴危险点的应力状态，并求出主应力和最大切应力。

(2)　试用第三强度理论校核轴的强度。

8.17　铁道路标圆信号板如习题 8.17 图所示，装在外径 D=60mm 的空心圆柱杆上，所

受的最大风载荷 $p = 2\text{kN/m}^2$，其材料的许用应力$[\sigma] = 60\text{MPa}$，试按第三强度理论设计空心柱的厚度。

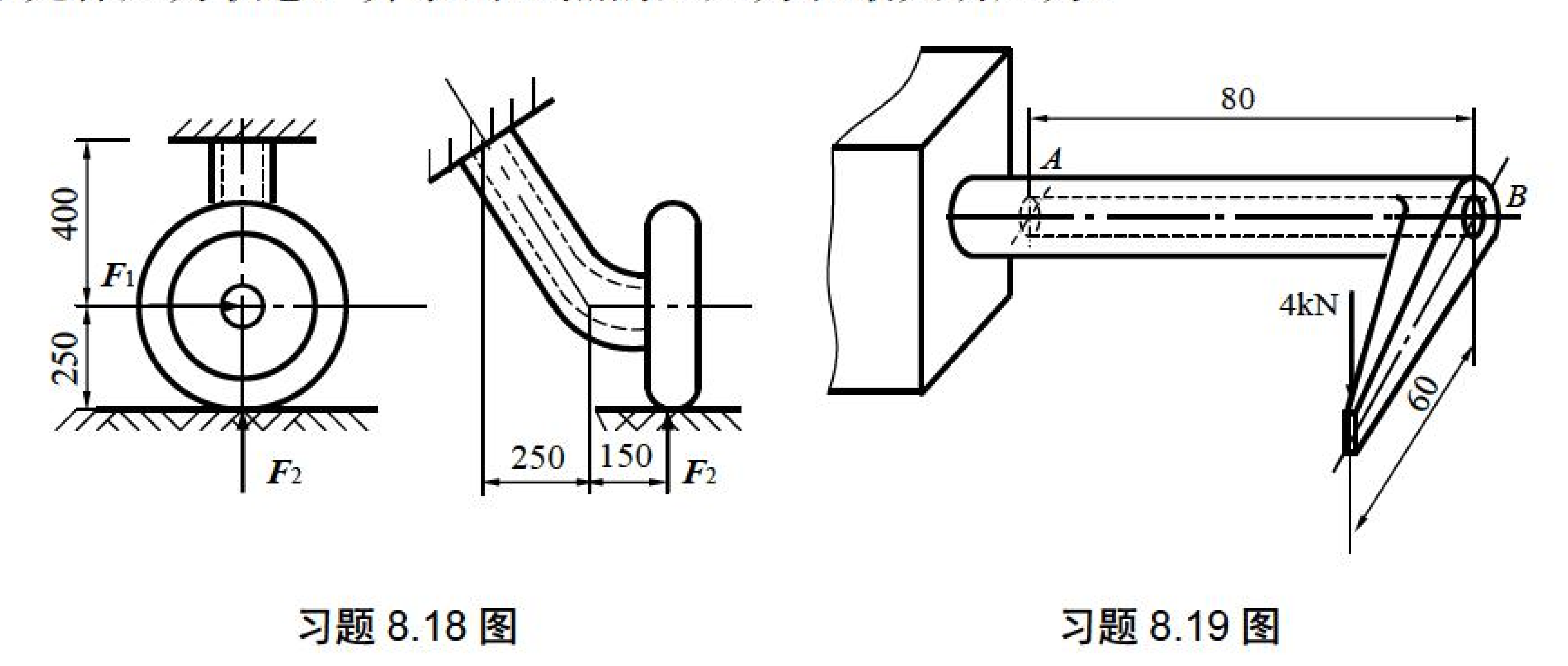


习题 8.14 图　　习题 8.15 图

习题 8.16 图　　习题 8.17 图

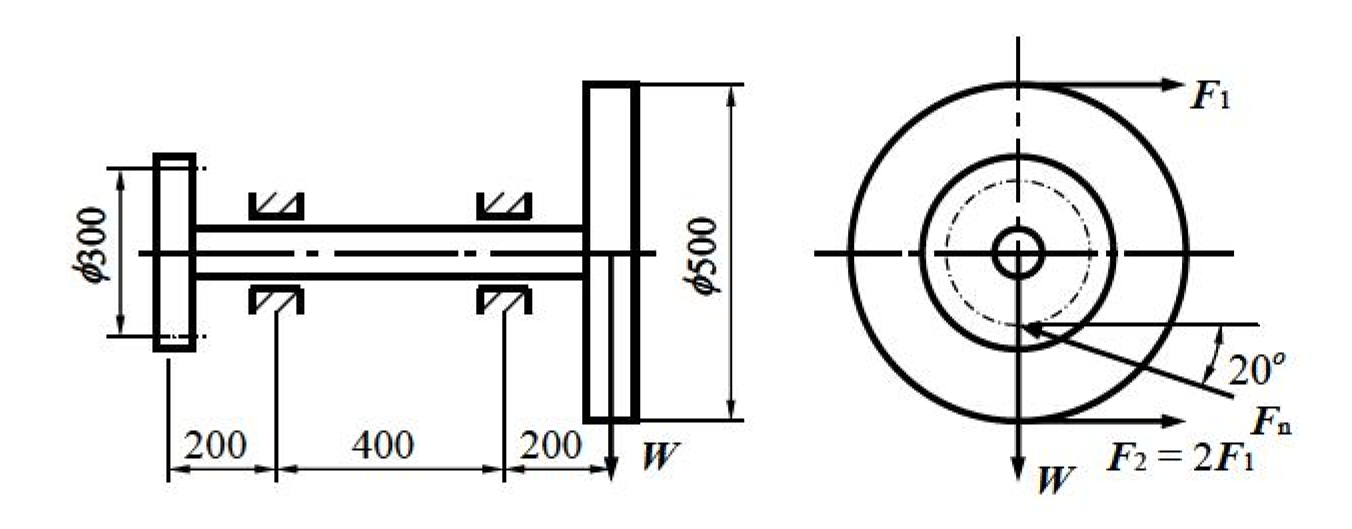
8.18　如习题 8.18 图所示，飞机起落架的折轴为管状截面，内径 $d = 70\text{mm}$，外径 $D = 80\text{mm}$。承受载荷 $F_1 = 1\text{kN}$，$F_2 = 4\text{kN}$。若材料许用应力$[\sigma] = 100\text{MPa}$，试按第三强度理论校核折轴的强度。

8.19　如习题 8.19 图所示直角为空心圆管，外径 $D = 55\text{mm}$，内径 $d = 50\text{mm}$，试画出 A 点处单元体应力状态，并求出 A 点的主应力和最大切应力。



习题 8.18 图　　习题 8.19 图

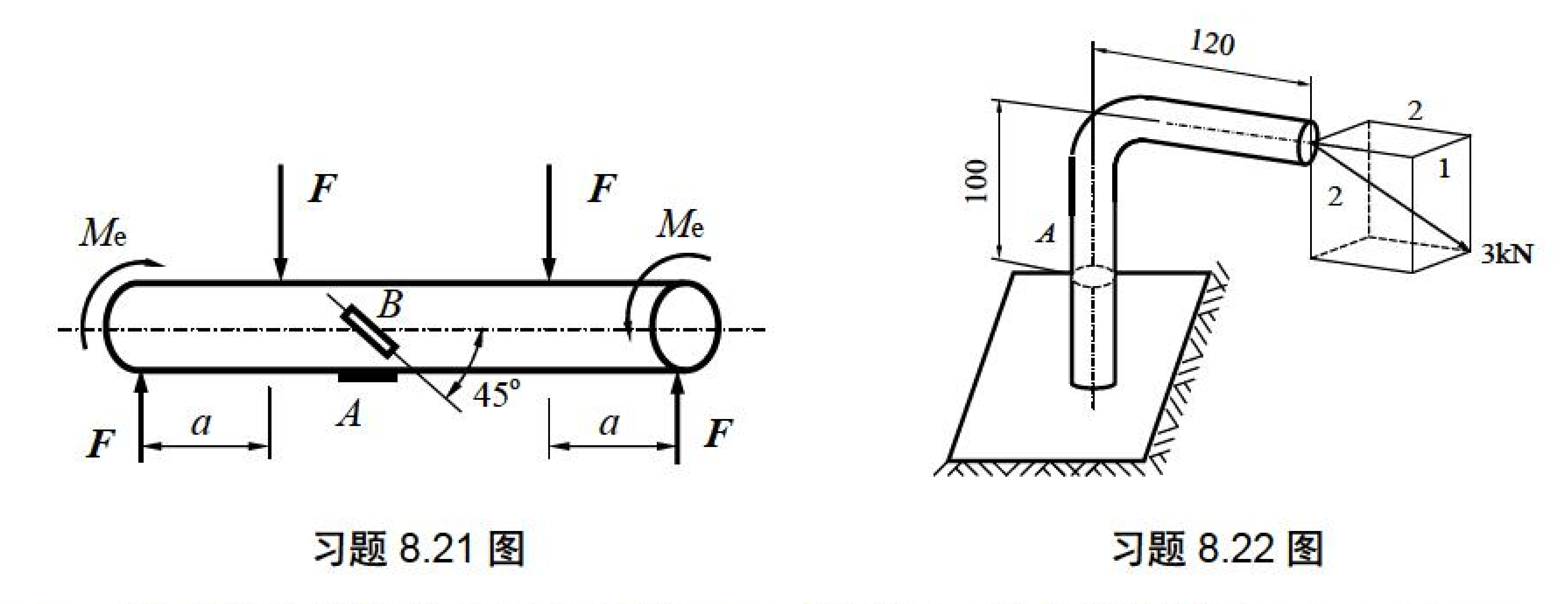
8.20 如习题 8.20 图所示带轮传动轴传递功率 $P = 7\text{kW}$，转速 $n = 200\text{r/min}$，带轮重量 $W = 1.8\text{kN}$，左端齿轮上的啮合力 $\boldsymbol{F}$ 与齿轮圆切线的压力角 $\alpha = 20°$，轴材料的许用应力 $[\sigma] = 80\text{MPa}$。试按第三强度理论设计轴的直径 d。



习题 8.20 图

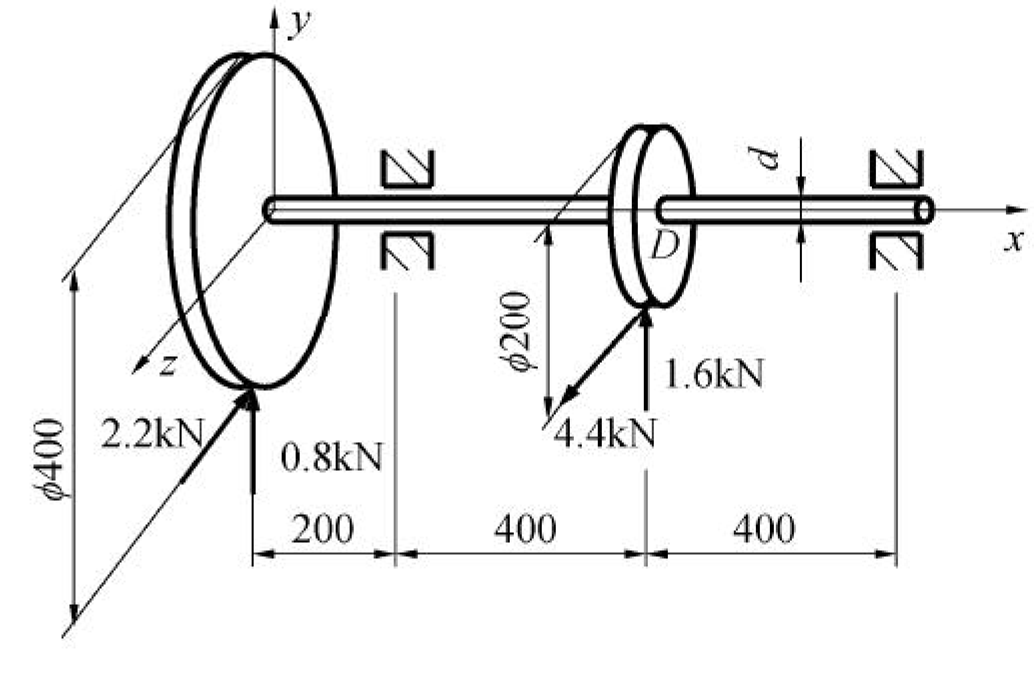
8.21 习题 8.21 图所示等截面圆直杆受横向力 $\boldsymbol{F}$ 和外力偶矩 M_e 的作用。今测得杆表面 A 点处沿轴线方向的线应变 $\varepsilon_{0°} = 4\times10^{-4}$，杆表面 B 点处与母线成 $-45°$ 角方向的线应变 $\varepsilon_{45°} = 3.75\times10^{-4}$，已知杆的抗弯截面系数 $W = 6000\text{mm}^3$，弹性模量 $E = 200\text{GPa}$，泊松比 $\mu = 0.25$，许用应力 $[\sigma] = 120\text{MPa}$。试按第三强度理论校核该杆的强度。

8.22 习题 8.22 图所示折轴杆的横截面为 d =30mm 的圆形。试用单元体表示 A 点和的应力状态，并确定其主应力。



习题 8.21 图　　　　习题 8.22 图

8.23 受力状态齿轮传动轴如习题 8.23 图所示，轴的许用应力 $[\sigma] = 120\text{MPa}$，试按第四强度理论选择轴的直径 d。



习题 8.23 图

第9章　压 杆 稳 定

【本章学习重点】

本章重点学习压杆稳定的概念，细长受压直杆的临界压力，临界应力的确定，压杆的稳定校核。

【本章学习目标】

- 理解失稳现象、临界压力、临界应力、柔度等概念。
- 掌握细长受压直杆的临界压力的一般表达式(欧拉公式)，能根据杆端约束类型确定长度因数。
- 会计算受压直杆柔度值，正确判别三种类型的压杆，并按不同公式计算出临界压力、临界应力。
- 掌握压杆稳定校核的计算。

9.1　压杆稳定的概念

前面对受压杆件的研究是从强度的观点出发的，即认为只要满足压缩强度条件就可以保证压杆的正常工作。这样考虑对粗短的压杆来说是正确的，但对于细长的压杆就不适应了。例如，一根平直的钢锯条，在承受远远没有达到抗压强度极限的轴向压力作用下就会朝厚度薄的方向弯曲，并且越来越弯，最后丧失承载能力。由此可见，钢锯条的承载能力并不是取决于其轴线方向的压缩强度，而是与它受压时能否保持原有的直线平衡状态，即稳定性有关。

工程实际中，有许多受压的构件是需要考虑稳定性的。例如，千斤顶的螺杆(见图9.1)，内燃机配气机构中的挺杆(见图 9.2)，托架中的压杆(见图 9.3)，自卸货卡车上的压杆(见图 9.4)，磨床液压装置的活塞杆以及建筑物中的柱等。

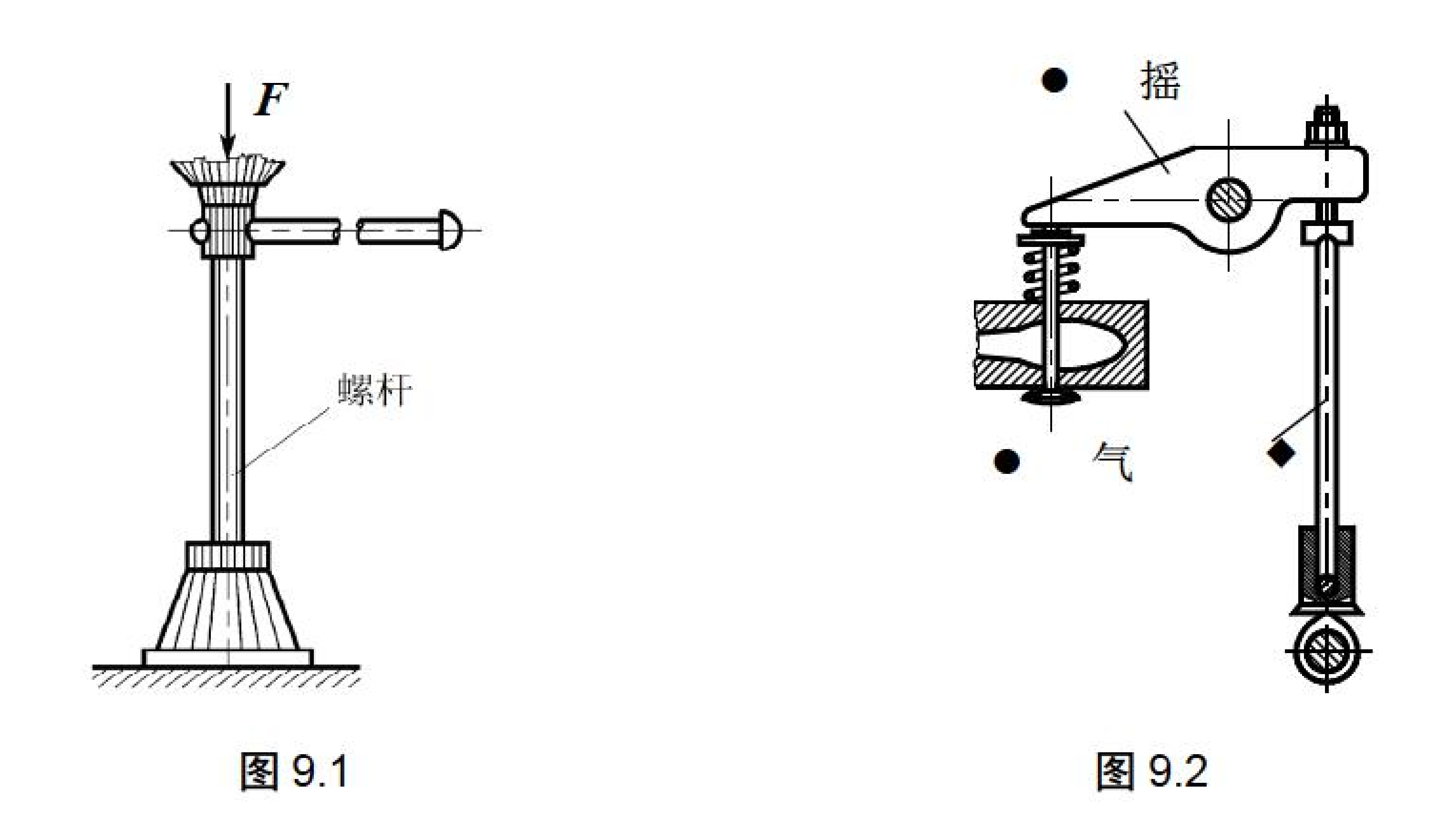


图 9.1　　　　图 9.2

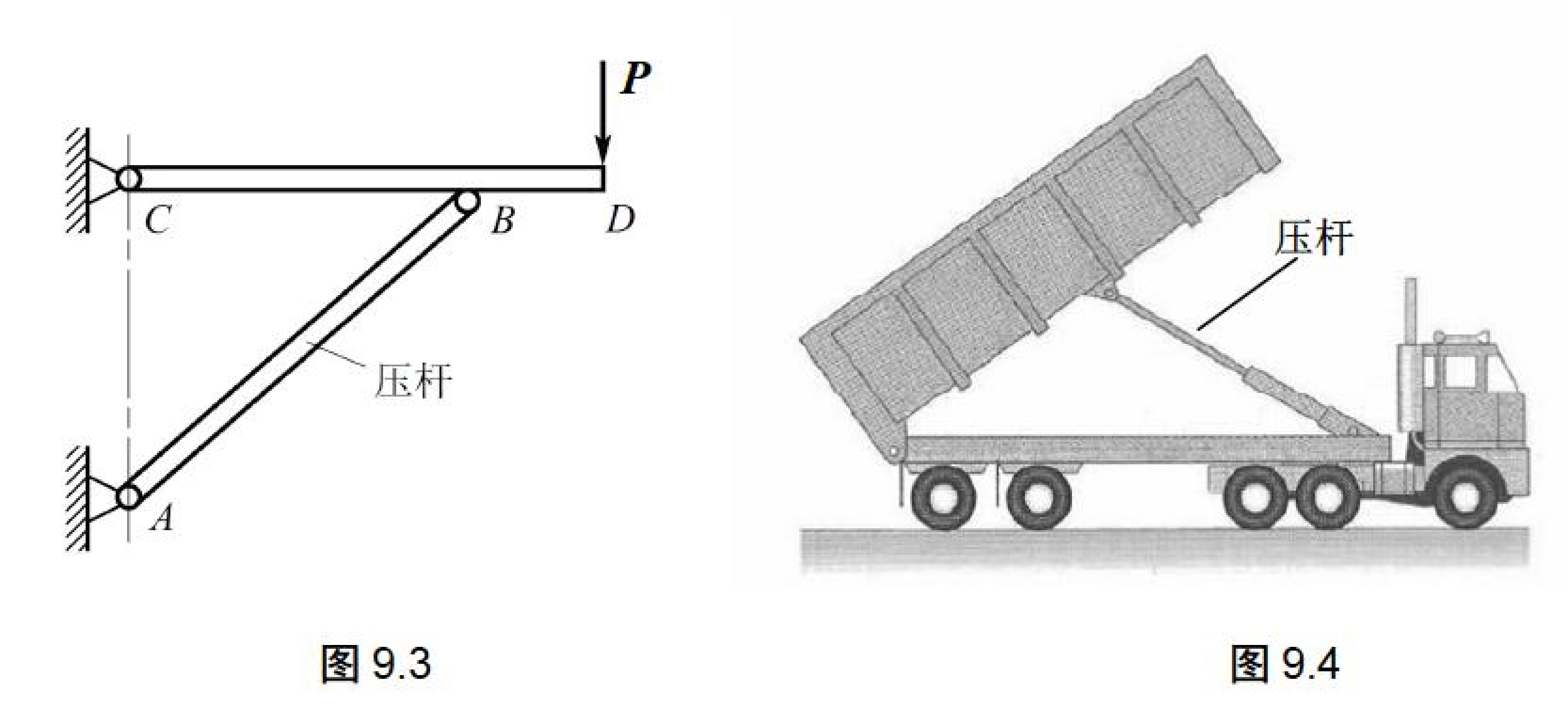


图 9.3　　　　图 9.4

取图 9.5(a)所示一端固定，另一端自由的细长压杆。在上端施加沿轴线方向压力 $\boldsymbol{F}$，再对压杆施加一横向干扰力而使其发生微小弯曲，然后将干扰力解除。若压力小于某一极限值(即临界压力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{cr}}$)，则干扰力解除后它将恢复原有直线形状下的平衡(见图 9.5(b))。表明压杆在原有直线形状下的平衡是稳定的。

若压力等于临界压力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{cr}}$，杆件处于临界平衡状态。在小变形情况下，干扰到哪里，压杆将在哪里保持曲线形状的平衡(见图 9.5(c))。利用压杆在临界压力作用下，可以在曲线形式下保持平衡的这一特点求出临界压力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{cr}}$。

若 $\boldsymbol{F} > \boldsymbol{F}_{\mathrm{cr}}$，杆件的直线平衡将失去。干扰力解除后，杆件将继续弯曲，并且越来越弯，丧失承载能力。表明压杆在原有直线形状下的平衡是不稳平衡(见图 9.5(d))。压杆丧失其原有直线平衡状态的现象，称为丧失稳定，简称为失稳，也称为屈曲。

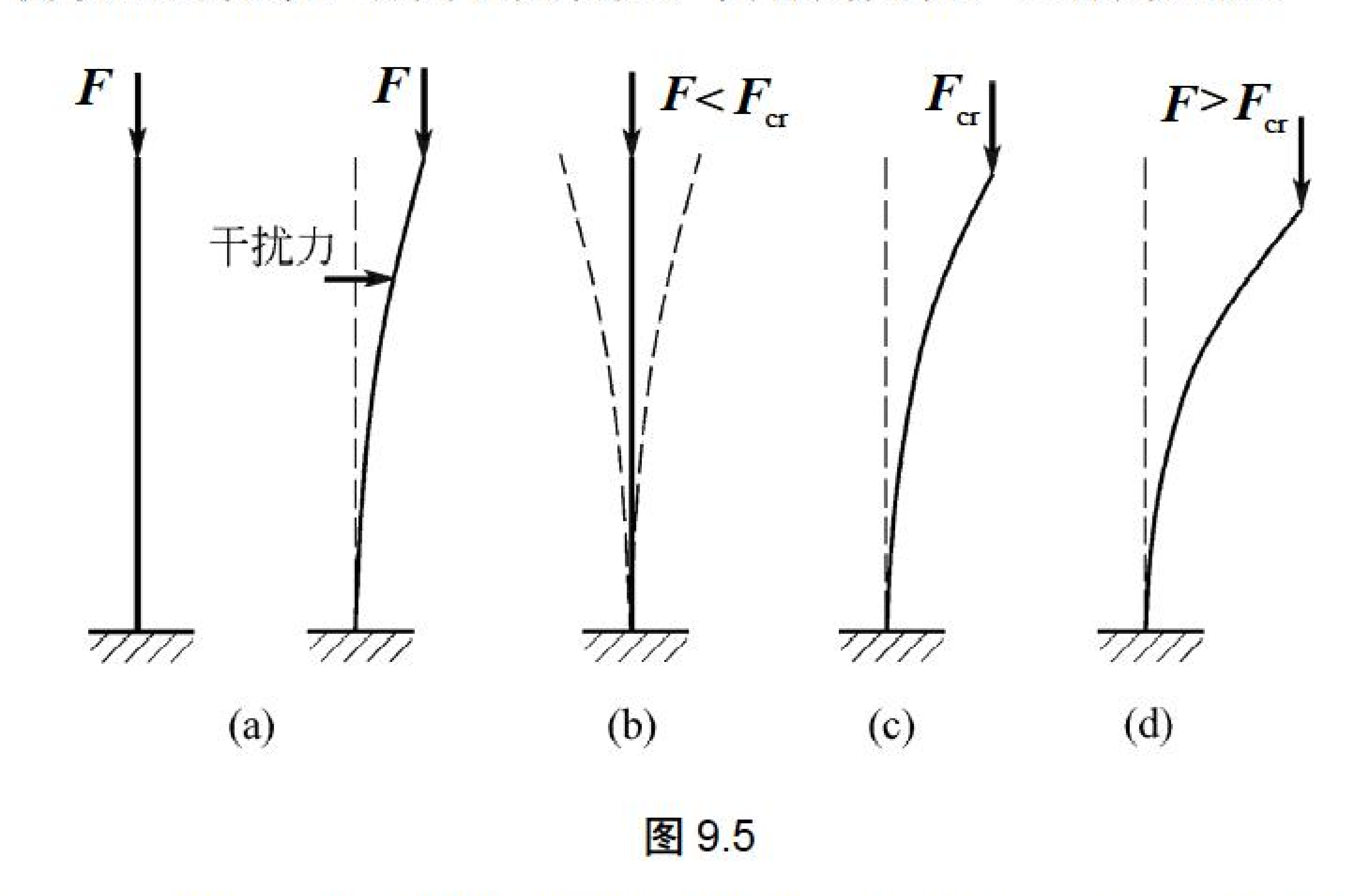


图 9.5

杆件失稳后，可以导致整个机器或结构的损坏。压杆失稳时，应力并不一定很高，有时甚至低于材料的比例极限。可见这种形式的失效，并非强度不足，而是稳定性不够。

稳定性问题并不只限于压杆，受压缩、弯曲和扭转变形的薄壁构件等都可能存在稳定性问题。本教材只介绍压杆的稳定性。

9.2　细长压杆的临界压力

9.2.1　两端铰支细长压杆的临界压力

现以两端为球铰支座、中心受压的等截面细长直杆为例(见图 9.6)，利用压杆在临界压力作用下，去掉横向干扰力后可以在微小弯曲情况下保持平衡的性质，推导其临界压力的计算公式。

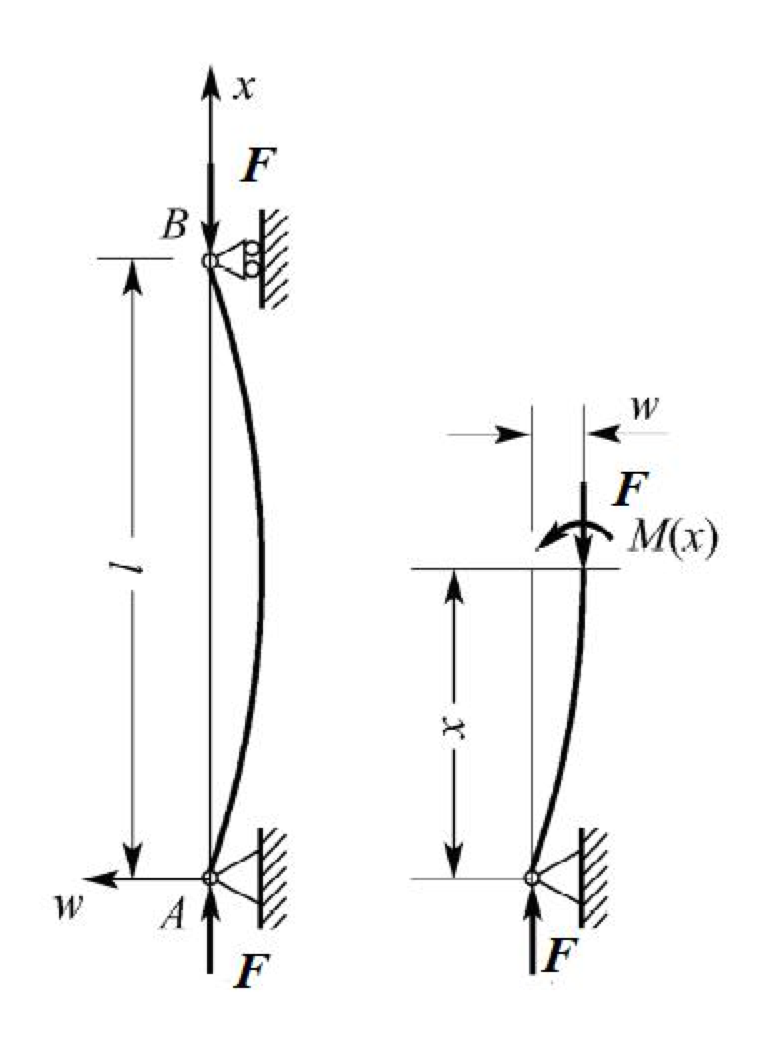


图 9.6

取弯曲平面内的坐标如图 9.6 所示，在压力 $\boldsymbol{F}$ 作用下，去掉横向干扰后，在距离 A 端 x 处的任意截面上，弯矩 $M=-Fw$。对微小弯曲变形，由挠曲线近似微分方程有

$$EI\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}=-Fw \tag{9.1}$$

令

$$k^2=\frac{F}{EI} \tag{9.2}$$

可得二阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}+k^2w=0 \tag{9.3}$$

此方程的通解为

$$w=c_1\sin kx+c_2\cos kx \tag{9.4}$$

式中，c_1和c_2为积分常数，由边界条件确定。

在$x=0$时，$w=0$，代入式(9.7)可得$c_2=0$，则有

$$w=c_1\sin kx \tag{9.5}$$

在$x=l$时，$w=0$，由式(9.5)可得

$$c_1\sin kl=0 \tag{9.6}$$

式(9.6)要求 $c_1=0$ 或 $\sin kl=0$，$c_1=0$ 时，$w=0$，这与有微小弯曲的前提不相符合，因此

$$\sin kl=0 \tag{9.7}$$

即

$$kl=n\pi \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

由此可得

$$k=\frac{n\pi}{\lambda} \tag{9.8}$$

将式(9.8)代回到式(9.2)得

$$F=\frac{n^2\pi^2EI}{l^2}$$

式中，n 为任意整数，但 $n=0$ 时，不符合要求。在 $n=1$ 时，压力为保持微小弯曲的最小压力，即为压杆的临界压力，即

$$F_{\mathrm{cr}}=\frac{\pi^2EI}{l^2} \tag{9.9}$$

式中，EI 为抗弯刚度，l 为压杆的长度。式(9.9)为两端铰支细长压杆临界压力的计算公式，也称为两端铰支压杆临界压力的欧拉公式。

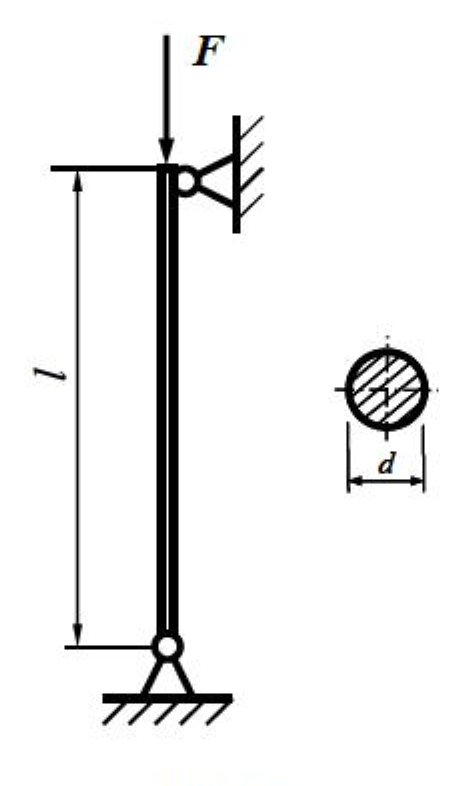
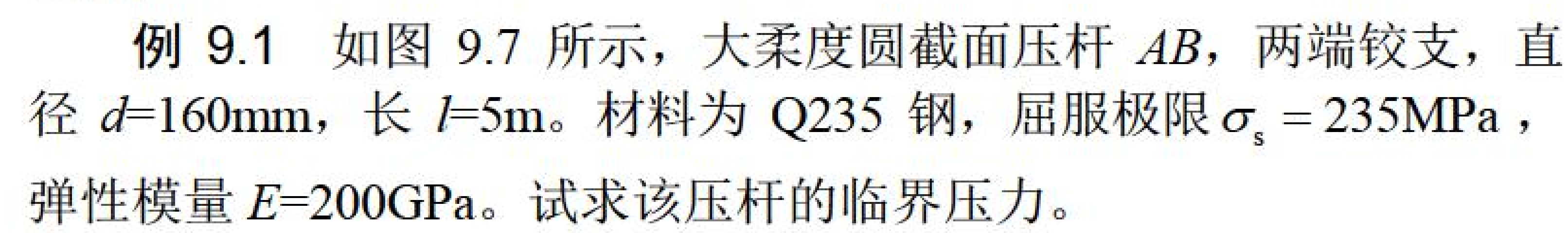


图 9.7

例 9.1 如图 9.7 所示，大柔度圆截面压杆 AB，两端铰支，直

径 d=160mm，长 l=5m。材料为 Q235 钢，屈服极限 $\sigma_{\mathrm{s}}=235\mathrm{MPa}$，弹性模量 E=200GPa。试求该压杆的临界压力。


解：由式(9.9)，压杆 AB 的临界压力为

$$F_{\mathrm{cr}}=\frac{\pi^2EI}{l^2}=2540\mathrm{kN}$$

使压杆 AB 发生屈服的压力为

$$F_{\mathrm{s}}=\sigma_{\mathrm{s}} \quad A=4722.6\mathrm{kN}$$

所以压杆 AB 不会发生屈服，压力比较大时会先发生失稳。

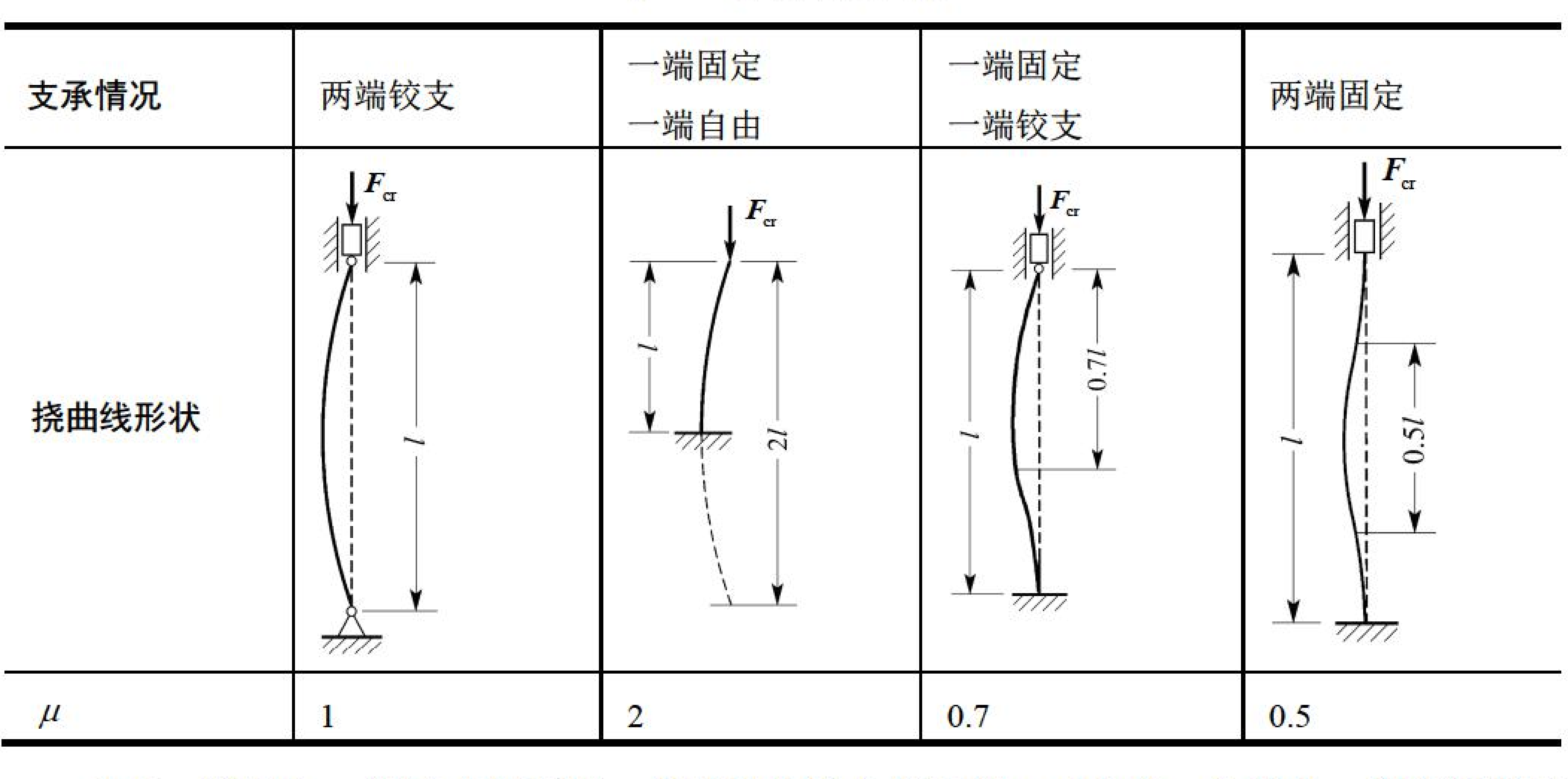
9.2.2 其他支承形式下细长压杆的临界压力

杆件受压变弯后的挠曲线形状与杆件两端的支承形式密切相关。压杆两端的支座除了都为铰支外，还可能有其他情况，工程上最常见的杆端支承形式主要有 4 种，见表 9.1。各种支承情况下压杆的临界压力公式，可以仿照两端铰支形式的方法推导出来，也可以把各种支承形式的弹性曲线与两端铰支形式下的弹性曲线相对比来获得。

例如，千斤顶的螺杆(见图 9.1)，下端可简化为固定端，上端因可与顶起的重物共同做侧向位移，简化为自由端。一端固定另一端自由，长度为 l 压杆的挠曲线，相当于两端铰支长为 $2l$ 的压杆挠曲线的上半部分。所以，一端固定另一端自由，长度为 l 压杆的临界压力，等于两端铰支长为 $2l$ 的压杆的临界压力，即

$$F_{\mathrm{cr}}=\frac{\pi^2EI}{(2l)^2} \tag{9.10}$$

表 9.1　压杆长度因数



支承情况	两端铰支	一端固定 一端自由	一端固定 一端铰支	两端固定
挠曲线形状				
μ	1	2	0.7	0.5

对于一端固定一端铰支的压杆，在其挠曲线上距下端 $0.3l$ 处有一个拐点，即弯矩等于零的点，在力学上相当于铰链。这样两个铰链之间的距离为 $0.7l$ 。在这种支承形式下，压杆的临界压力只要在两端铰支的临界压力公式中以 $0.7l$ 替代长度 l 即可。

对于两端固定的压杆，其挠曲线上有两个距端部 $l/4$ 的拐点。在这种支承形式下，压杆的临界压力只要在两端铰支的临界力公式中以 $0.5l$ 替代长度 l 即可。

从上述比较可见，各种支承形式下的临界压力欧拉公式可以统一表示为

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \tag{9.11}$$

式中 μ 为长度因数， μl 称为相当长度。长度因数代表压杆不同支承情况对临界压力的影响，几种支承情况的 μ 值列于表 9.1 中。

例 9.2　如图 9.8 所示细长压杆，一端固定另一端自由。已知弹性模量 $E = 10\text{GPa}$ ，长度 $l = 2\text{m}$ ， $h = 160\text{mm}$ ， $b = 90\text{mm}$ 。试求压杆的临界压力。若压杆的横截面面积不变，将横截面形状改为边长为 $a = 120\text{mm}$ 的正方形，试计算这时压杆的临界压力。

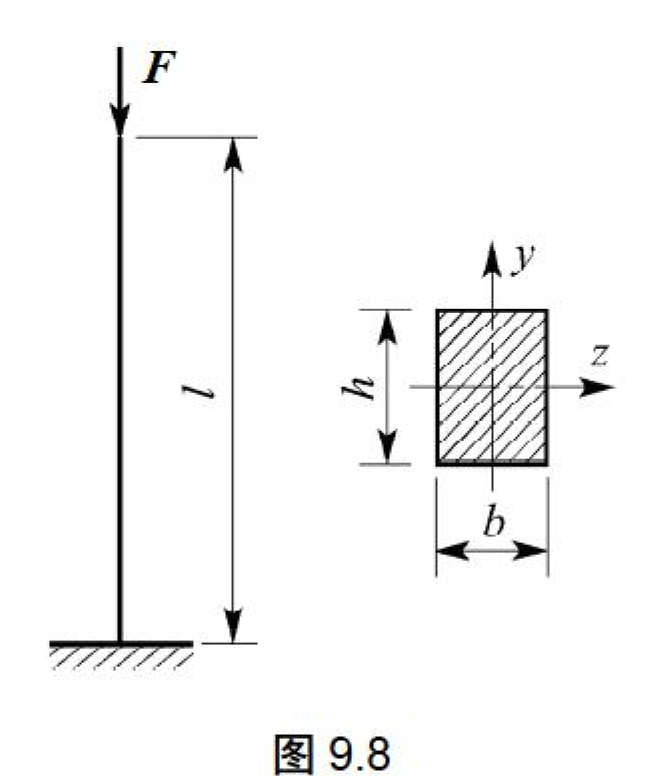


图 9.8

解：(1) 计算矩形截面压杆的临界压力。

截面对 y 轴和 z 轴的惯性矩分别为

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{160 \times 90^3}{12}\text{mm}^4 = 972 \times 10^4\,\text{mm}^4$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{90 \times 160^3}{12}\text{mm}^4 = 3072 \times 10^4\,\text{mm}^4$$

由于 $I_y < I_z$，所以压杆必然绕 y 轴弯曲失稳，应将 I_y 代入式(9.11)计算临界压力，根据杆端约束 μ=2，于是

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 10 \times 10^9 \times 972 \times 10^4 \times 10^{-12}}{(2 \times 2)^2}\text{N} = 60\text{kN}$$

(2) 计算正方形截面压杆的临界压力，截面对 y 轴和 z 轴的惯性矩相等，均为

$$I_y = I_z = \frac{a^4}{12} = \frac{120^4}{12} = 1728 \times 10^4 \,\text{mm}^4$$

临界压力为

$$F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \times 10 \times 10^9 \times 1728 \times 10^4 \times 10^{-12}}{(2 \times 2)^2}\,\text{N} = 106.5\text{kN}$$

从计算结果来看，两种压杆的质量和体积等都相同，但正方形截面压杆的临界压力是矩形截面压杆的 1.78 倍。

9.3 欧拉公式的适用范围

9.3.1 临界应力

将压杆的临界压力 F_{cr} 除以横截面面积 A，得到压杆横截面上的应力，称为压杆的临界应力，用 σ_{cr} 表示，即

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{F_{\text{cr}}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l)^2} \frac{I}{A} \tag{9.12}$$

若令 $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$，i 称为压杆横截面的惯性半径，式(9.12)可写成

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i}\right)^2} \tag{9.13}$$

令

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} \tag{9.14}$$

式(9.13)可写成

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{9.15}$$

式中，λ 为压杆的柔度或长细比，它反映了压杆的长度、支承情况以及横截面形状和尺寸等因素对临界应力的综合影响。

式(9.15)为细长压杆临界应力的欧拉公式。由公式可以看出，压杆的临界应力与其柔度的平方成反比，压杆的柔度值越大，其临界应力越小，压杆越容易失稳。可见，柔度 λ 在压杆稳定计算中是一个非常重要的参数。

9.3.2 欧拉公式的适用范围

由于推导临界压力的欧拉公式时，用到了挠曲线近似微分方程，因此由欧拉公式计算的临界应力不得超过材料的比例极限，即

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leqslant \sigma_{\text{p}} \quad \text{或} \quad \lambda \geqslant \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{p}}}} \tag{9.16}$$

令

$$\lambda_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\mathrm{p}}}} \tag{9.17}$$

λ_{p} 是对应于材料比例极限的柔度值，称为压杆的极限柔度，也就是适用欧拉公式的最小柔度值。因此，只有压杆的柔度 $\lambda \geqslant \lambda_{\mathrm{p}}$ 时欧拉公式才适用，这类压杆称为大柔度杆或细长杆。λ_{p} 值取决于材料的力学性能，以低碳钢 Q235 为例，σ_{p} =200MPa，E=206GPa，代入式(9.17)得

$$\lambda_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 206 \times 10^9}{200 \times 10^6}} \approx 100$$

这表明用低碳钢 Q235 制成的压杆，仅在柔度 $\lambda \geqslant 100$ 时，才能应用欧拉公式计算其临界应力或临界压力。

9.3.3　临界应力的经验公式

工程中有许多压杆的柔度值比 λ_{p} 小，它们在应力超过比例极限 σ_{p} 的情况下失稳，它们的临界应力不能用欧拉公式计算，而应采用建立在试验基础上的经验公式来计算。常见的经验公式有直线公式和抛物线公式，其中直线公式比较简单，应用方便，其形式为

$$\sigma_{\mathrm{cr}} = a - b\lambda \tag{9.18}$$

式中，a 和 b 为与材料有关的常数，表 9.2 给出了几种材料的 a、b 值。

应用经验公式计算压杆的临界应力，不能超过压杆材料的压缩屈服极限应力，即要求

$$\sigma_{\mathrm{cr}} = a - b\lambda < \sigma_{\mathrm{s}} \quad 或 \quad \lambda > \frac{a - \sigma_{\mathrm{s}}}{b} \tag{9.19}$$

表 9.2　几种常见材料的直线公式系数 a 和 b 及柔度 λ_{s} 和 λ_{p}

材　料	a/MPa	b/MPa	λ_{p}	λ_{s}
Q235 钢	304	1.12	100	61.6
优质碳钢 $\sigma_{\mathrm{s}} = 306\mathrm{MPa}$	460	2.57	100	60
硅钢 $\sigma_{\mathrm{s}} = 353\mathrm{MPa}$	577	3.74	100	60
铬钼钢	980	5.30	55	40
硬铝	372	2.14	50	
铸铁	332	1.45	80	
木材	39	0.20	50	

令

$$\lambda_{\mathrm{s}} = \frac{a - \sigma_{\mathrm{s}}}{b} \tag{9.20}$$

λ_{s} 是对应于材料屈服极限时的柔度值。因此，当压杆的实际柔度 $\lambda > \lambda_{\mathrm{s}}$ 且 $\lambda < \lambda_{\mathrm{p}}$ 时，才能用经验公式计算其临界应力。可见，经验公式的适用范围为 $\lambda_{\mathrm{s}} < \lambda < \lambda_{\mathrm{p}}$，柔度在 λ_{s} ～ λ_{p} 之间的压杆为中等柔度杆或中长杆。

柔度值小于λ_s的压杆，称为小柔度杆或粗短杆。试验表明，对于塑性材料制成的粗短杆，当其临界应力达到屈服极限σ_s时，压杆发生屈服失效，这说明小柔度杆的失效是因为强度不足所致。因此，粗短杆的临界应力$\sigma_{cr}=\sigma_s$。

根据杆件柔度的大小，可以将压杆分为三类，并按不同方式确定其临界应力。细长杆，即$\lambda\geqslant\lambda_p$时，用欧拉公式计算临界应力；中长杆，即$\lambda_s<\lambda<\lambda_p$时，用经验公式计算临界应力；粗短杆，即$\lambda\leqslant\lambda_s$时，这类压杆一般不会失稳，只可能发生屈服或断裂，按强度问题处理。

塑性材料压杆的临界应力随其柔度变化的情况如图 9.9 所示，此图称为临界应力总图。从图中可以看出，粗短杆的临界应力与λ值无关；中长杆的临界应力大于比例极限，随λ值的增加而减小；细长杆的临界应力小于或等于比例极限σ_p。

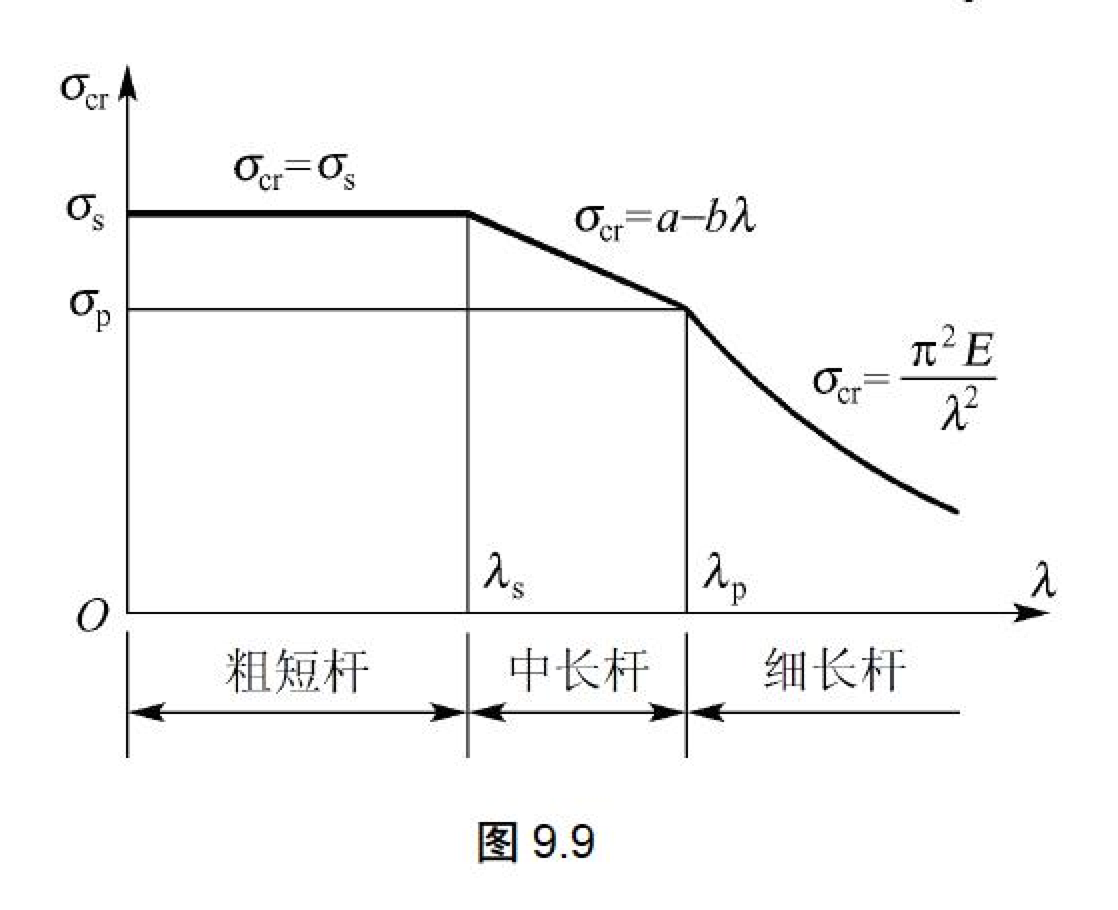


图 9.9

9.4 压杆的稳定计算

为了保证压杆的稳定性，必须使它所承受的轴向压力小于临界压力。此外，还要考虑必要的稳定性安全储备，使压杆具有足够的稳定性。因此，压杆的稳定条件为

$$F\leqslant\frac{F_{cr}}{[n]_{st}} \tag{9.21}$$

或

$$n=\frac{F_{cr}}{F}\geqslant[n]_{st} \tag{9.22}$$

式中，$[n]_{st}$为规定的稳定安全因数。n表示临界压力F_{cr}与工作压力的比值，称为压杆的工作稳定安全因数。

考虑到压杆的初曲率、载荷偏心、材料不均匀等因素对压杆临界压力的影响，所以规定稳定安全因数$[n]_{st}$的值应取大些。在静载荷下，对于钢材$[n]_{st}=1.8\sim3.0$；对于铸铁$[n]_{st}=4.5\sim5.5$；木材$[n]_{st}=2.5\sim3.5$。在实际工作中，应按照有关设计规范查取$[n]_{st}$值。

例 9.3 空气压缩机的活塞杆由 45 钢制成，两端可简化为铰支座，$\sigma_s=350\text{MPa}$，$\sigma_p=280\text{MPa}$，$E=210\text{GPa}$。长度$l=703\text{mm}$，直径$d=45\text{mm}$，最大工作压力$F=41.6\text{kN}$。

规定稳定安全因数$[n]_{st}$=8～10。试校核其稳定性。

解：由式(9.17)，求出

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{280 \times 10^6}} = 86$$

活塞杆两端可简化为铰支座，所以$\mu = 1$。活塞杆横截面为圆形，则

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4} = 11.25\text{mm}, \quad \lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 703 \times 10^{-3}}{11.25 \times 10^{-3}} = 62.5$$

由于$\lambda < \lambda_p$，所以不能用欧拉公式计算。由表 9.2 查得优质碳钢的$a = 460\text{MPa}$，$b = 2.57\text{MPa}$，代入式(9.20)

$$\lambda_s = \frac{a - 6s}{b} = \frac{460 - 350}{2.57} = 42.8$$

可见，活塞杆的柔度$\lambda_s < \lambda < \lambda_p$，是中等柔度杆，利用直线经验式(9.18)得

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = 460\text{MPa} - 2.57 \times 62.5\text{MPa} = 299.4\text{MPa}$$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = 299.4 \times 10^6 \times \frac{\pi}{4} \times (45 \times 10^{-3})^2 \text{N} = 4.76 \times 10^5 \text{N} = 476\text{kN}$$

活塞杆的工作稳定安全因数为

$$n = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{476}{41.6} = 11.4 \geqslant [n]_{st}$$

所以稳定性满足要求。

例 9.4　如图 9.10 所示托架，$\alpha = 30°$，承受载荷$P = 12\text{kN}$。已知 AB 杆的外径 D=50mm，内径 d=40mm，材料为 Q235 钢，弹性模量 E=200GPa，规定稳定安全因数$[n]_{st}$=3。试问 AB 杆是否稳定。

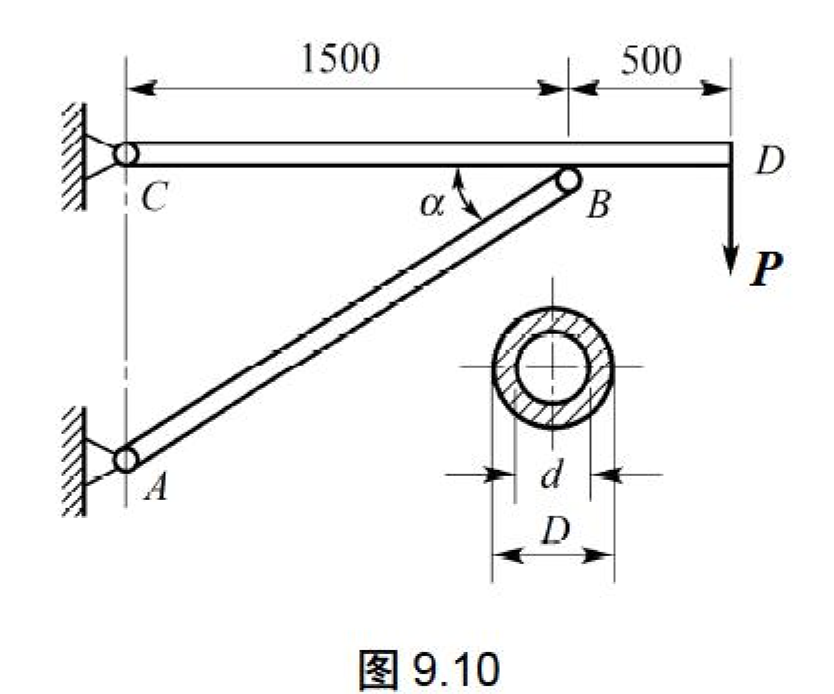


图 9.10

解　先取 CD 杆来分析，CD 杆在 B 点受到沿 AB 杆向上方向的力 F_{AB} 作用，D 点受到力 P 的作用，还有 C 点受力。列出 CD 杆关于 C 点的力矩平衡方程

$$\sum M_C = 0, \quad F_{AB} \times 1500 \sin\alpha - P \times 2000 = 0$$

解得

$$F_{AB} = 32\text{kN}$$

再考虑 AB 杆

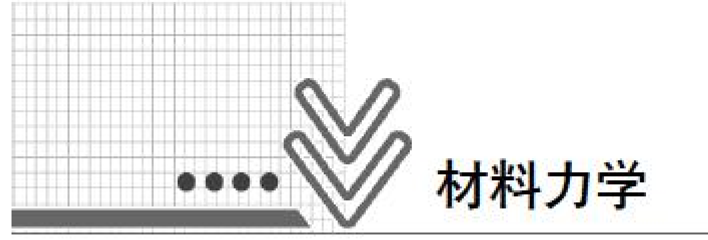
$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$$

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}(50^2 - 40^2)\text{mm}^2 = 707\text{mm}^2$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{1}{4}\sqrt{D^2 + d^2} = 16\text{mm}$$

AB 杆的长度为

$$l = \frac{CB}{\cos 30°} = 1732\text{mm}$$



AB 杆的柔度为

$$\lambda=\frac{\mu l}{i}=\frac{1\times 1732}{16}=108$$

由于柔度大于 λ_p，是细长杆，临界压力为

$$F_{cr}=\sigma_{cr}\cdot A=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\cdot A=\frac{\pi^2\times 200\times 10^9}{108^2}\times 707\times 10^{-6}\,\mathrm{N}=118\mathrm{kN}$$

AB 杆的稳定安全因数为

$$n=\frac{F_{cr}}{F}=\frac{118}{32}=3.69\geqslant [n]_{st}$$

所以 *AB* 杆是稳定的。

9.5　提高压杆稳定性的措施

由式(9.15)和式(9.18)可以看出，压杆的临界应力与压杆的柔度 λ 以及材料属性有关，而柔度取决于压杆的长度、约束情况和横截面的形状及尺寸等。因此，增大压杆的临界压力或临界应力，提高压杆的稳定性，可以采取以下措施。

1. 选择合理的截面形状

增大横截面的惯性矩可以增大截面的惯性半径，减小压杆的柔度 λ，以增大临界应力，从而提高压杆的稳定性。由于压杆一般在比较容易发生弯曲的平面内失稳，如果只增大截面某个方向的惯性矩，不一定能提高压杆的承载能力。如果各方向约束情况相同，设计压杆的横截面时应该尽量使 $I_y=I_z$，这样可以提高整个压杆的稳定性。另外，还可以把截面设计成空心的，如图 9.11 所示，可以增大横截面各个方向的惯性矩，以提高压杆的稳定性。

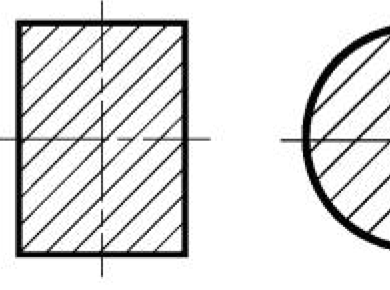
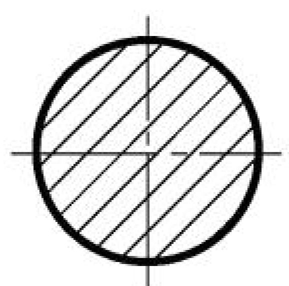
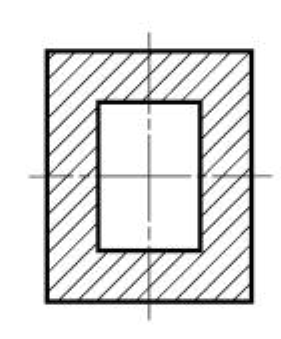
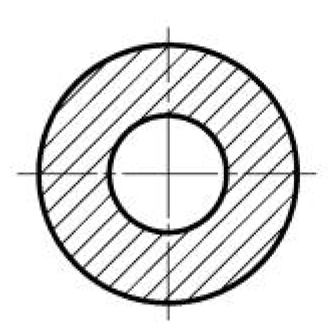





图 9.11

2. 改善压杆约束条件

杆端约束的刚性越好，压杆的 μ 值就越小，压杆的柔度 λ 值越小，整个压杆越稳定。例如，一些工程结构中的支柱，除两端要求焊接牢固外，还需要设置肘板以加固端部约束。

在条件允许的情况下，尽量减小压杆的实际长度，可以减小柔度 λ 值，从而提高压杆稳定性；否则可以采取增加中间支承的方法来减小压杆的支承长度。例如，为了提高穿孔机顶杆的稳定性，可在顶杆中点增加一个抱辊(见图 9.12)，以达到既不减小顶杆实际长度又提高了其稳定性的目的。

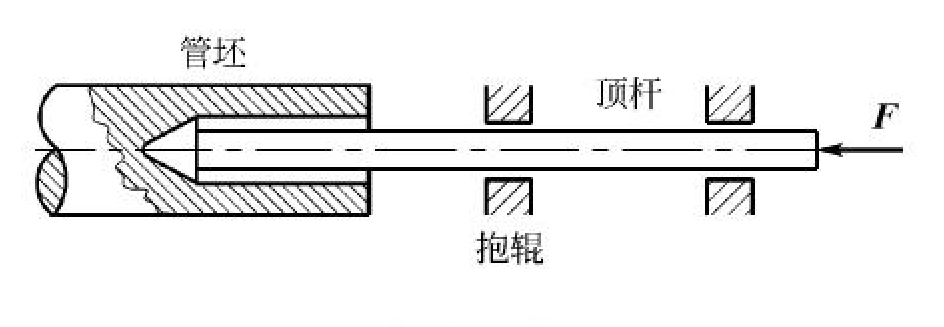


图 9.12

3. 合理选择材料

对于细长压杆，选用优质钢材以提高压杆的稳定性效果并不明显。从式(9.11)和式(9.15)可以看出，临界压力和临界应力与材料的弹性模量 E 成正比，但是优质钢材和普通钢材的弹性模量 E 值相差并不大。对于中长杆，选用优质钢材以提高压杆的稳定性效果比较明显。从式(9.18)可以看出，临界应力与材料的常数 a 和 b 值有关，优质钢材和普通钢材的 a 与 b 值相差比较大。对于粗短压杆，应按强度问题来处理，优质钢材的许用应力明显高于普通钢材，所以，选用优质钢材以提高粗短压杆的安全性效果明显。

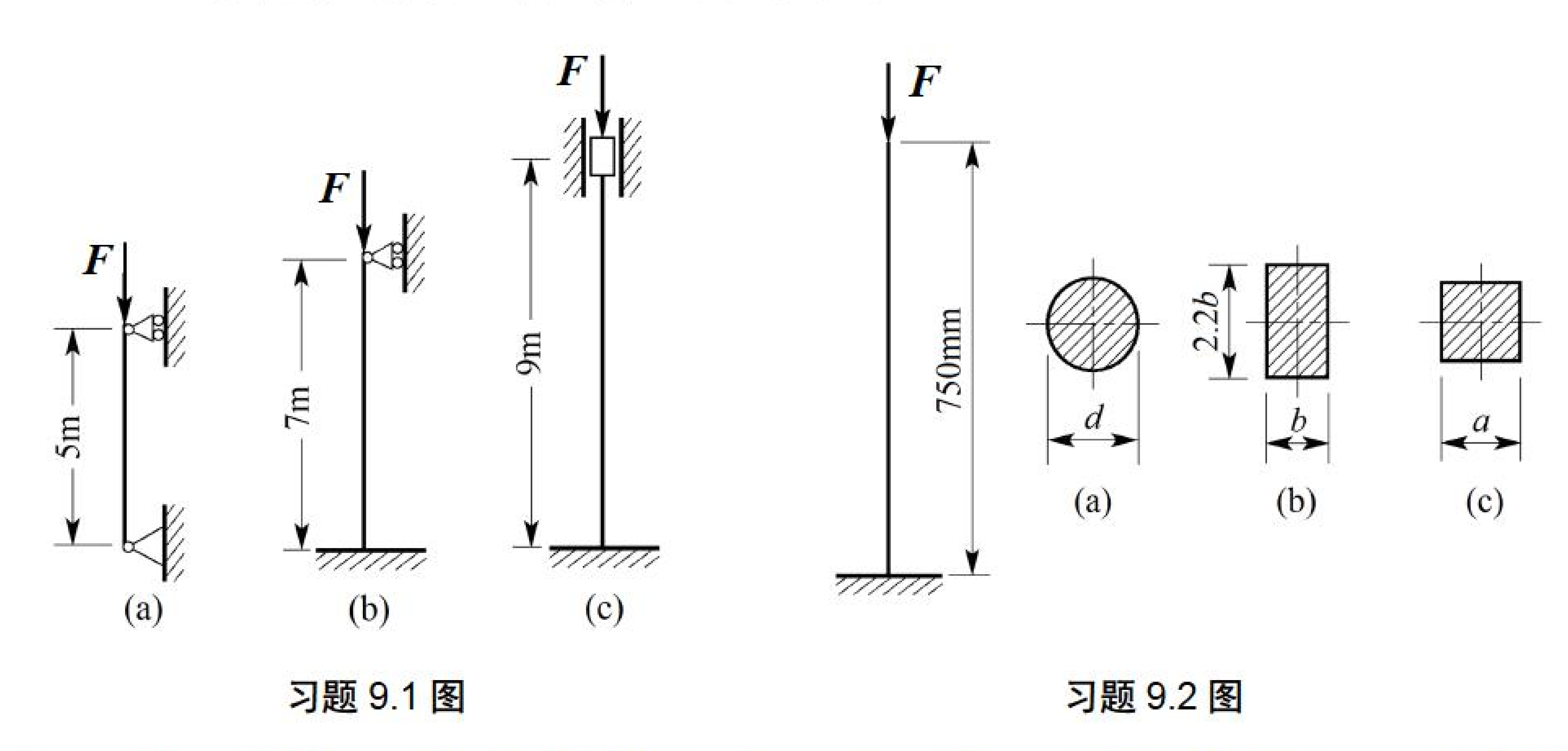
本章小结

压杆稳定性是指受压杆件保持原有直线平衡状态的能力；如果压杆丧失直线形状的平衡而变为曲线状态的平衡，称为失稳；压杆临界压力是压杆由稳定平衡到不稳定平衡的临界力值，压杆处于临界状态，为不稳定平衡。

提高压杆稳定性的措施主要有：①选择合理的截面形状；②改善压杆约束条件；③改善压杆约束条件。

习　　题

9.1　如习题 9.1 图所示的 3 根细长压杆，材料的弹性模量均为 $E = 200\text{GPa}$，直径均为 $d = 160\text{mm}$。试求各杆的临界压力，并比较其稳定性。



习题 9.1 图　　　　习题 9.2 图

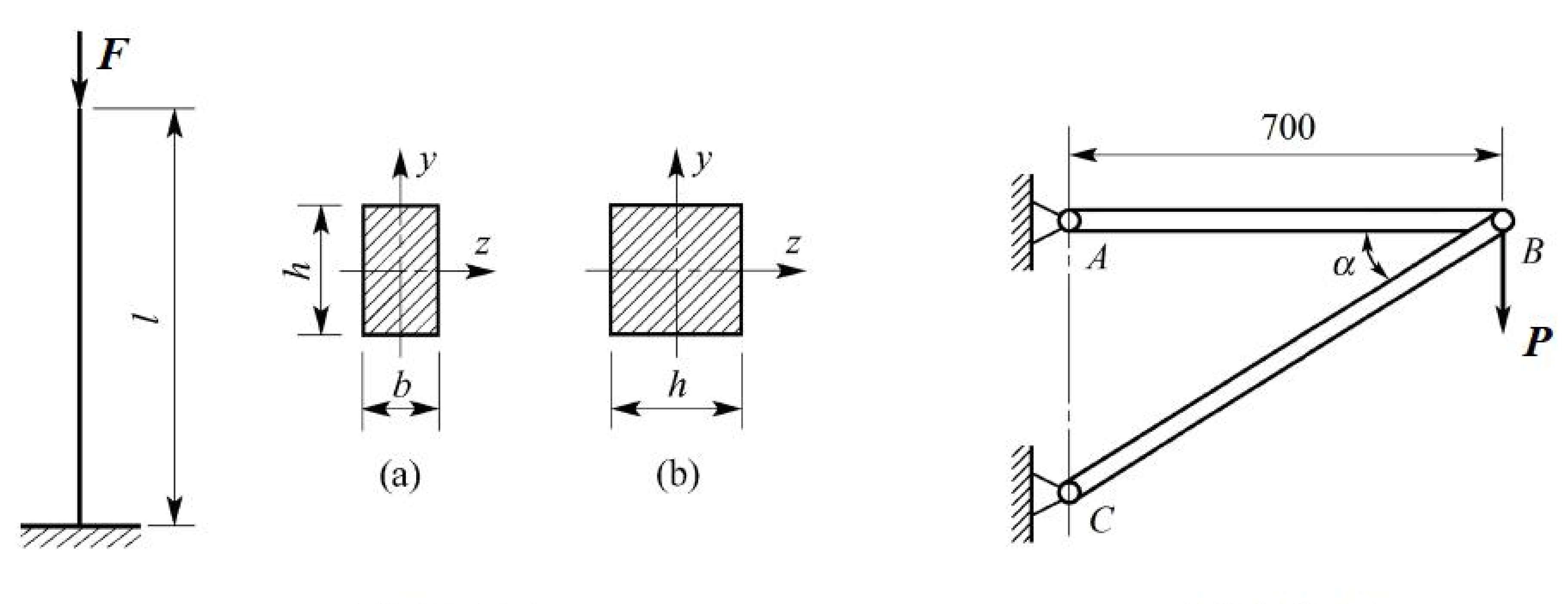
9.2　习题 9.2 图所示压杆分别有圆形、矩形和正方形 3 种形状的横截面，它们的材料

和约束条件等都相同，横截面面积均为 A=3600mm^2。试计算这 3 种情况压杆的柔度，并比较其稳定性。

9.3 对于两端铰支，由 Q235 钢制成的圆截面压杆，试问杆长 l 应是直径 d 的多少倍时，才能应用欧拉公式计算其临界压力？

9.4 矩形截面细长压杆如习题 9.4 图所示，$b/h = 1/2$。如果将 b 改为 h 后变成的正方形截面杆仍为细长杆，其临界压力将变成原来的多少倍？

9.5 如习题 9.5 图所示托架各杆均以圆柱形铰链连接和支承，$\alpha = 30°$，BC 杆直径 d=40mm，材料为 Q235 钢。试判定压杆 BC 的类型并确定此压杆临界应力的计算公式。



习题 9.4 图　　习题 9.5 图

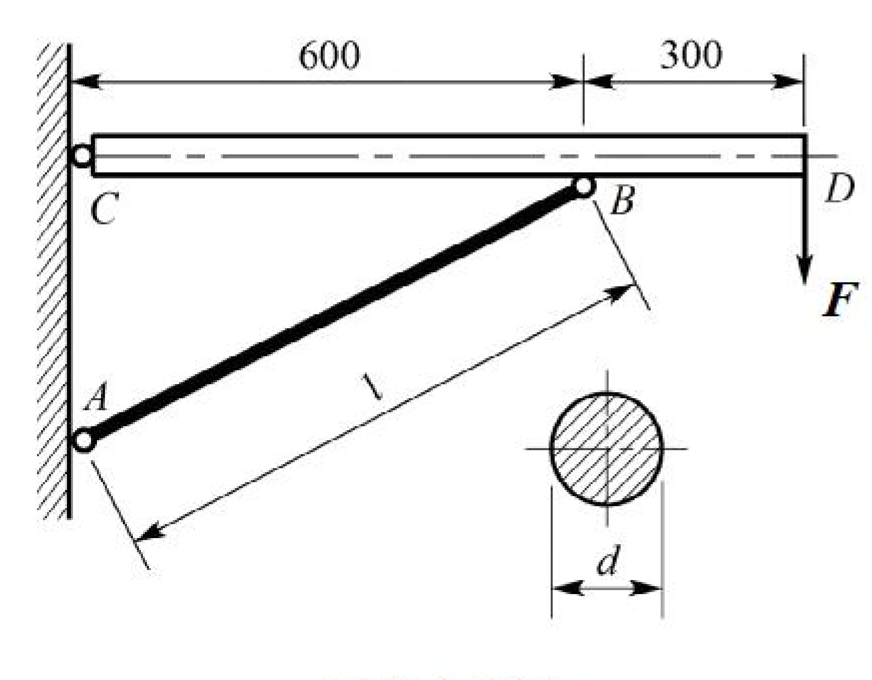
9.6 由 Q235 钢制成的 25a 工字钢压杆，两端为固定端约束，杆长 $l = 7\text{m}$，弹性模量 $E = 206\text{GPa}$，规定的稳定安全因数 $[n]_{st} = 2$。试求压杆所能承受的最大轴向压力。

9.7 柴油机的挺杆可简化为两端铰支杆，由 Q275 钢制成，长度为 $l = 25.7\text{cm}$，直径 $d = 8\text{mm}$，弹性模量 $E = 210\text{GPa}$，$\sigma_p = 240\text{MPa}$，挺杆承受的最大工作压力 $F = 1.76\text{kN}$，规定的稳定安全因数 $[n]_{st} = 3$。试校核该挺杆的稳定性。

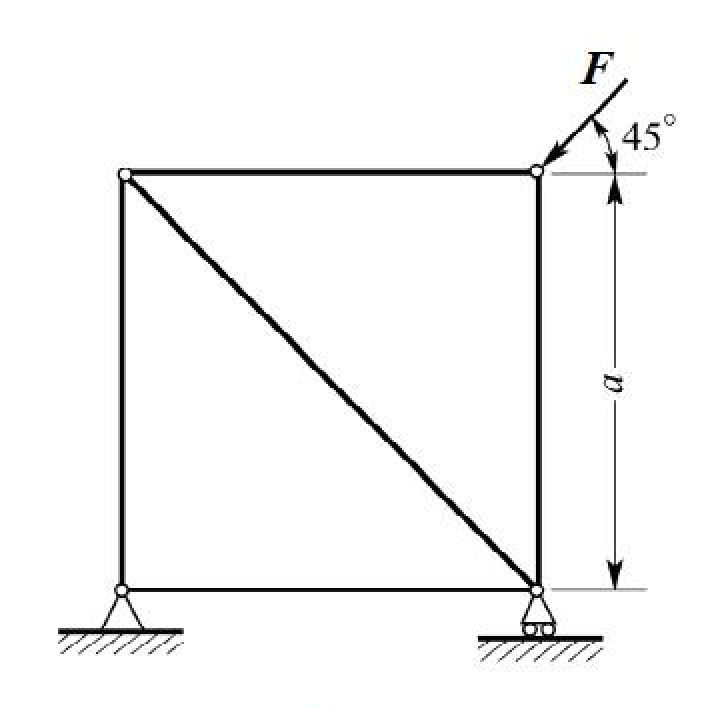
9.8 习题 9.8 图所示托架中，CD 为刚杆，且强度足够。AB 杆的长度 $l = 800\text{mm}$，直径 $d = 40\text{mm}$，材料为 Q235 钢，两端为铰支。

(1) 试求 AB 杆的临界压力 F_{cr}。

(2) 若已知托架的工作载荷 $F = 70\text{kN}$，并规定 AB 杆的稳定安全因数 $[n]_{st} = 2$，试问托架是否安全？



习题 9.8 图

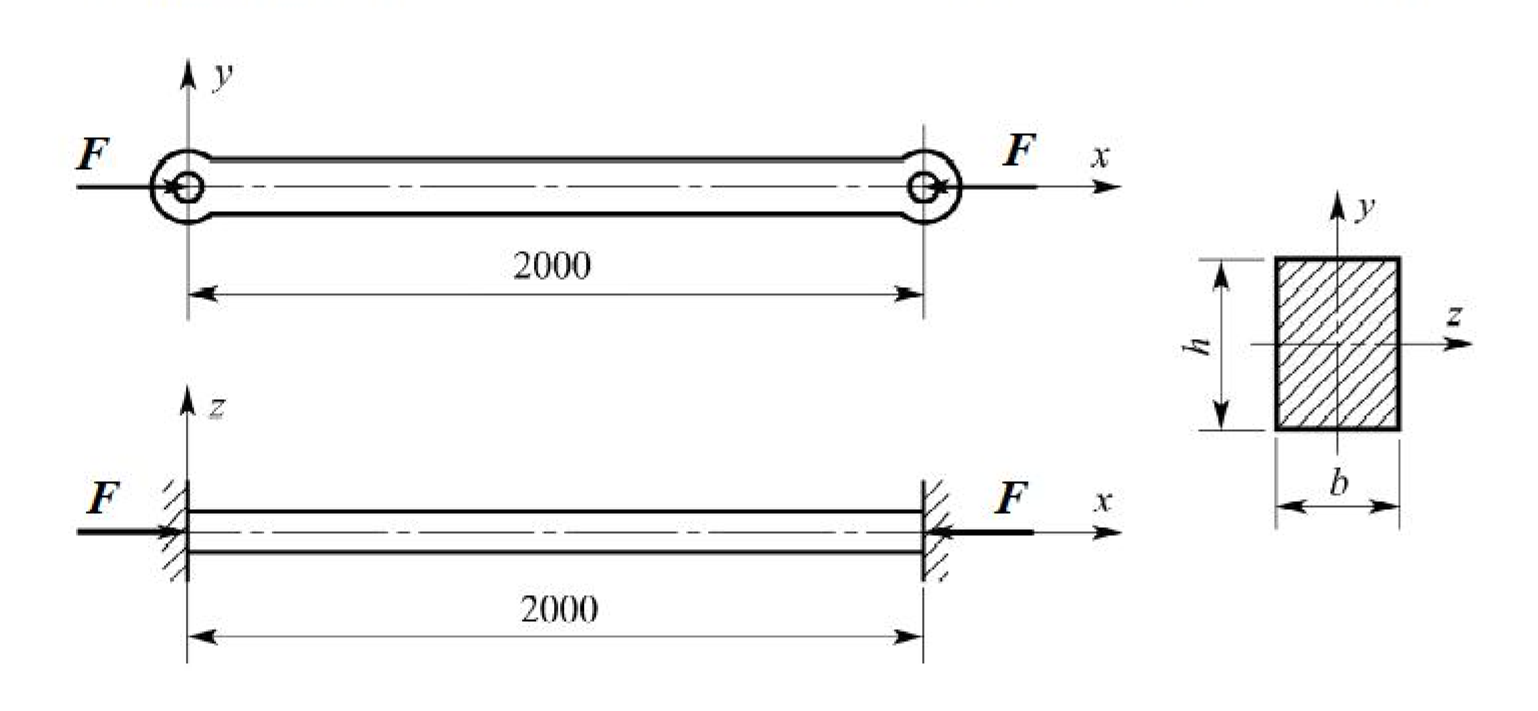


习题 9.9 图

9.9　习题 9.9 图所示正方形桁架由 5 根圆截面钢杆组成。已知各杆直径均为 $d=30\text{mm}$，$a=1\text{m}$，材料的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，许用应力 $[\sigma]=160\text{MPa}$，极限柔度 $\lambda_p=100$，规定的稳定安全因数 $[n]_{st}=3$。试求此结构的许可载荷 $[F]$。

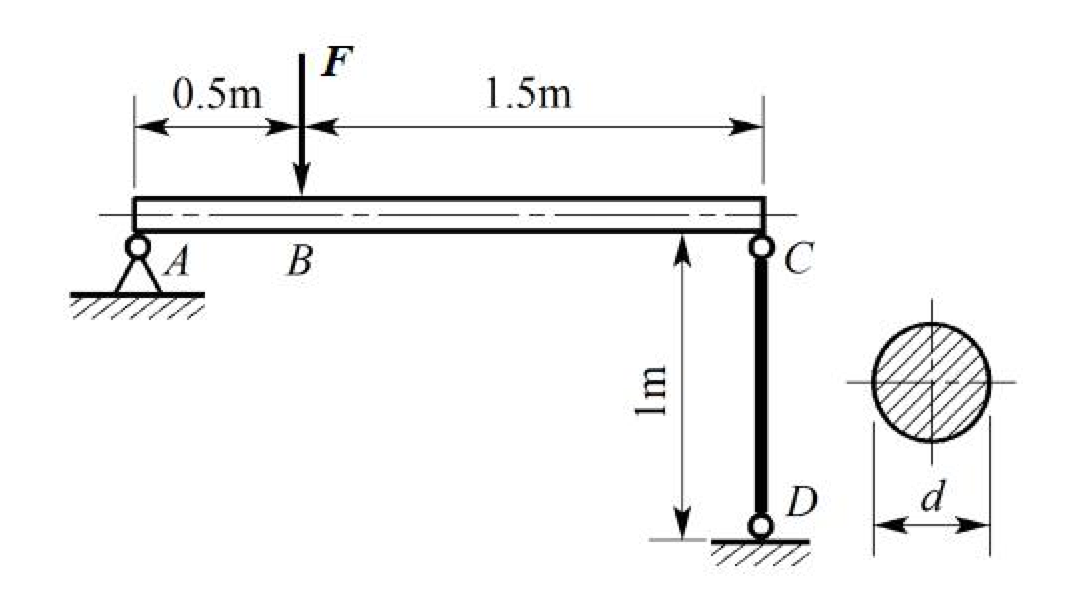
9.10　千斤顶螺杆的内径 $d=52\text{mm}$，长度为 $l=500\text{mm}$，材料为 Q235 钢。可认为螺杆下端固定，上端自由。若千斤顶最大工作压力 $F=150\text{kN}$，试求螺杆的工作稳定安全因数。

9.11　矩形截面压杆如习题 9.11 图所示，两端用柱形铰连接(在 xy 平面内弯曲时，两端为铰支；在 xz 平面内弯曲时，可视为两端固定)。压杆的材料为 Q235 钢，弹性模量 $E=200\text{GPa}$，横截面尺寸为 $b\times h=40\text{mm}\times 60\text{mm}$。试求压杆的临界压力。



习题 9.11 图

9.12　习题 9.12 图所示结构中，AC 为刚杆，且强度足够。CD 杆的材料为 Q235 钢，C、D 两处均为球铰。已知 $d=20\text{mm}$，材料的弹性模量 $E=200\text{GPa}$，$\sigma_p=200\text{MPa}$，规定的稳定安全因数 $[n]_{st}=3$。试确定该结构的许可载荷 $[F]$。



习题 9.12 图

第 10 章　动　载　荷

【本章学习重点】

本章重点学习应用动静法计算构件在匀加速直线运动或匀速转动的动应力和动变形，应用能量法计算构件受冲击作用时的动应力和动变形。

【本章学习目标】

- 理解动载荷、动荷因数、冲击韧性等概念。
- 会计算构件在匀加速直线运动或匀速转动的动应力和动变形。
- 会计算构件受冲击作用时的动应力和动变形。

10.1　概　　述

前几章讨论了杆件在静载荷作用下的强度和刚度问题。静载荷是指从零缓慢地增加到某一定值后保持不变且杆内各质点不产生加速度，或加速度很小可以忽略不计的载荷。杆件在静载荷作用下产生的应力和变形分别称为静应力和静变形。

若载荷使杆件内各质点产生的加速度较大，或者载荷随时间发生明显变化，则这样的载荷称为动载荷。例如，高速旋转的飞轮，由于向心加速度使其内部各质点产生很大的离心力，从而可能导致飞轮的破裂；涡轮机的长叶片由于旋转时的惯性力所引起的拉应力可以达到相当大的数值，可能使叶片被拉断而引发严重事故。当具有一定速度的物体冲击静止的杆件时，该物体的速度在很短的时间内发生急剧变化，产生很大的负值加速度，物体对静止的杆件施加很大的作用力。例如，气锤在锻造坯件时，由于锤头和锻坯这两个物体在碰撞瞬间所产生的冲击载荷，能使锤杆内的应力较静载荷应力有几倍甚至几十倍的增长。这种在动载荷作用下，杆件产生的应力和变形分别称为动应力和动变形。

试验结果表明，只要应力不超过材料的比例极限，胡克定律仍适用于动载荷下的应力和变形的计算，弹性模量也与静载荷下的数值相同。本章着重讨论构件有加速度时的应力计算和冲击载荷等问题。

10.2　用动静法求应力和变形

10.2.1　等加速直线运动时构件的应力计算

当构件各点的加速度为已知或可以求出时，可以采用动静法求解构件的动应力问题。先计算出运动构件的惯性力，然后可以将构件视为在主动力、约束力和惯性力作用下处于平衡。再利用静力学的方法就可以计算出构件的内力、应力及变形等，进而对构件的强度和刚度进行计算。

例如，设升降机启动时，以等加速度 a 起吊一重量为 P 的重物，如图 10.1(a)所示。已

知钢索横截面面积为 A，材料的密度为 ρ，求距离钢索下端为 x 的截面上的内力。

静止时，用截面法在距离钢索下端为 x 的截面 m—n 处截开(图 10.1(b))，截取部分受到轴向静内力 F_{Nst}、钢索的重力 $W=A\rho gx$ 以及重物的重力 $\boldsymbol{P}$ 作用而处于平衡。此时

$$F_{\text{Nst}}=P+A\rho gx$$

启动加速向上时，仍用截面法在距离钢索下端为 x 的截面 m—n 处截开(见图 10.1(c))，截取部分受到轴向动内力 F_{Nd}、钢索的重力 W、重物的重力 P 以及与加速度方向相反的钢索连同重物的惯性力 F_{I}。其中，惯性力 $F_{\text{I}}=\dfrac{P+A\rho gx}{g}a$。应用达朗贝尔原理，可以由静力学平衡方程来计算 m—n 截面上的动内力，即

$$F_{\text{Nd}}=P+W+F_{\text{I}}=P+A\rho gx+\frac{P+A\rho gx}{g}a=(P+A\rho gx)\left(1+\frac{a}{g}\right)$$

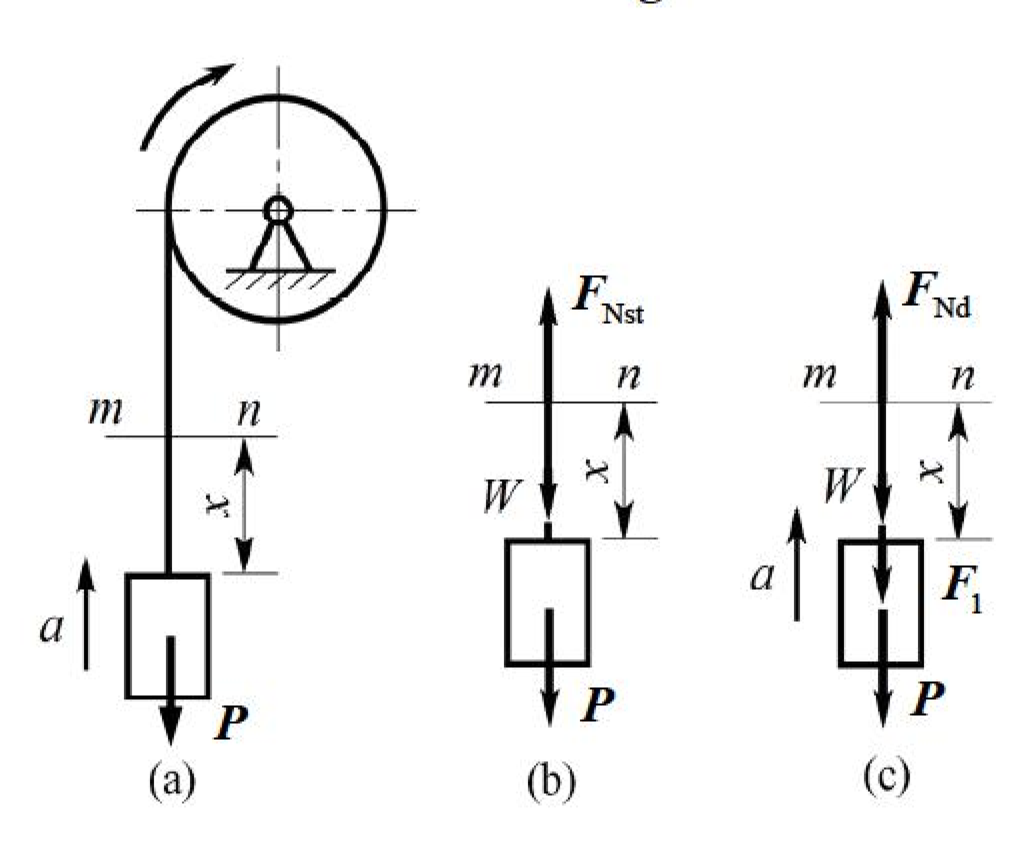


图 10.1

因为，$P+A\rho gx$ 为 m—n 截面上的静内力。所以有

$$F_{\text{Nd}}=F_{\text{Nst}}\left(1+\frac{a}{g}\right)=K_{\text{d}}F_{\text{Nst}} \tag{10.1}$$

式中，K_{d} 为动荷因数。

例 10.1　梁由钢索起吊，以等加速度 a 上升，如图 10.2(a)所示。已知梁的横截面面积为 A，抗弯截面系数为 W_z，材料的密度为 ρ。求梁中点处横截面上的最大动应力。

解：(1) 受力分析。吊车以等加速度 a 起吊时，梁除了受自重(载荷集度为 $q_{\text{st}}=A\rho g$)和钢索的拉力外，还需要附加惯性力，惯性力的集度为 $q_{\text{I}}=\dfrac{q_{\text{st}}a}{g}=A\rho a$。在这些力的共同作用下，梁处于假想的平衡状态。于是，图 10.2(b)所示梁的载荷集度为

$$q=q_{\text{st}}+q_{\text{I}}=q_{\text{st}}\left(1+\frac{a}{g}\right)=A\rho g\left(1+\frac{a}{g}\right)$$

钢索起吊的拉力为

$$F=\frac{1}{2}ql=\frac{1}{2}q_{\text{st}}\left(1+\frac{a}{g}\right)l=\frac{1}{2}A\rho g\left(1+\frac{a}{g}\right)l$$

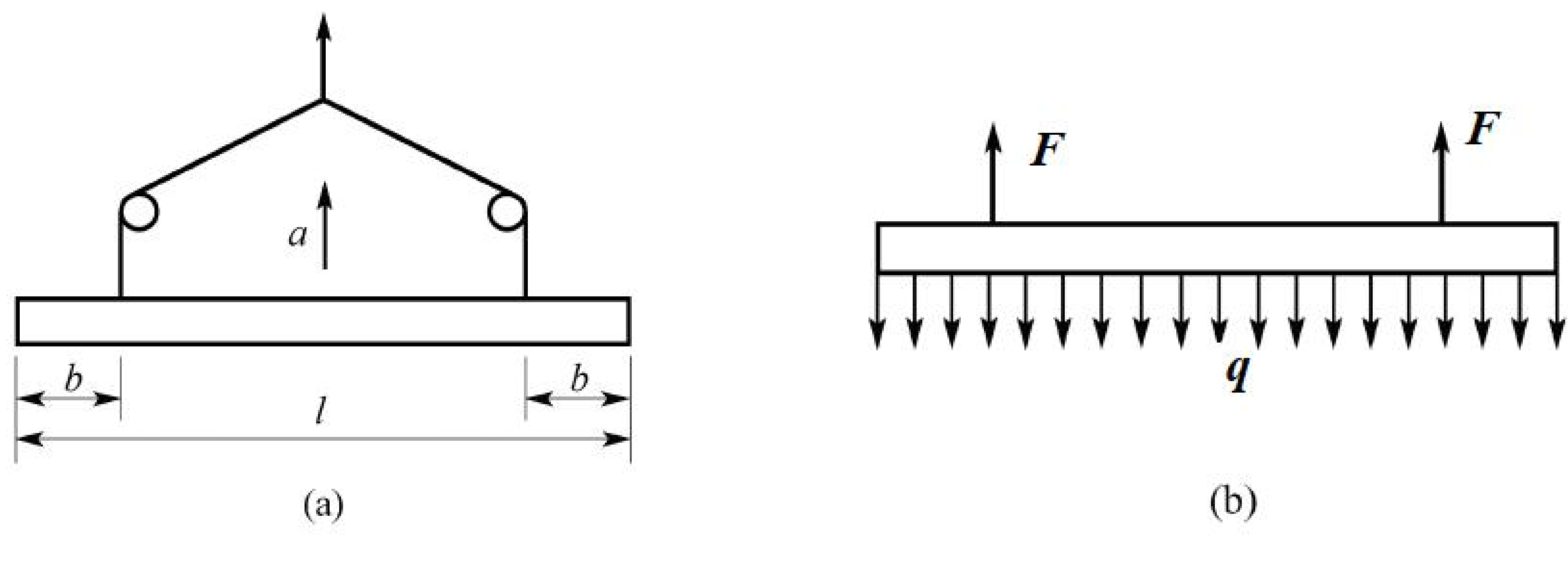


图 10.2

(2) 计算内力。梁中点处横截面上的弯矩为

$$M = F\left(\frac{l}{2}-b\right)-\frac{1}{2}q\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{1}{2}A\rho g\left(1+\frac{a}{g}\right)\left(\frac{l}{4}-b\right)l$$

(3) 计算梁中点处横截面上的最大动应力。梁中点处横截面上的最大动应力为

$$\sigma_{\mathrm{d}}=\frac{M}{W_z}=\frac{A\rho g}{2W_z}\left(1+\frac{a}{g}\right)\left(\frac{l}{4}-b\right)l$$

当加速度等于零时，由上式求得杆件在静载下的应力为

$$\sigma_{\mathrm{st}}=\frac{A\rho g}{2W_z}\left(\frac{l}{4}-b\right)l$$

故梁中点处横截面上的最大动应力 σ_{d} 可以表示为

$$\sigma_{\mathrm{d}}=\sigma_{\mathrm{st}}\left(1+\frac{a}{g}\right)$$

式中，括号里的即为动荷因数，记为

$$K_{\mathrm{d}}=1+\frac{a}{g}$$

于是可写成

$$\sigma_{\mathrm{d}}=K_{\mathrm{d}}\sigma_{\mathrm{st}}$$

这表明动应力等于静应力乘以动荷因数。强度条件可以表示为

$$\sigma_{\mathrm{d}}=K_{\mathrm{d}}\sigma_{\mathrm{st}}\leqslant[\sigma]$$

式中，$[\sigma]$ 为静载荷时的许用应力。

10.2.2 等角速度转动时构件的应力计算

工程中除了做等加速直线运动的构件外，还有许多构件做等角速度转动，如装在蒸汽机和内燃机上的飞轮。设计飞轮时，要求用料少而惯性大，因而飞轮的式样常做成轮缘厚中间薄，甚至中间只有几条轮辐的形状，如图 10.3(a)所示。现分析飞轮以等角速度转动时轮缘横截面上的应力。

设飞轮的平均半径为 R，轮缘的横截面面积为 A，材料密度为 ρ，飞轮转动的角速度为 ω。

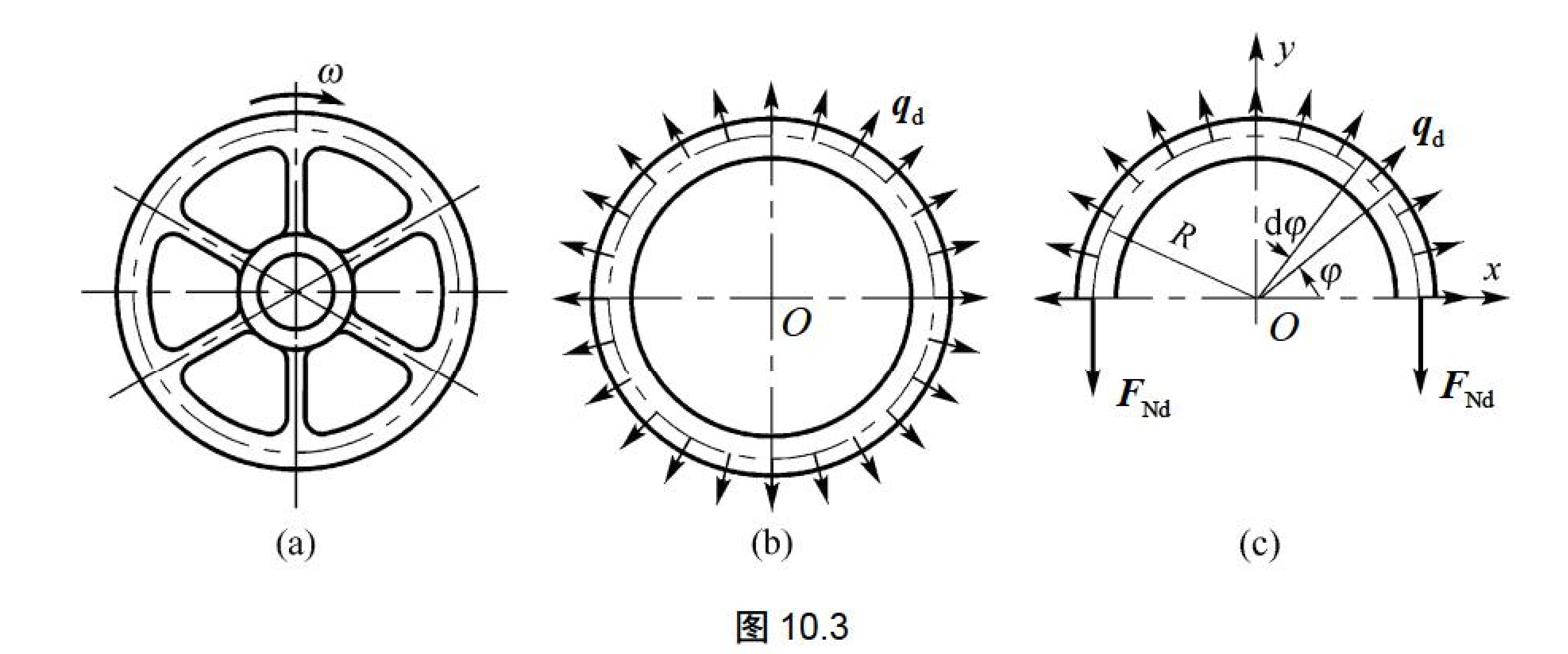


图 10.3

若不计轮辐对于轮缘的影响，可将飞轮简化为一个绕中心转动的圆环，如图 10.3(b)所示。由于此圆环做等角速度转动，因而圆环内各点只有向心加速度。又因飞轮的轮缘厚度远比飞轮的平均半径小，所以可以认为圆环上各点的向心加速度与圆环轴线上各点的向心加速度相等，即 $a_n = \omega^2 R$。根据动静法，将集度为 $q_d = A\rho a_n = A\rho\omega^2 R$ 的离心惯性力加在圆环轴线上，就可根据平衡条件进行计算。

用截面法把轮缘对称截开，保留上半部分(图 10.3(c))，并用 σ_d 表示截面上的拉应力。

由静力学平衡条件 $\sum F_y = 0$，得

$$\int_0^{\pi} q_d R \sin\varphi \mathrm{d}\varphi - 2A\sigma_d = 0$$

经过积分并简化，得

$$q_d R = A\sigma_d$$

将 q_d 值代入上式，得

$$\sigma_d = \rho\omega^2 R^2 = \rho v^2$$

式中，v 为飞轮在半径 R 处的切向线速度。根据强度条件，为了保证飞轮安全，必须使

$$\sigma_d = \rho v^2 \leqslant [\sigma]$$

所以

$$v \leqslant \sqrt{\frac{[\sigma]}{\rho}} \tag{10.2}$$

由此可见，对飞轮的转速应该有一定的限制。允许飞轮的最大切向线速度为 v，取决于材料的许用应力和材料的密度为 ρ，而与飞轮的直径以及轮缘的截面尺寸无关。

例 10.2　图 10.4 所示为一装有飞轮的轴，已知飞轮的半径 $R = 250\text{mm}$，重 P=450N，轴的直径 $d = 50\text{mm}$，轴的转速 $n = 5\text{r/s}$。试求：当轴在 10s 内制动时轴内由于惯性而产生的最大切应力。

解：轴在 10s 制动时，飞轮与轴同时做匀减速转动，其角加速度为

$$\alpha = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t} = \frac{0 - 2\pi n}{t} = \frac{-2\pi \times 5}{10} = -\pi(\text{rad/s}^2)$$

负号表示 α 的方向与 ω 的方向相反。由动静法，在飞轮上附加惯性力矩 M_d (其方向与

α 相反)为

$$M_{\mathrm{d}}=-J\alpha$$

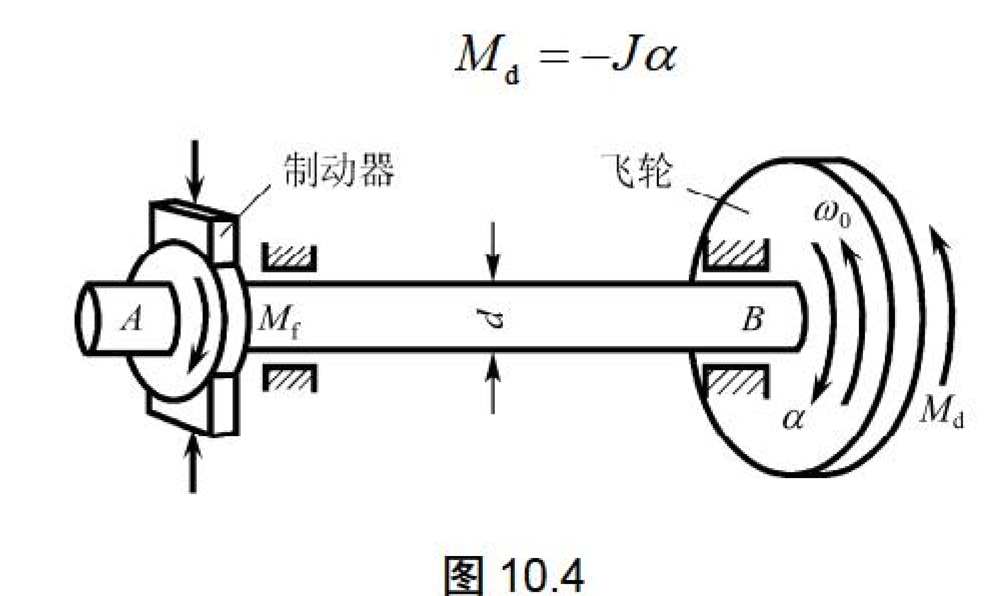


图 10.4

式中，J 为飞轮的转动惯量，其值为

$$J=\frac{P}{g}R^2=\frac{450}{9.8}\times0.25^2\,\mathrm{kg\cdot m^2}$$

制动器所产生的摩擦力偶矩与惯性力矩 M_{d} 平衡，从而使轴发生扭转变形。所以轴内最大扭转切应力为

$$\tau_{\max}=\frac{M_{\mathrm{d}}}{W_{\mathrm{t}}}=\frac{J\alpha}{\frac{\pi d^3}{16}}=\frac{\frac{450}{9.8}\times0.25^2\times\pi}{\frac{\pi(0.05)^3}{16}}\mathrm{Pa}=367.5\times10^3\,\mathrm{Pa}$$

10.3　杆件受冲击时的应力和变形

工程实际中，经常遇到冲击载荷，如气锤锻造、金属的冲压加工以及传动轴的突然制动等。气锤、高速转动的飞轮等为冲击物，而锻件和固接飞轮的轴则是承受冲击的构件。由于冲击物对被冲击构件冲击的持续时间很短，冲击时间不易准确测定，而且接触区域内的应力状态很复杂，所以不能采用动静法来计算冲击时的应力。但是，可以用能量法来近似地计算冲击时的变形，然后根据变形求出应力。

采用能量法计算动应力时假定：①不计冲击物的变形(将冲击物视为刚体)，且冲击物与被冲击物接触后不回弹；②被冲击物是弹性变形体，材料服从胡克定律，被冲击物的质量与冲击物相比很小，可略去不计；③冲击过程中，冲击物的机械能将全部转化为被冲击物的应变能，不考虑其他能量(如热能、声能和光能等)的损耗。

以杆件的轴向冲击为例。如图 10.5 所示，设有一弹性杆 AB 长为 l，横截面面积为 A，弹性模量为 E，受到质量为 P 的冲击物从高为 h 的地方自由下落的冲击作用。杆件受到冲击后变形值为 δ_{d}，它所受的冲击载荷最终值为 F_{d}。

在冲击过程中，重力所做的功为

$$W=P(h+\delta_{\mathrm{d}}) \tag{10.3}$$

杆件材料服从胡克定律时，$\delta_{\mathrm{d}}=\dfrac{F_{\mathrm{d}}l}{EA}$，杆件的应变能为

$$V_{\varepsilon\mathrm{d}}=\frac{1}{2}F_{\mathrm{d}}\delta_{\mathrm{d}}=\frac{EA}{2l}\delta_{\mathrm{d}}^2$$

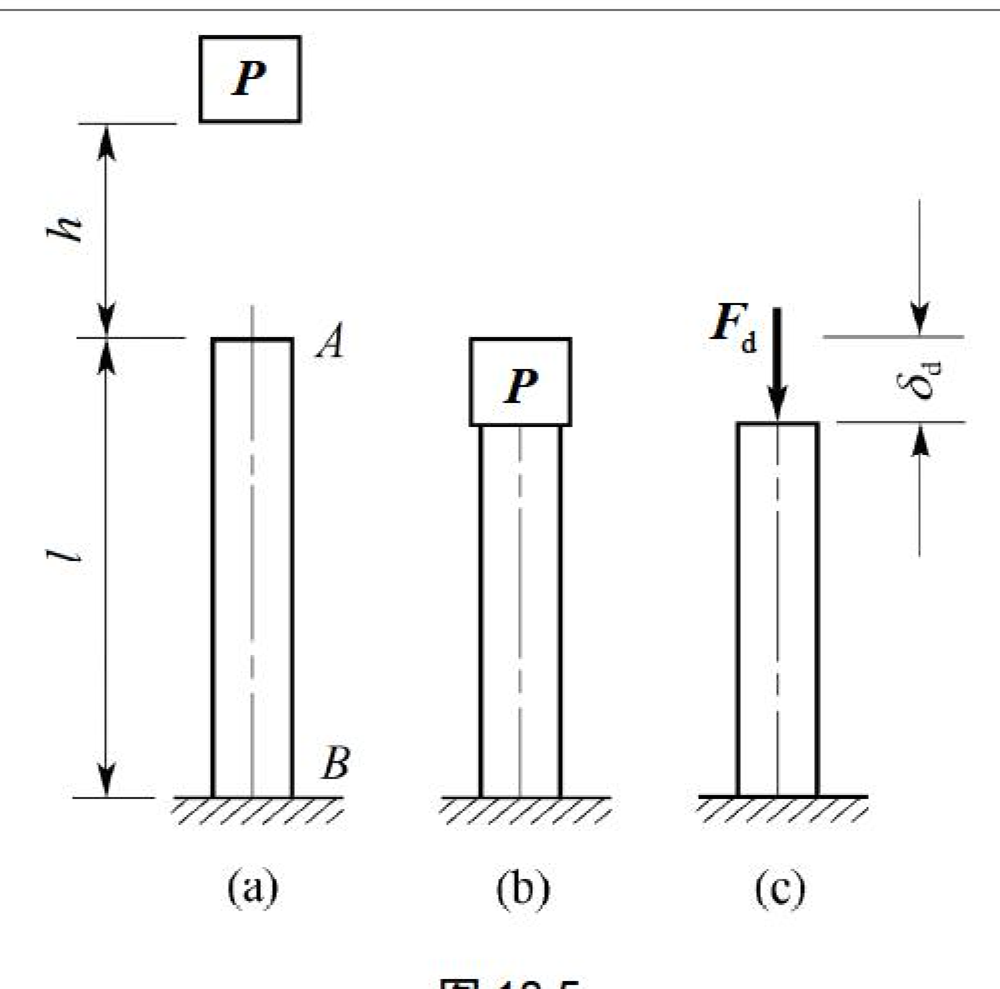


图 10.5

因不计其他能量损失，故重力所做的功全部转化为杆件的应变能，即 $W = V_{\varepsilon d}$，得

$$P(h+\delta_d) = \frac{EA}{2l}\delta_d^2$$

经移项整理后得到

$$\delta_d^2 - 2\frac{Pl}{EA}\delta_d - 2h\frac{Pl}{EA} = 0$$

或

$$\delta_d^2 - 2\delta_{st}\delta_d - 2h\delta_{st} = 0$$

式中，$\delta_{st} = \dfrac{Pl}{EA}$ 为杆件在静载荷 P 作用下的静变形。

从上式解得

$$\delta_d = \delta_{st}\left[1 \pm \sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{st}}}\right]$$

因 δ_d 应大于 δ_{st}，故式中根号前应取正号，即

$$\delta_d = \delta_{st}\left[1 + \sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{st}}}\right]$$

令 $K_d = 1+\sqrt{1+\dfrac{2h}{\delta_{st}}}$，$K_d$ 为自由落体冲击时的动荷因数。

杆件的冲击应力为

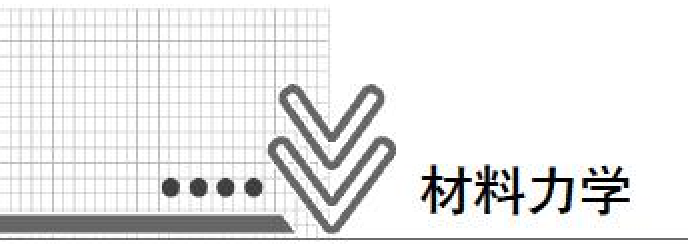
$$\sigma_d = K_d\sigma_{st} \tag{10.4}$$

当自由落体的高度 $h=0$ 时，即为突加载荷时，动荷因数为

$$K_d = 1+\sqrt{1+0} = 2$$

当自由落体的高度很大，即 $\dfrac{2h}{\delta_{st}} >> 1$ 时，动荷因数可以近似地写成

$$K_d = \sqrt{\frac{2h}{\delta_{st}}}$$



例 10.3 若例 10.2 中的飞轮轴 AB 在 A 端突然刹车(即 A 端突然停止转动)，设材料的切变模量 G=80GPa，轴的长度 l=1m。试求轴内的最大动应力。

解：当 A 端突然刹车时，B 端飞轮具有动能，所以 AB 轴受到冲击，发生扭转变形。冲击过程中，飞轮的角速度最后降为零，动能 T 全部转变为轴的扭转应变能。飞轮动能的变化为

$$\Delta T=\frac{1}{2}J\omega^2$$

轴的扭转应变能为

$$V_\varepsilon=\frac{T_{\mathrm{d}}^2 l}{2GI_{\mathrm{p}}}$$

令 $\Delta T=V_{\varepsilon\mathrm{d}}$，得扭矩

$$T_{\mathrm{d}}=\omega\sqrt{\frac{JGI_{\mathrm{p}}}{l}}$$

轴内的最大冲击切应力为

$$\tau_{\mathrm{dmax}}=\frac{T_{\mathrm{d}}}{W_{\mathrm{t}}}=\omega\sqrt{\frac{JGI_{\mathrm{p}}}{lW_{\mathrm{t}}^2}}$$

对于圆轴，有

$$\frac{I_{\mathrm{p}}}{W_{\mathrm{t}}^2}=\frac{\pi d^4}{32}\times\left(\frac{16}{\pi d^3}\right)^2=\frac{2}{\dfrac{\pi d^2}{4}}=\frac{2}{A}$$

于是

$$\tau_{\mathrm{dmax}}=\omega\sqrt{\frac{2GJ}{Al}}$$

可见扭转冲击时，轴内最大动应力 τ_{dmax} 与轴的体积 Al 有关。体积 Al 越大，τ_{dmax} 越小。将已知的数据代入上式，得

$$\begin{aligned}\tau_{\mathrm{dmax}}&=10\pi\sqrt{\frac{2\times80\times10^9\times\dfrac{450}{9.8}\times0.25^2}{\pi\times0.025^2\times1}}\mathrm{Pa}\\&=480\times10^6\,\mathrm{Pa}=480\mathrm{MPa}\end{aligned}$$

例 10.4 如图 10.6 所示，重力为 P 的重物在高 h 处自由落下，冲击梁的中点。设梁的弹性模量 E、惯性矩 I 和抗弯截面系数 W_z 均为已知，试求梁内的最大正应力和梁中点的挠度。

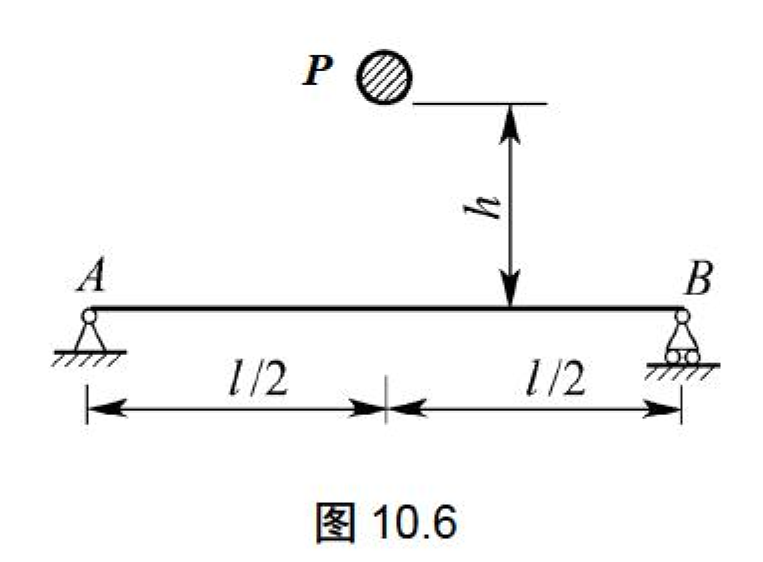


图 10.6

解：重物以静载荷方式作用在梁上时，根据梁的弯曲变形，可以求出梁中点的静位移为

$$\delta_{st}=\frac{Pl^3}{48EI}$$

梁内最大静应力为

$$\sigma_{st}=\frac{Pl}{4W_z}$$

动荷因数为

$$K_d=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{st}}}=1+\sqrt{1+\frac{96hEI}{Pl^3}}$$

最大冲击应力为

$$\sigma_d=K_d\sigma_{st}=\frac{Pl}{4W_z}\left[1+\sqrt{1+\frac{96hEI}{Pl^3}}\right]$$

梁中点的最大挠度为

$$\delta_d=K_d\delta_{st}=\frac{Pl^3}{48EI}\left[1+\sqrt{1+\frac{96hEI}{Pl^3}}\right]$$

例 10.5　如图 10.7 所示，等截面刚架的抗弯刚度为 EI，抗弯截面系数为 W，重物 P 自由下落冲击在刚架的 C 点处，求刚架内的最大正应力(不计轴力的影响)。

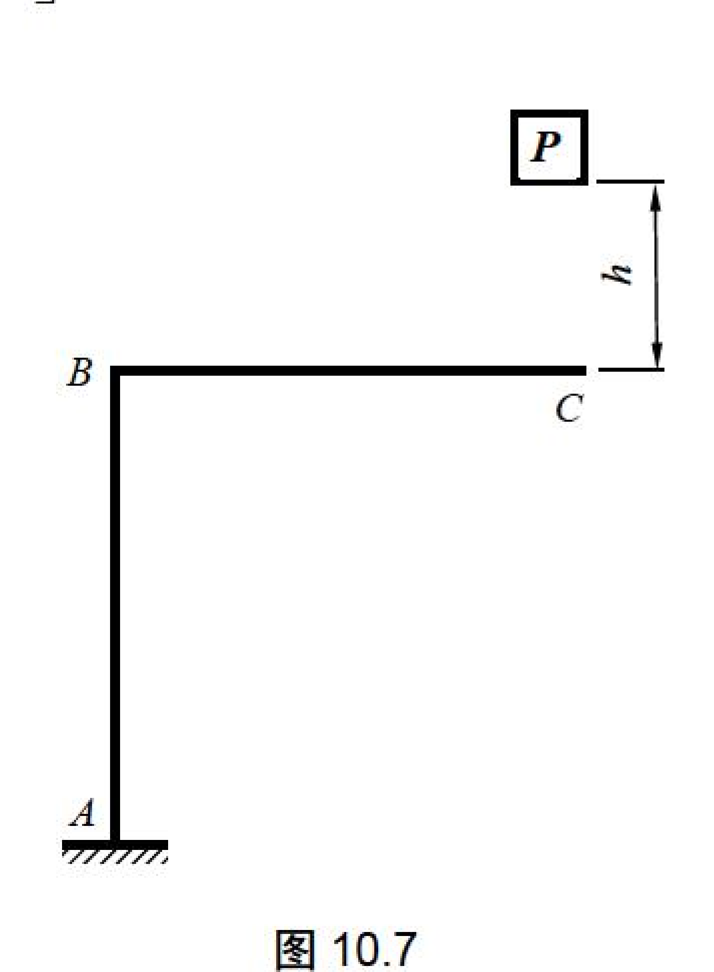


图 10.7

解：重物以静载荷方式作用在刚架上时，根据刚架的弯曲变形，可以求出刚架 C 点处的静位移为

$$\delta_{st}=\frac{4Pa^3}{3EI}$$

动荷因数为

$$K_d=1+\sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{st}}}$$
$$=1+\sqrt{1+\frac{3EIh}{2Pa^3}}$$

刚架内的最大静应力为

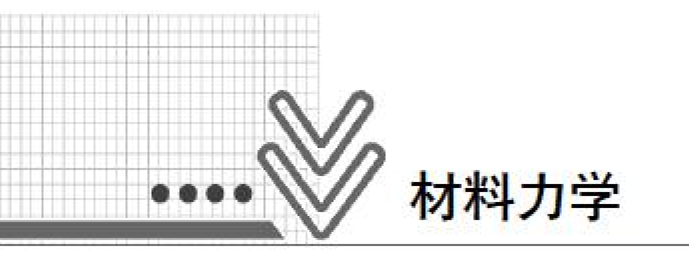
$$\sigma_{st\max}=\frac{Pa}{W}$$

刚架内的最大冲击应力为

$$\sigma_{d\max}=K_d\sigma_{st\max}=\left(1+\sqrt{1+\frac{3EIh}{2Pa^3}}\right)\frac{Pa}{W}$$

10.4　冲击韧性

工程上衡量材料抗冲击能力的标准是冲断试样所需能量的多少。试验时，将带有切槽



的弯曲试样放在试验机的支架上，并使切槽位于受拉的一侧(图 10.8)。当重摆从一定高度自由落下将试样冲断时，试样所吸收的能量等于重摆所做的功 W。用试样在切槽处的最小横截面面积 A 除 W，得

$$\alpha_k = \frac{W}{A} \tag{10.5}$$

式中，α_k 为冲击韧性(J/mm^2)。α_k 越大表示材料抗冲击的能力越强。一般来说，塑性材料的抗冲击能力远高于脆性材料。例如，低碳钢的冲击韧性就远高于铸铁。冲击韧性也是材料的性能指标之一。某些工程问题中，对冲击韧性的要求一般有具体规定。

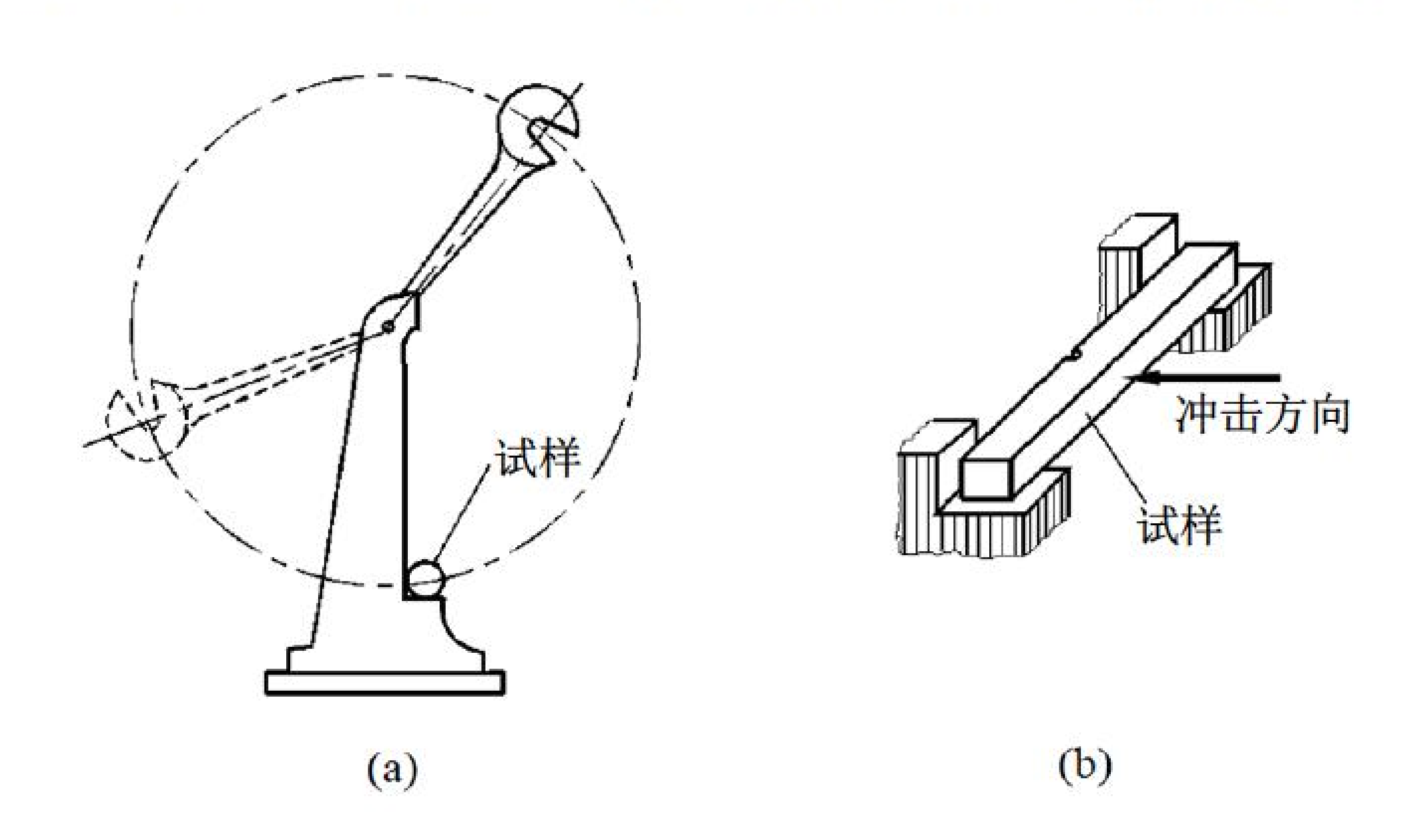


图 10.8

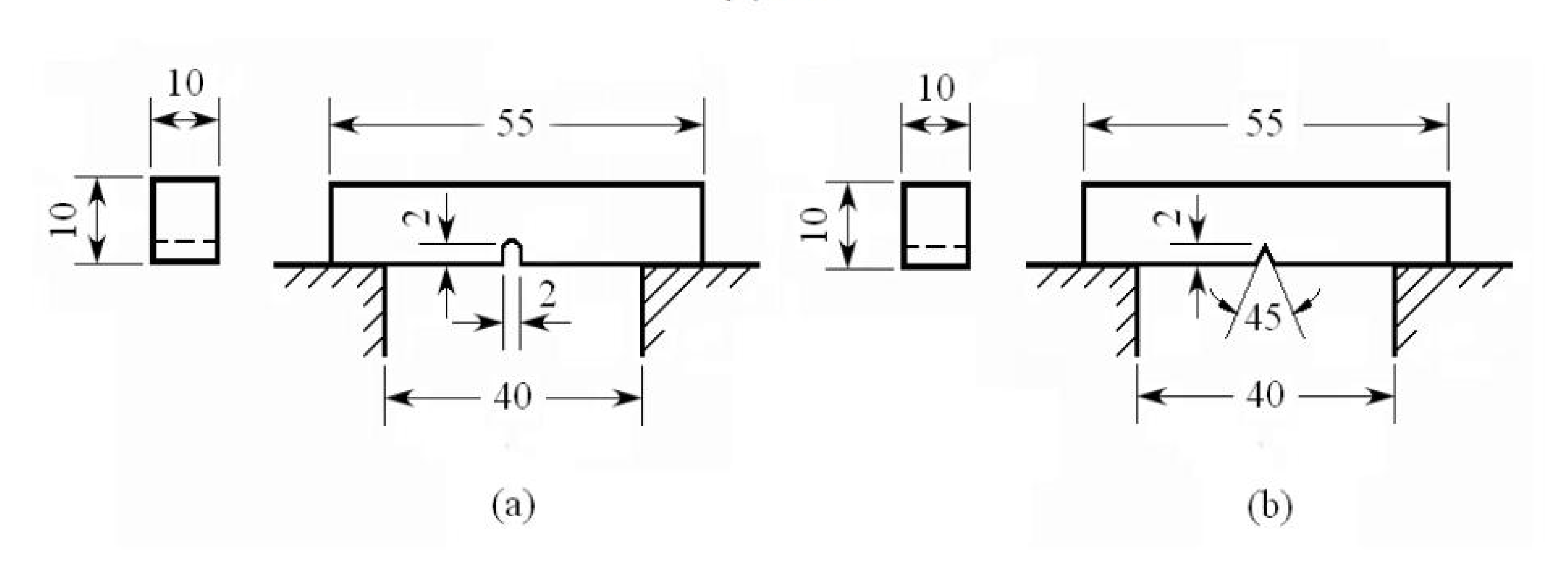


图 10.9

α_k 的数值与试样的尺寸、形状、支承条件等因素有关，所以它是衡量材料抗冲击能力的一个相对指标。为了便于比较，测定 α_k 时应采用标准试样。我国通用的标准试样是两端简支的弯曲试样(见图 10.9(a))，试样中央开有半圆形切槽，称为 U 形切槽试样。为避免材料不均匀和切槽不准确，试验时每组不应少于 4 根试样。试样上开切槽是为了使切槽区域高度应力集中，这样切槽附近区域内便集中吸收了较多的能量。切槽底部越尖锐就越能体现上述要求。所以有时采用 V 形切槽试样，如图 10.9(b)所示。

试验结果表明，α_k 的数值随温度的降低而减小。在图 10.10 中，若纵轴代表试样冲断时吸收的能量，低碳钢的 α_k 随温度的变化情况如图中实线所示。图线表明，随着温度的降低，在某一狭窄的温度区间内，α_k 的数值骤然下降，材料变脆，这就是冷脆现象。使

α_k 骤然下降的温度称为转变温度。试样冲断后，断面的部分面积呈晶粒状，是脆性断口；另一部分面积呈纤维状，是塑性断口。V 形切槽试样应力集中程度较高，因而断口分区比较明显。用一组 V 形切槽试样在不同温度下进行试验，晶粒状断口面积占整个断面面积的百分比随温度降低而升高，如图 10.10 中的虚线所示。一般把晶粒状断口面积占整个断面面积的 50%时的温度规定为转变温度，并称为 FATT。

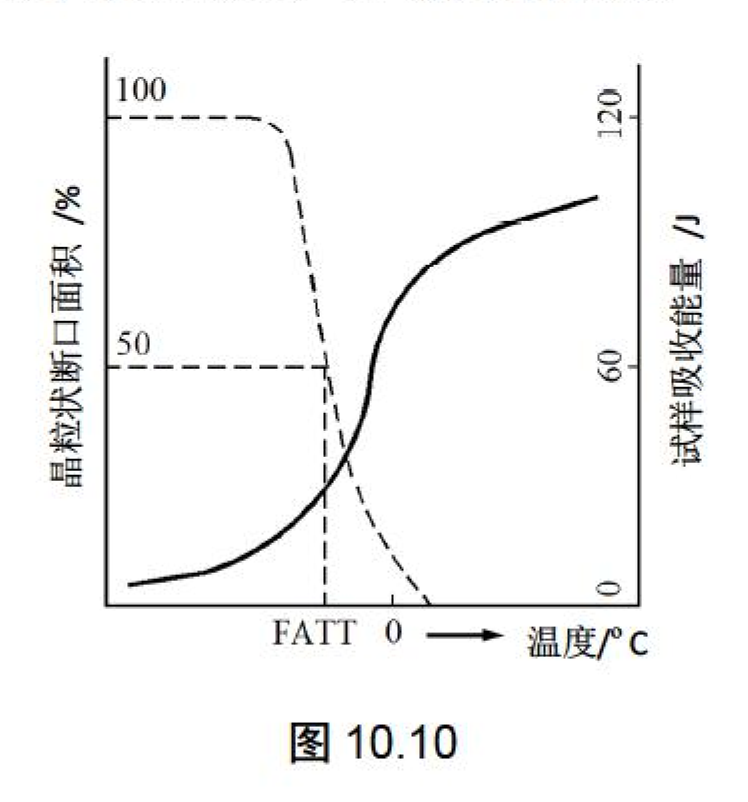


图 10.10

并非所有金属都有冷脆现象。例如，铝、铜和某些高强度合金钢，在很大的温度变化范围内 α_k 的数值变化很小，没有明显的冷脆现象。

10.5 提高杆件抗冲击载荷能力的措施

工程中，在打桩、锻造和凿岩等时人们需要利用冲击产生大的动载荷。但是在更多情况下，并不希望在机器设备运转时出现较大的冲击载荷，因此需要尽量避免或减小。

从公式 $K_d = 1 + \sqrt{1 + \dfrac{2h}{\delta_{st}}}$ 可以看出，静变形 δ_{st} 越大，动荷因数越小，因此可以采用降低杆件刚度或者增大杆长的方法来减缓冲击作用。例如，图 10.11(a)所示，汽缸盖受到冲击时，常常使汽缸盖上的短螺栓损坏。但若采用长螺栓(见图 10.11(b))，可增大螺栓的静变形，从而减小动荷因数，提高结构承受冲击载荷的能力。

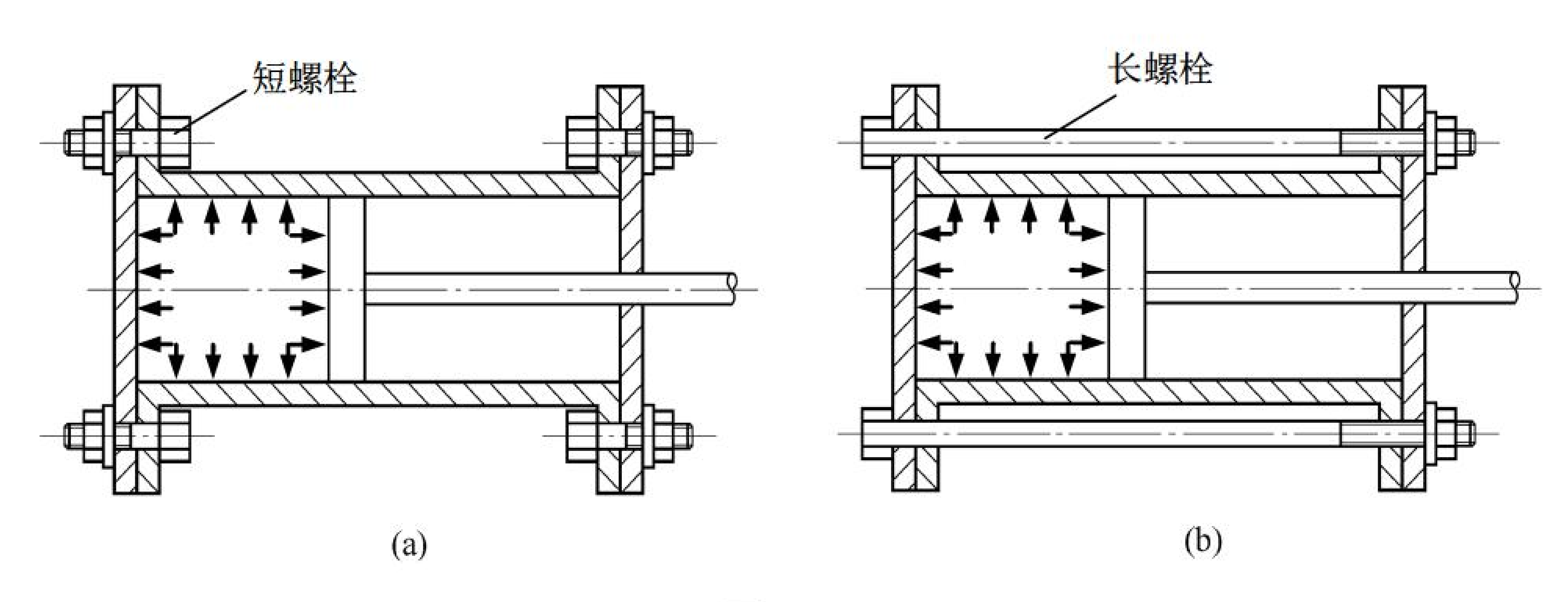


图 10.11

另一种增大杆件静变形的有效方法是安装缓冲装置，如各种各样的弹簧，或在冲击点处垫上弹性模量值较小的材料，如橡胶、软塑料等。钢板弹簧的刚度较小，安装在汽车大梁和底盘下可以缓和汽车受到的冲击，起到减振作用。

此外，对于承受轴向冲击的杆件，应尽可能做成等截面，以利于提高抗冲击能力。例如，抗冲击的螺钉，若使光杆部分的直径大于螺纹内径，如图 10.12(a)所示，就不如使光杆部分的直径与螺纹的内径接近相等[见图 10.12(b)和图 10.12(c)]。这样，螺钉接近于等截面杆，静变形 δ_{st} 增大，而静应力没变，于是降低了动应力。而且，图 10.12(a)中从光杆到螺纹的截面突变处，存在的应力集中对冲击作用非常敏感。

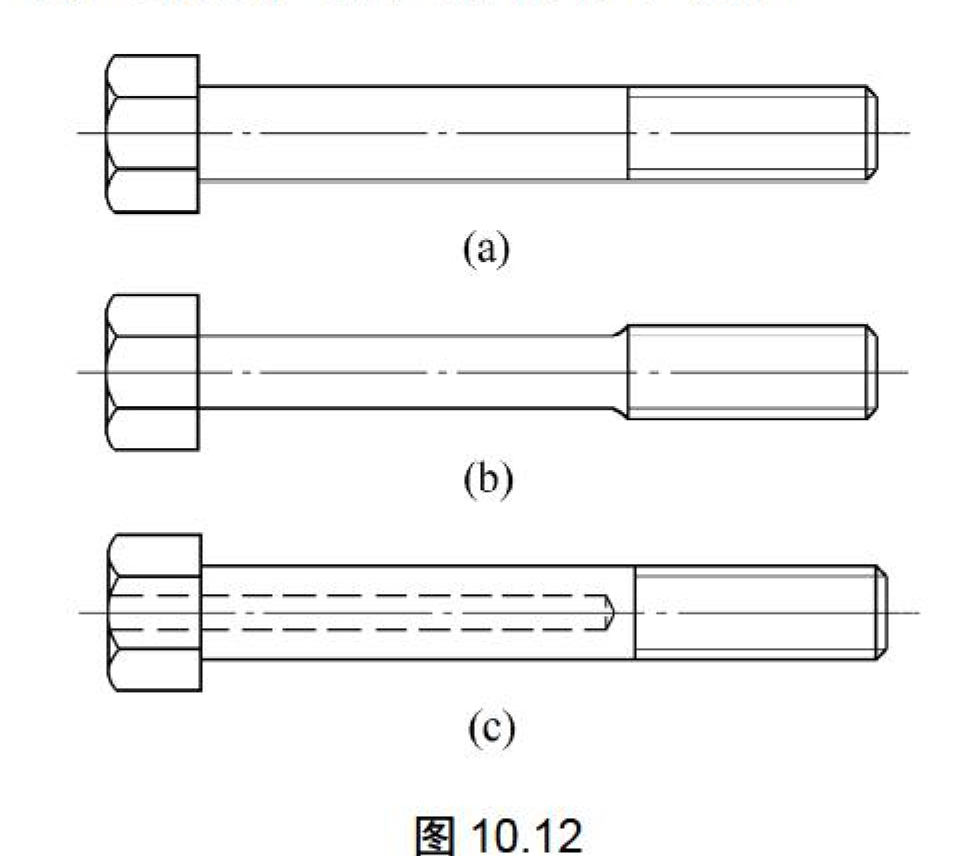


图 10.12

本 章 小 结

若载荷使杆件内各质点产生的加速度较大，或者载荷随时间发生明显地变化，这样的载荷称为动载荷。如构件有加速度运动、冲击载荷等。

构件作匀加速直线运动或等速转动时，通过施加惯性力将动力学问题转化为静力学问题(即动静法)。杆件受冲击载荷时，用能量法来近似地计算冲击时的变形，然后根据变形求出应力。

习　　题

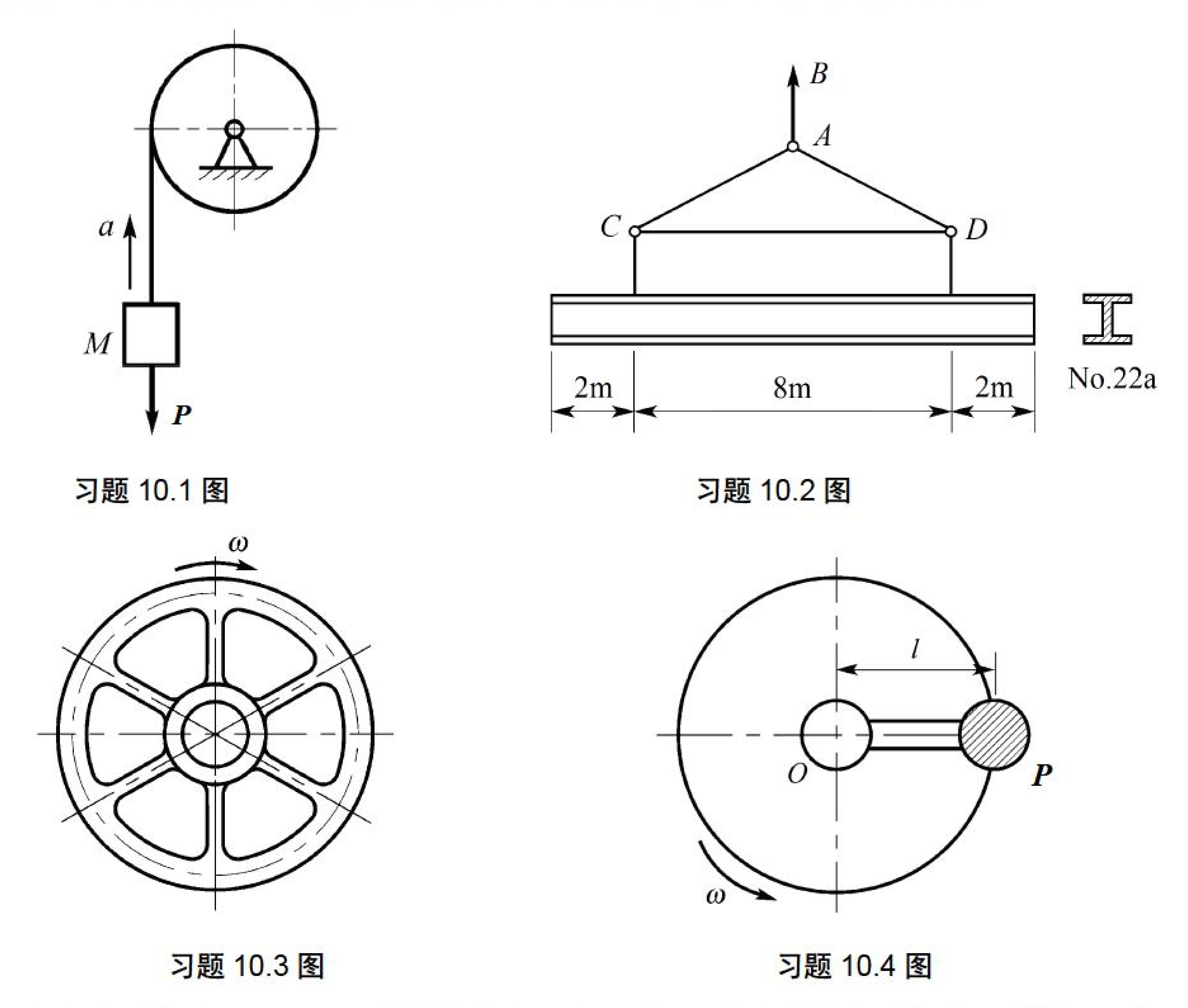
10.1　如习题 10.1 图所示，一钢索吊起重量 $P=50\text{kN}$ 的 M 物体，跨过定滑轮以等加速度 $a=3\,\text{m/s}^2$ 向上提升。不计钢索的重量，试计算钢索的拉力。

10.2　如习题 10.2 图所示，钢索 AB 以向上匀加速度 $a=8\text{m/s}^2$ 吊起一根 No.22a 工字钢。钢索的横截面面积 $A=60\text{mm}^2$，若不计钢索自重，只考虑工字钢的重量。试求工字钢和钢索的最大动应力。

10.3　如习题 10.3 图所示飞轮材料的许用应力 $[\sigma]=78\text{MPa}$，密度 $\rho=7800\text{kg/m}^3$。若不计轮辐的影响，试计算飞轮的许可线速度。

10.4　如习题 10.4 图所示，一杆端连接一重量为 P 的小球，以角速度 ω 绕铅垂轴在水

平面内转动。杆的长度为 l，横截面面积为 A，重量为 P_1。试求杆的伸长量。



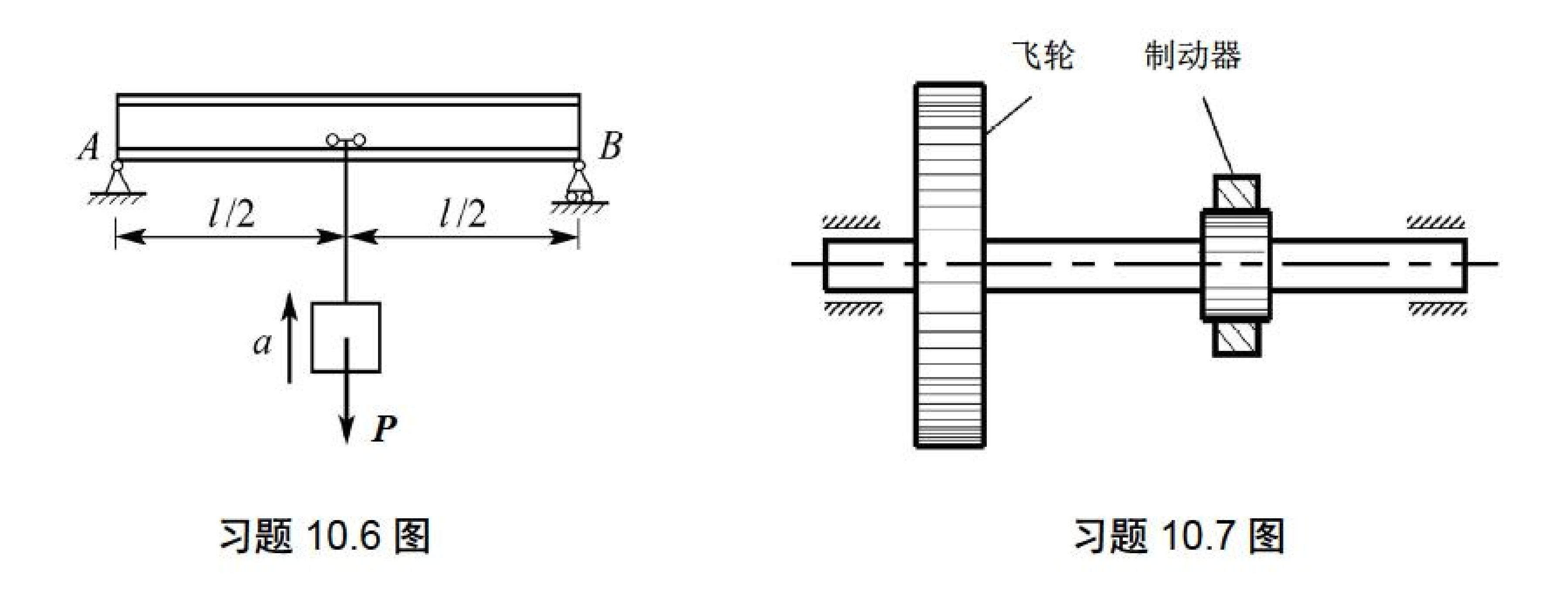
习题 10.1 图　　习题 10.2 图

习题 10.3 图　　习题 10.4 图

10.5　砂轮外径 D=300mm，材料密度 $\rho = 3000\text{kg}/\text{m}^3$，许用应力 $[\sigma] = 5\text{MPa}$。求砂轮允许的最大转速。

10.6　桥式起重机以匀加速提升一重物，如习题 10.6 图所示。开始起吊时重物在 1s 内等加速上升了 h=1.5m，已知起重机梁为 20a 工字钢(其自重的载荷集度 q=273N/m，抗弯截面系数 W=237cm^3)，梁的跨度 l=5m，重物重 P=12kN，钢丝绳重忽略不计，梁材料的许用应力为 $[\sigma] = 120\text{MPa}$，试校核梁的强度。

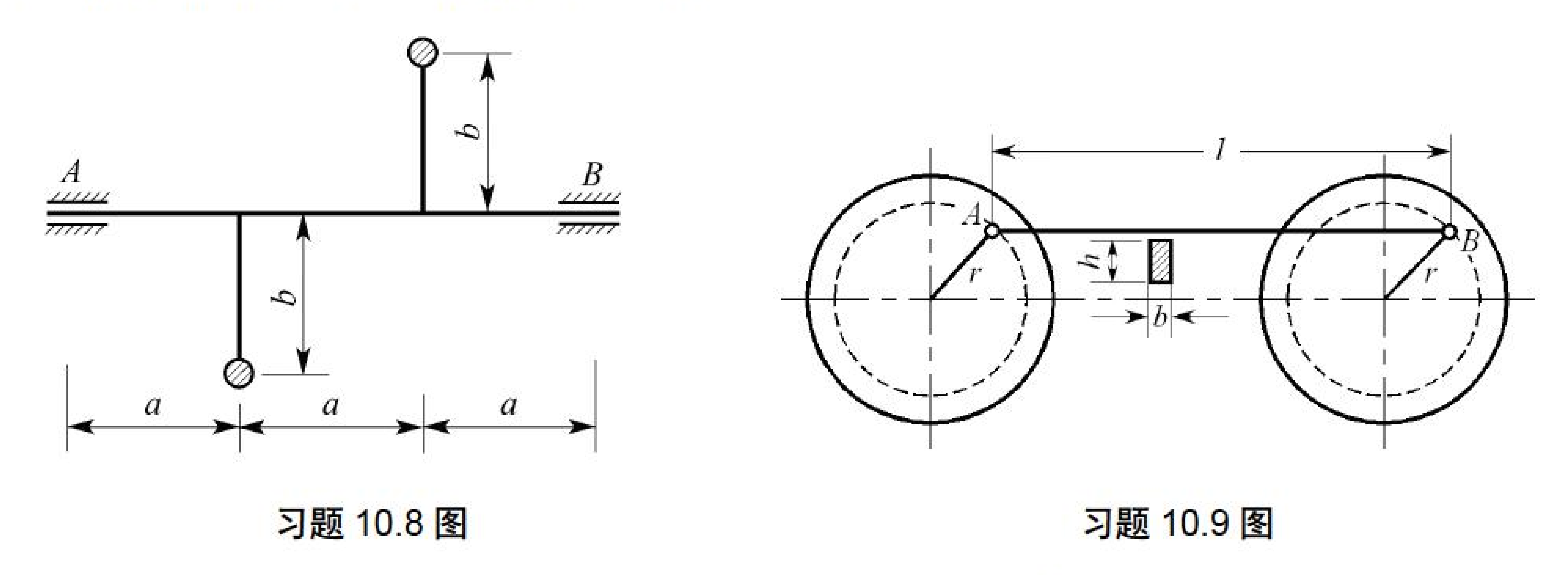
10.7　如习题 10.7 图所示，在直径为100mm 的轴上装有转动惯量 $J = 0.5\text{kN}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^2$ 的飞轮，轴的转速为 $300\text{r}/\text{min}$。制动器开始作用后，在 20 r 内将飞轮刹停。试求轴内最大剪应力。设在制动器作用前轴已与驱动装置脱开，且轴承内的摩擦力可以不计。



习题 10.6 图　　习题 10.7 图

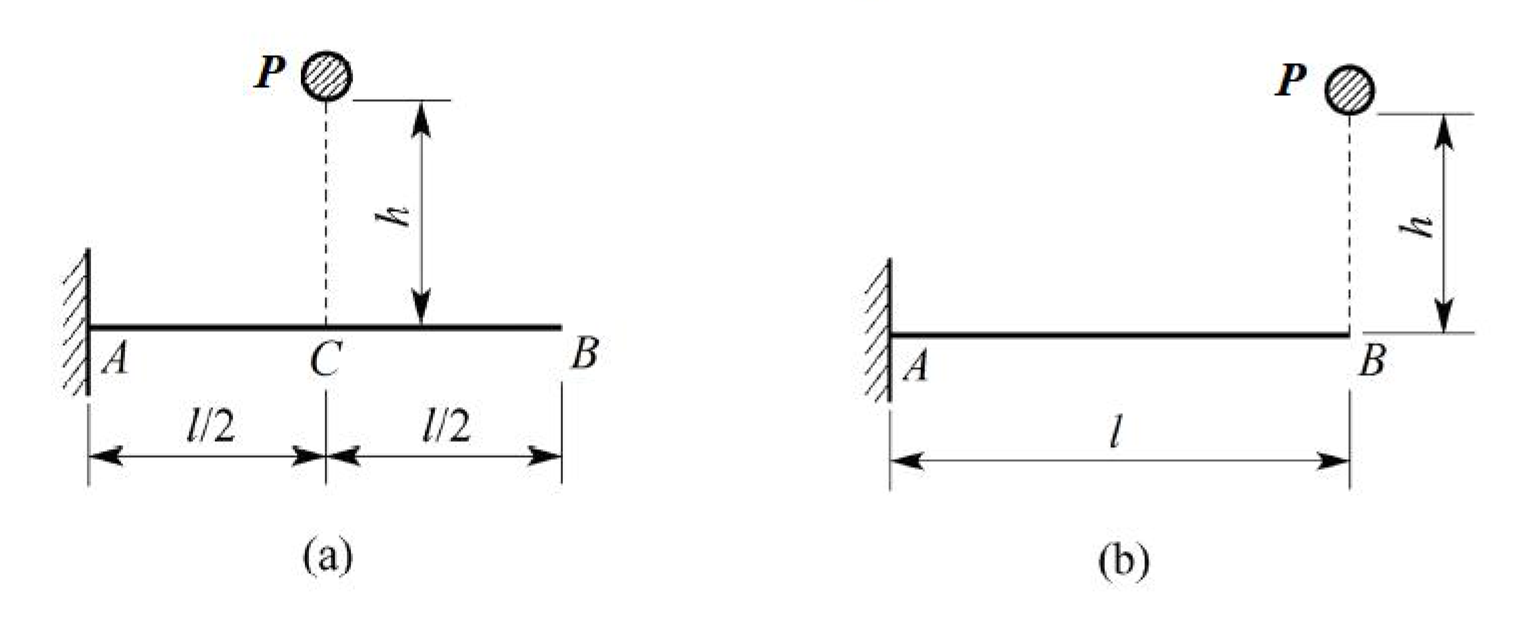
10.8 习题 10.8 图所示 AB 轴以匀角速度 ω 做定轴转动，在轴的纵向对称面内，由于轴线两侧装有两个重量为 P 的圆球。试绘制图示位置时轴的弯矩图。

10.9 习题 10.9 图所示机车车轮以 $n = 300\text{r/min}$ 的转速旋转。平行杆 AB 的横截面为矩形，$h = 5.6\text{cm}$，$b = 2.8\text{cm}$，长度 $l = 2\text{m}$，$r = 25\text{cm}$，材料的密度为 $\rho = 7.8\text{g/cm}^3$。试确定平行杆最危险的位置和杆内最大正应力。



习题 10.8 图　　习题 10.9 图

10.10 习题 10.10 图所示两悬臂梁的材料相同，截面为圆截面，直径都为 d，有一重量为 P 的圆球，自高度 h 处自由落下。试问：当圆球落在梁中点 C[见图(a)]和落在梁的自由端 B[见图(b)]时，哪一种情况下梁的动荷因数 K_d 大？哪一种情况下梁的动变形大？



习题 10.10 图

10.11 如习题 10.11 图所示，重量为 P 的重物自高度 h 处下落冲击梁上的 C 点。设梁的 E、I 及抗弯截面系数 W 皆为已知量。试求梁内最大正应力及梁的跨度中点的挠度。

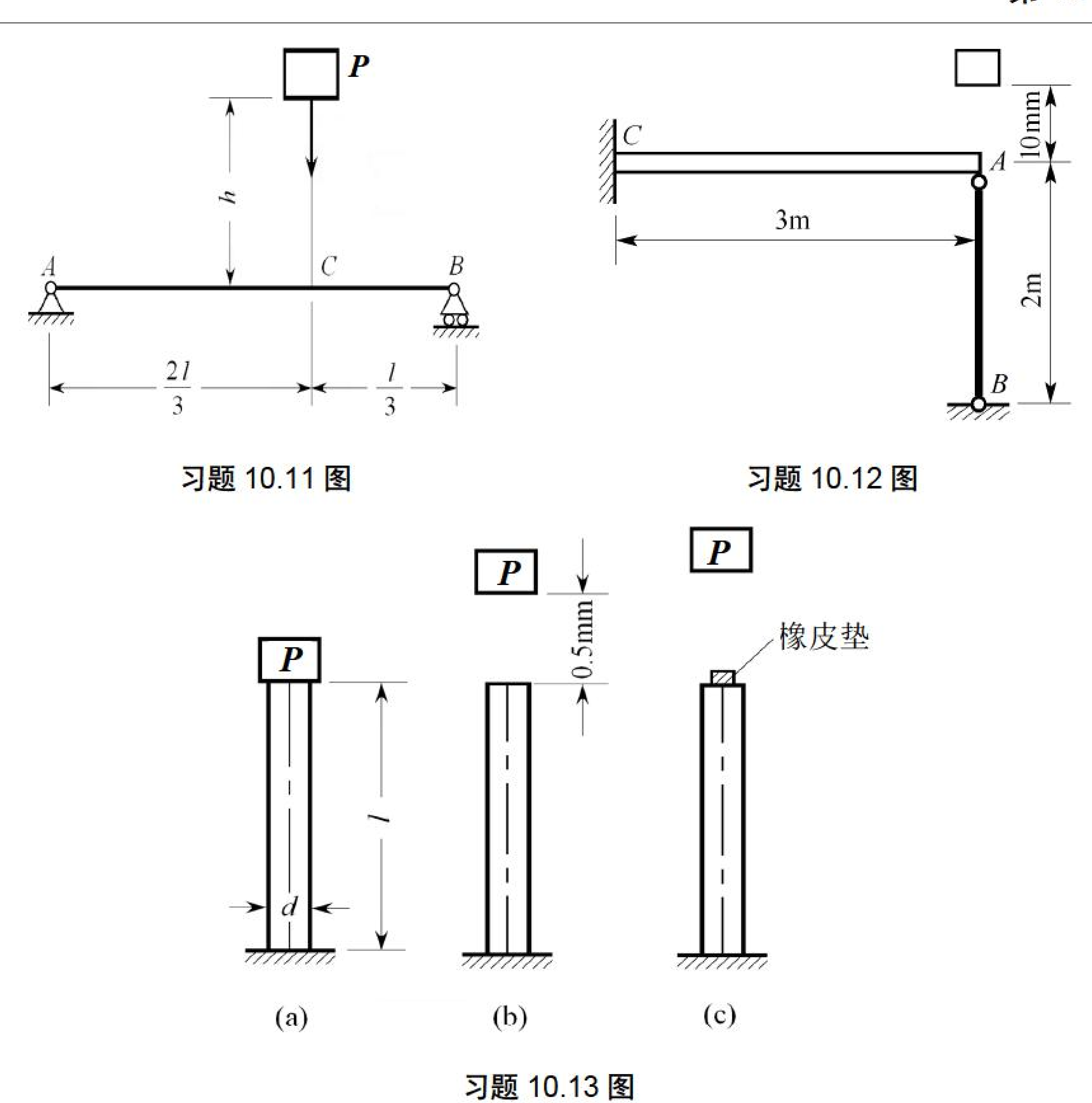
10.12 如习题 10.12 图所示，10 号工字梁的 C 端固定，A 端铰支于空心钢管 AB 上。钢管的内径和外径分别为 30 mm 和 40 mm，B 端也为铰支。梁和钢管都是 Q235 钢。当重为 300N 的重物落于梁的 A 端时，试校核 AB 杆的稳定性。规定的稳定安全因数 $[n]_{st} = 2.5$。

10.13 如习题 10.13 图所示，直径 $d = 300\text{mm}$、长 $l = 6\text{m}$ 的圆木桩，下端固定，上端受重 $P = 2\text{kN}$ 的重锤作用，木材的 $E_1 = 10\text{GPa}$。求下列 3 种情况下，木桩内的最大正应力：

(a) 重锤以静载荷的方式作用于木桩上；

(b) 重锤从离桩顶 0.5m 的高度自由落下；

(c) 在桩顶放置直径为 150mm、厚为 40mm 的橡皮垫，橡皮垫的弹性模量 $E_2 = 8\text{MPa}$。重锤也是从离橡皮垫顶面 0.5m 的高度自由落下。



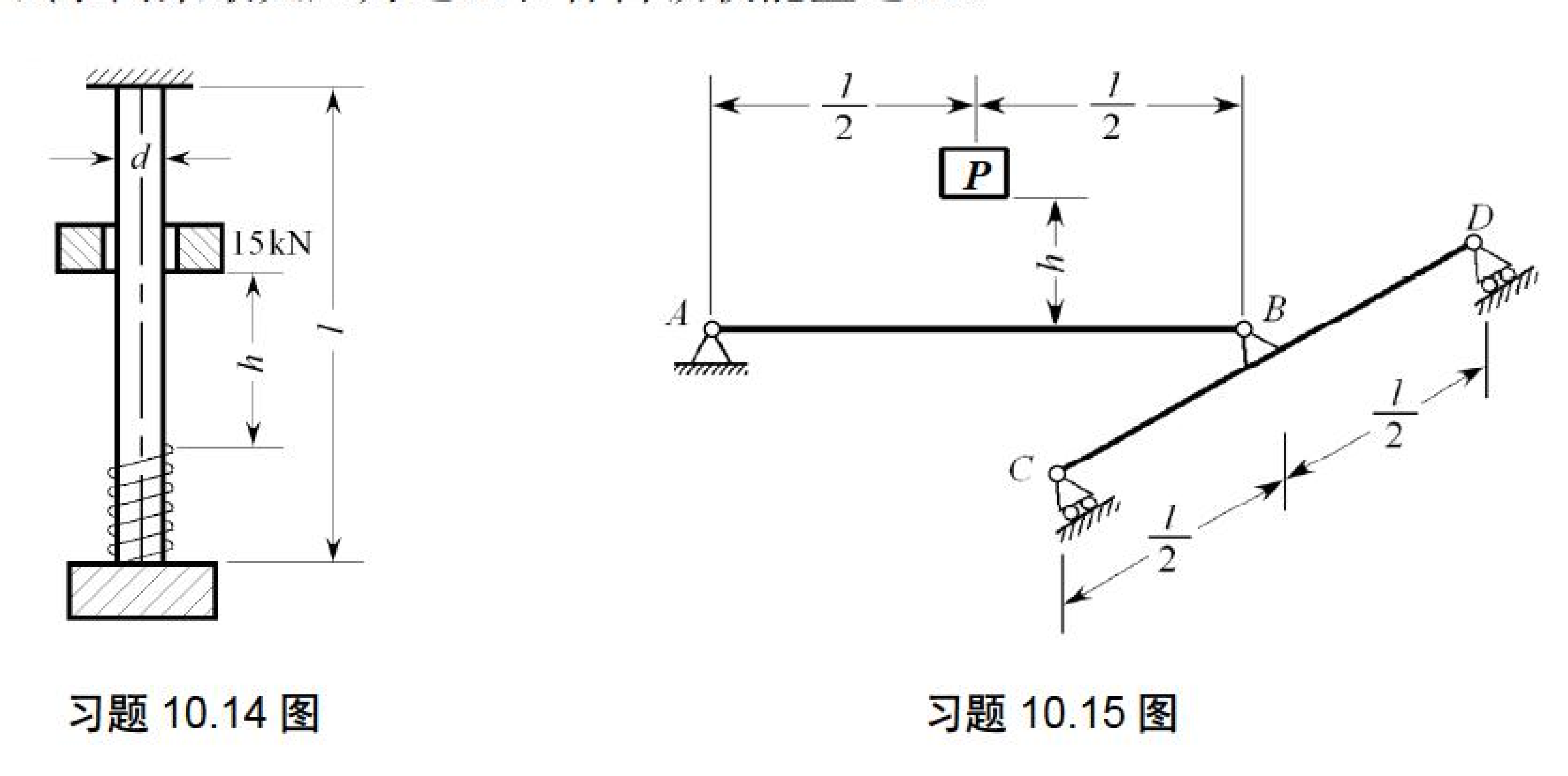
习题 10.11 图

习题 10.12 图

习题 10.13 图

10.14　习题 10.14 图所示钢杆的下端有一固定圆盘，盘上放置弹簧。弹簧在1kN的静载荷作用下缩短0.0625cm。钢杆的直径 $d = 4\text{cm}$ ，$l = 4\text{m}$ ，许用应力 $[\sigma] = 120\text{MPa}$ ，$E = 200\text{GPa}$ 。若有重为15kN的重物自由落下，求其许可的高度 h。假设没有弹簧，则许可高度 h 等于多大?

10.15　梁 AB 和梁 CD 的材料相同，横截面也相同。在习题 10.15 图所示冲击载荷的作用下，试求两梁最大应力之比和各自吸收能量之比。



习题 10.14 图

习题 10.15 图

第 11 章　交 变 应 力

【本章学习重点】

本章主要学习交变应力、疲劳失效、持久极限等概念，分析影响持久极限的因素，进行构件的疲劳强度计算。

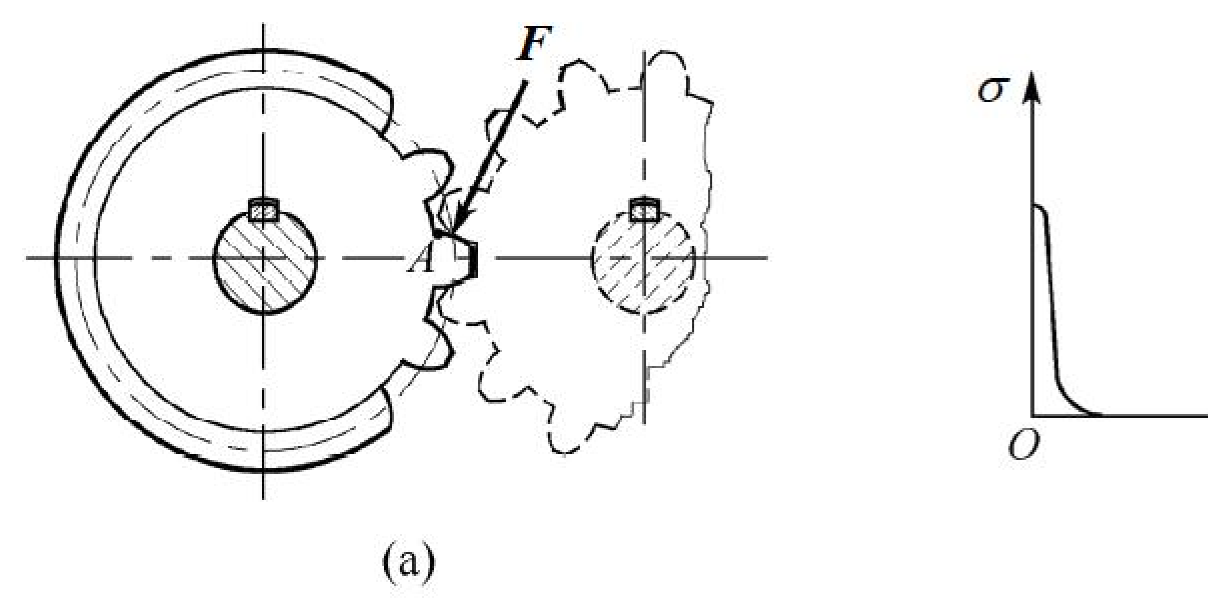
【本章学习目标】

- 理解交变应力、失效破坏、持久极限等概念。
- 了解交变应力下材料疲劳失效的机理和特点，了解影响持久极限的主要因素。
- 会进行构件的疲劳强度计算。

11.1　概　　述

某些零件工作时，承受随时间做周期性变化的应力。例如，在图 11.1(a)中 F 表示齿轮啮合时作用于齿轮上的力。齿轮每旋转一周，齿轮啮合一次。啮合时 F 由零迅速增加到最大值，然后又减小到零。因而，齿根 A 点的弯曲正应力 σ 也由零增加到最大值，再减小到零。齿轮不停地旋转，σ 也就不停地重复上述过程。σ 随时间 t 变化的曲线如图 11.1(b)所示。又如，火车轮轴上的力 F (见图 11.2(a))来自车厢，大小和方向基本不变，即弯矩不变。但轴以角速度 ω 转动时，横截面上 A 点到中性轴的距离 $y = r\sin\omega t$，却是随时间 t 变化的。A 点的弯曲正应力为

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{Mr}{I}\sin\omega t$$



(a)　　(b)

图 11.1

可见，σ 是随时间 t 按正弦曲线变化的(见图 11.2(b))。再如，因电动机转子偏心惯性力引起强迫振动的梁(见图 11.3(a))，其危险点应力随时间变化的曲线如图 11.3(b)所示。σ_{st} 表示电动机重量 P 按静载荷方式作用于梁上引起的静应力，最大应力 σ_{max} 和最小应力 σ_{min} 分别表示梁在最大和最小位移时的应力。

随时间做周期性变化的应力称为交变应力。一般认为，对于金属疲劳，在足够大的交

变应力下，金属中位置最不利或较弱的晶体，沿最大切应力作用面形成滑移带，滑移带开裂成为微观裂纹。在构件外形突变(如圆角、切口、沟槽等)或表面刻痕或材料内部缺陷等部位，都可能因较大的应力集中而引起微观裂纹。分散的微观裂纹经过集结沟通，形成宏观裂纹。以上是裂纹的萌生过程。已形成的宏观裂纹在交变应力下逐渐扩展，随着裂纹的扩展，构件的有效截面面积逐步缩小，当有效截面面积缩小到一定程度时，构件便突然断裂。

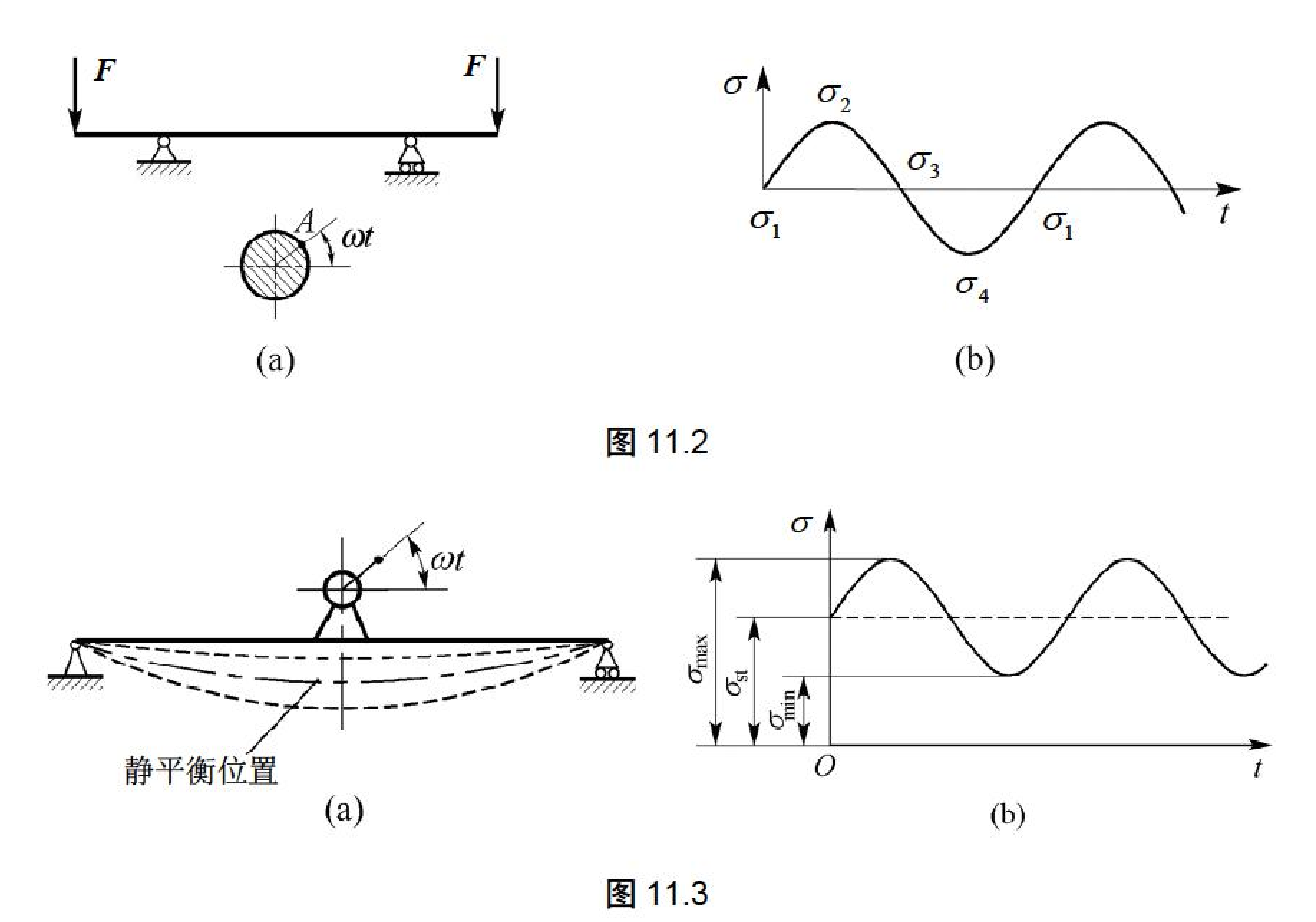


图 11.2

图 11.3

图 11.4(a)是构件疲劳断口的照片。观察断口可以发现，断口分成两个区域，一个光滑，一个粗糙，粗糙区呈颗粒状[见图 11.4(b)]。这是因为在裂纹扩展过程中，裂纹的两个侧面在交变载荷作用下，时而压紧时而分开，多次反复，这就形成断口的光滑区。断口的颗粒状粗糙区则是最后突然断裂形成的。

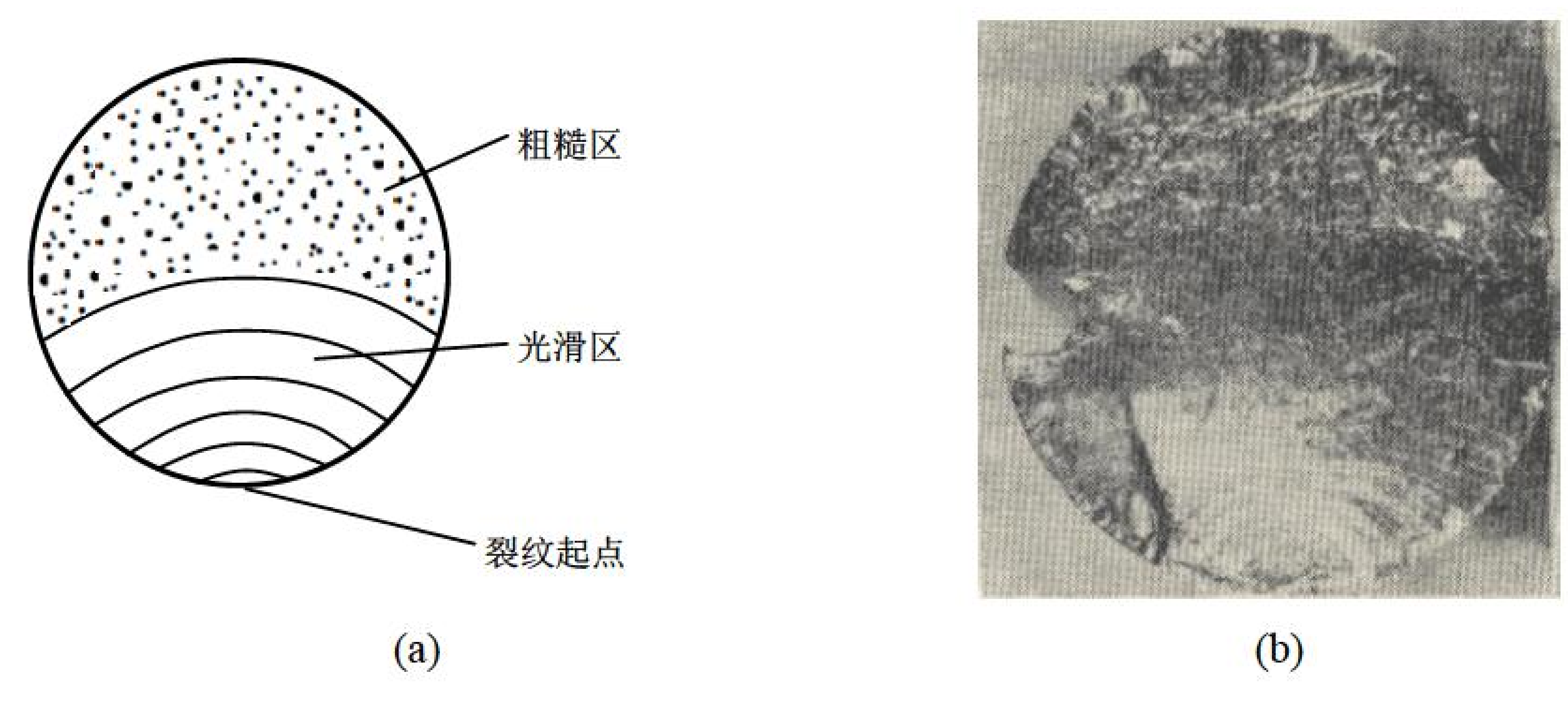


图 11.4

疲劳失效是构件在应力远远低于强度极限，甚至远低于屈服极限的情况下突然发生的断裂。飞机、车辆和机器发生的事故中，有很大比例是零部件疲劳失效所致。这类事故带

来的损失和伤亡是很大的。所以，金属疲劳问题应引起多方关注。

11.2 交变应力的循环特征、应力幅和平均应力

图 11.5 所示为按正弦曲线变化的应力 σ 与时间 t 的关系。由 a 到 b 应力经历了变化的一个全过程又回到原来的数值，称为一个应力循环。完成一个应力循环所需要的时间(如图中的 T)，称为一个应力循环周期。以 σ_{max} 和 σ_{min} 分别表示循环中的最大应力和最小应力，比值

$$r=\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \tag{11.1}$$

称为交变应力的循环特征或应力比。

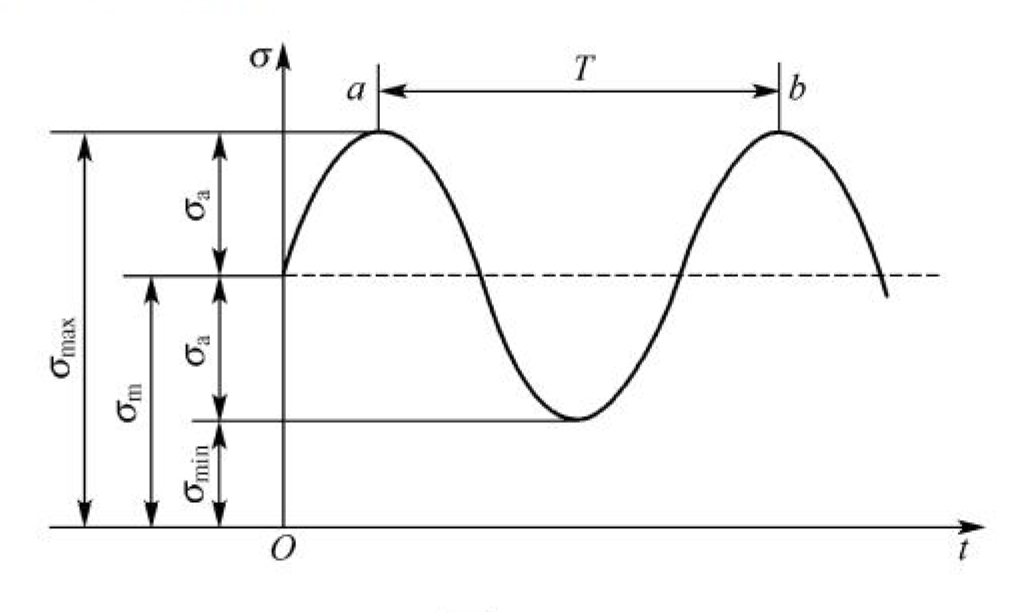


图 11.5

σ_{max} 和 σ_{min} 代数和的 1/2 称为平均应力，即

$$\sigma_{m}=\frac{1}{2}(\sigma_{max}+\sigma_{min}) \tag{11.2}$$

σ_{max} 和 σ_{min} 代数差的 1/2 称为应力幅，即

$$\sigma_{a}=\frac{1}{2}(\sigma_{max}-\sigma_{min}) \tag{11.3}$$

若交变应力的 σ_{max} 和 σ_{min} 大小相等，正负号相反，如图 11.2 中的火车轴就是如此，这种情况称为对称循环。这时由式(11.1)～式(11.3)得

$$r=-1，\quad \sigma_{m}=0，\quad \sigma_{a}=\sigma_{max} \tag{11.4}$$

各种应力循环中，除对称循环外，其余情况统称为不对称循环。由式(11.2)和式(11.3)知

$$\sigma_{max}=\sigma_{m}+\sigma_{a}，\quad \sigma_{min}=\sigma_{m}-\sigma_{a} \tag{11.5}$$

可见，任一不对称循环都可看成是，在平均应力 σ_{m} 上叠加一个幅度为 σ_{a} 的对称循环。这一点已由图 11.5 表明。

若应力循环中的 $\sigma_{min}=0$ (或 $\sigma_{max}=0$)，表示交变应力变动于某一应力与零之间。而图 11.1 中齿根 A 点就是这样的。这种情况称为脉动循环。这时有

$$r=0，\quad \sigma_{m}=\sigma_{a}=\frac{1}{2}\sigma_{max} \tag{11.6}$$

或

$$r=-\infty\text{，}\quad -\sigma_a=\sigma_m=\frac{1}{2}\sigma_{min} \tag{11.7}$$

静应力也可看作是交变应力的特例，这时应力并无变化，故

$$r=1\text{，}\quad \sigma_{max}=\sigma_{min}=\sigma_m \tag{11.8}$$

11.3　材料的持久极限及影响因素

11.3.1　材料的持久极限

交变应力下，应力低于屈服极限时金属就可能发生疲劳。因此，静载荷作用下测定的屈服极限或强度极限已经不能作为强度指标。金属疲劳的强度指标应重新测定。

在对称循环交变应力作用下测定疲劳强度指标，技术上比较简单，最为常见。测定时将金属加工成直径 $d=7\sim10\,\text{mm}$、表面光滑的试样(光滑小试样)，每组试样约为 10 根左右。把试样装在疲劳试验机上(见图 11.6)，使它承受纯弯曲。在最小直径截面上，最大弯曲应力为

$$\sigma=\frac{M}{W}=\frac{Fa}{W} \tag{11.9}$$

保持载荷 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向不变，以电动机带动试样旋转，每旋转一周横截面上的点便经历一次应力循环。这与图 11.2 中的火车轴的受力情况是相似的。

试验时，使第一根试样的最大应力 $\sigma_{max,1}$ 较高，约为强度极限 σ_b 的 70%。经历 N_1 次循环后，试样疲劳断裂。N_1 称为应力 $\sigma_{max,1}$ 时的疲劳寿命。然后，使第二根试样的应力 $\sigma_{max,2}$ 略低于第一根试样，疲劳断裂时的循环数为 N_2。一般来说，随着应力大小的降低，循环次数(寿命)迅速增加。逐步降低应力大小，得出各试样疲劳断裂时的相应寿命。以应力为纵坐标，寿命 N 为横坐标，由试验结果绘成的曲线，称为应力-寿命曲线或 S-N 曲线(见图 11.7)。钢试样的疲劳试验表明，当应力降到某一极限值时，S-N 曲线趋近于水平线。这表明只要应力不超过这一极限值，N 可无限增大，即试样可以经历无限次循环而不发生疲劳破坏。交变应力的这一值称为疲劳极限或持久极限。对称循环的持久极限记为 σ_{-1}，下标“-1”表示对称循环的循环特征为 $r=-1$。

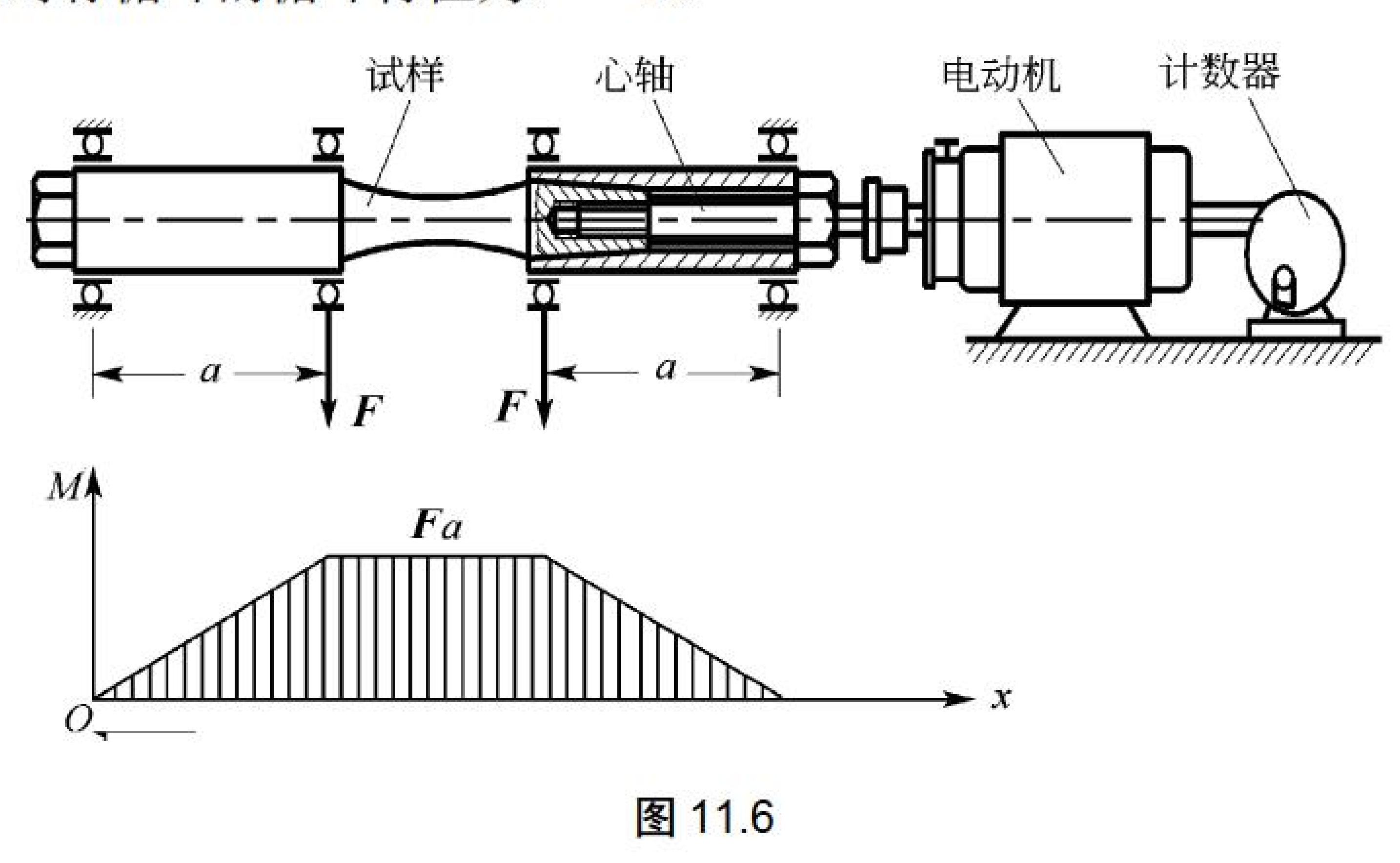


图 11.6

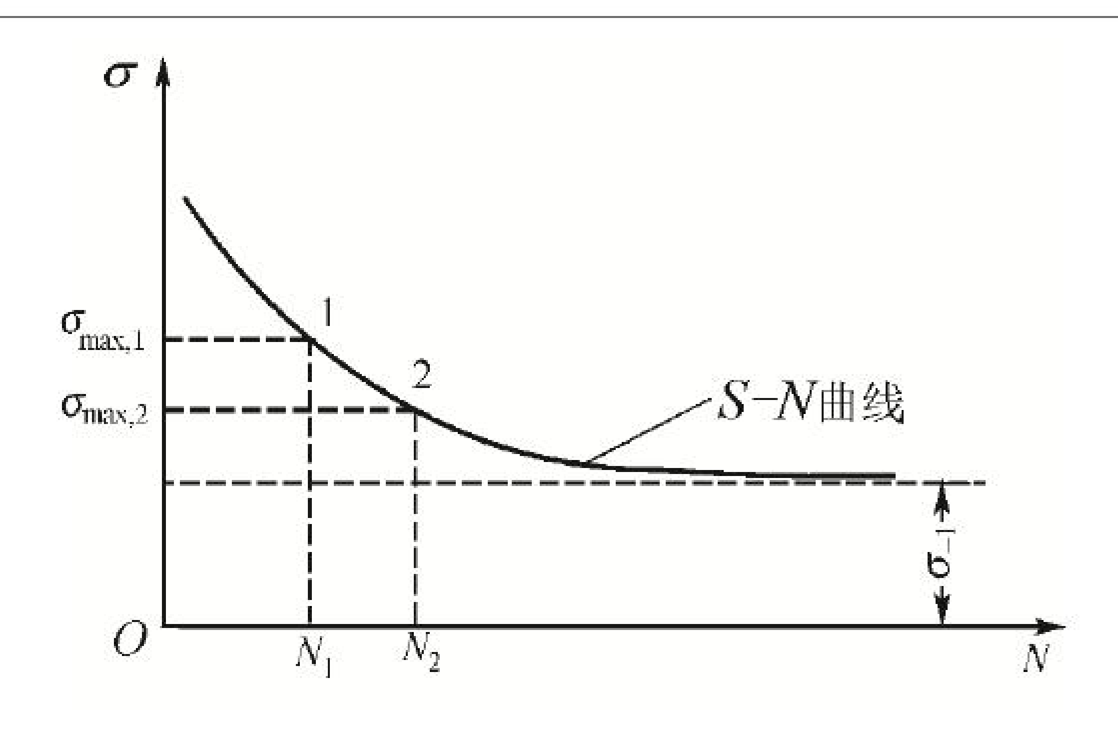


图 11.7

常温下的试验结果表明，若钢制试样经历10^7次循环仍未疲劳，则再增加循环次数，也不会发生疲劳。所以，就把在10^7次循环下仍未疲劳的最大应力，规定为钢材的持久极限，而把$N_0=10^7$称为循环基数。有色金属的 S–N 曲线无明显趋于水平的直线部分。通常规定一个循环基数，如$N_0=10^8$，把它对应的最大应力作为这类材料的“条件”持久极限。

11.3.2 影响持久极限的因素

对称循环的持久极限σ_{-1}，一般是常温下用光滑小试样测定的。但实际构件的外形、尺寸、表面质量和工作环境等，都将影响持久极限的数值。下面介绍影响持久极限的几种主要因素。

1. 构件外形的影响

构件外形的突然变化，如构件上有槽、孔、缺口、轴肩等，都将引起应力集中现象。在应力集中的局部区域易形成疲劳裂纹，使构件的持久极限显著降低。在对称循环下，若以$(\sigma_{-1})_{\mathrm{d}}$或$(\tau_{-1})_{\mathrm{d}}$表示无应力集中的光滑试样的持久极限；$(\sigma_{-1})_{\mathrm{k}}$或$(\tau_{-1})_{\mathrm{k}}$表示有应力集中且尺寸与光滑试样相同试样的持久极限，则比值

$$\left.\begin{aligned} K_\sigma &= \frac{(\sigma_{-1})_{\mathrm{d}}}{(\sigma_{-1})_{\mathrm{k}}} \\ K_\tau &= \frac{(\tau_{-1})_{\mathrm{d}}}{(\tau_{-1})_{\mathrm{k}}} \end{aligned}\right\} \tag{11.10}$$

称为有效应力集中因数。因$(\sigma_{-1})_{\mathrm{d}}>(\sigma_{-1})_{\mathrm{k}}$，$(\tau_{-1})_{\mathrm{d}}>(\tau_{-1})_{\mathrm{k}}$，所以$K_\sigma$和$K_\tau$都大于 1。工程中为了使用方便，把关于有效应力集中因数的数据整理成曲线或表格。图 11.8 和图 11.9 就是这类曲线。应力集中处的最大应力与按公式计算的“名义”应力之比，称为理论应力集中因数。它可用弹性力学或光弹性试验的方法来确定。理论应力集中因数只与构件外形有关，没有考虑材料性质。用不同材料加工成形状、尺寸相同的构件，则这些构件的理论应力集中因数也相同。但是由图 11.8 和图 11.9 可以看出，有效应力集中因数不但与构件的形状、尺寸有关，而且与强度极限σ_{b}，即与材料的性质有关。一般来说，静载荷作用下抗拉强度越高，有效应力集中因数越大，即对应力集中越敏感。

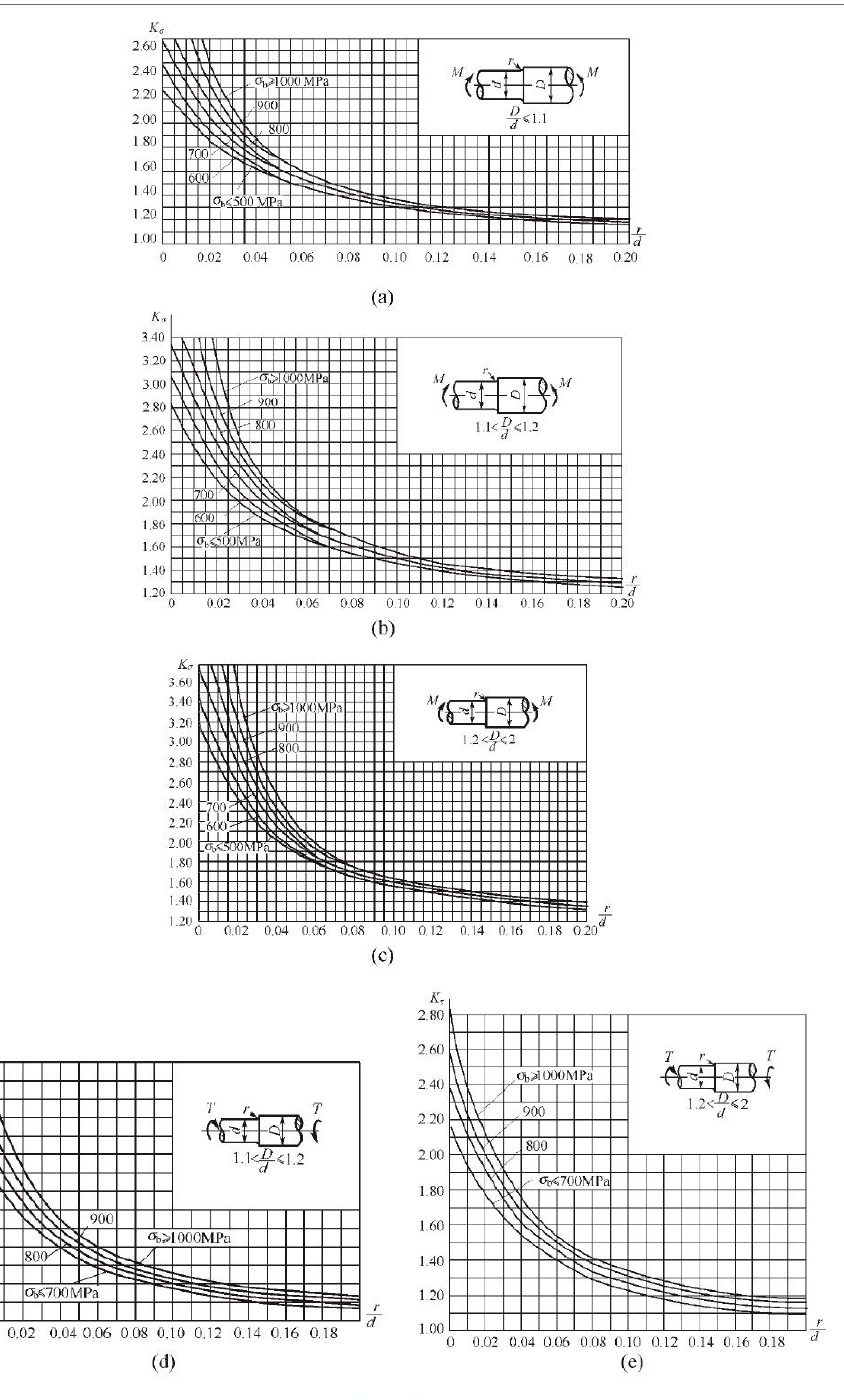

K_σ
$\sigma_b \geqslant 1000$ MPa
900
800
700
600
$\sigma_b \leqslant 500$ MPa
$\frac{D}{d} \leqslant 1.1$
$\frac{r}{d}$
(a)
$1.1 < \frac{D}{d} \leqslant 1.2$
(b)
$1.2 < \frac{D}{d} \leqslant 2$
(c)
K_τ
$\sigma_b \leqslant 700$ MPa
(d)
(e)

图 11.8

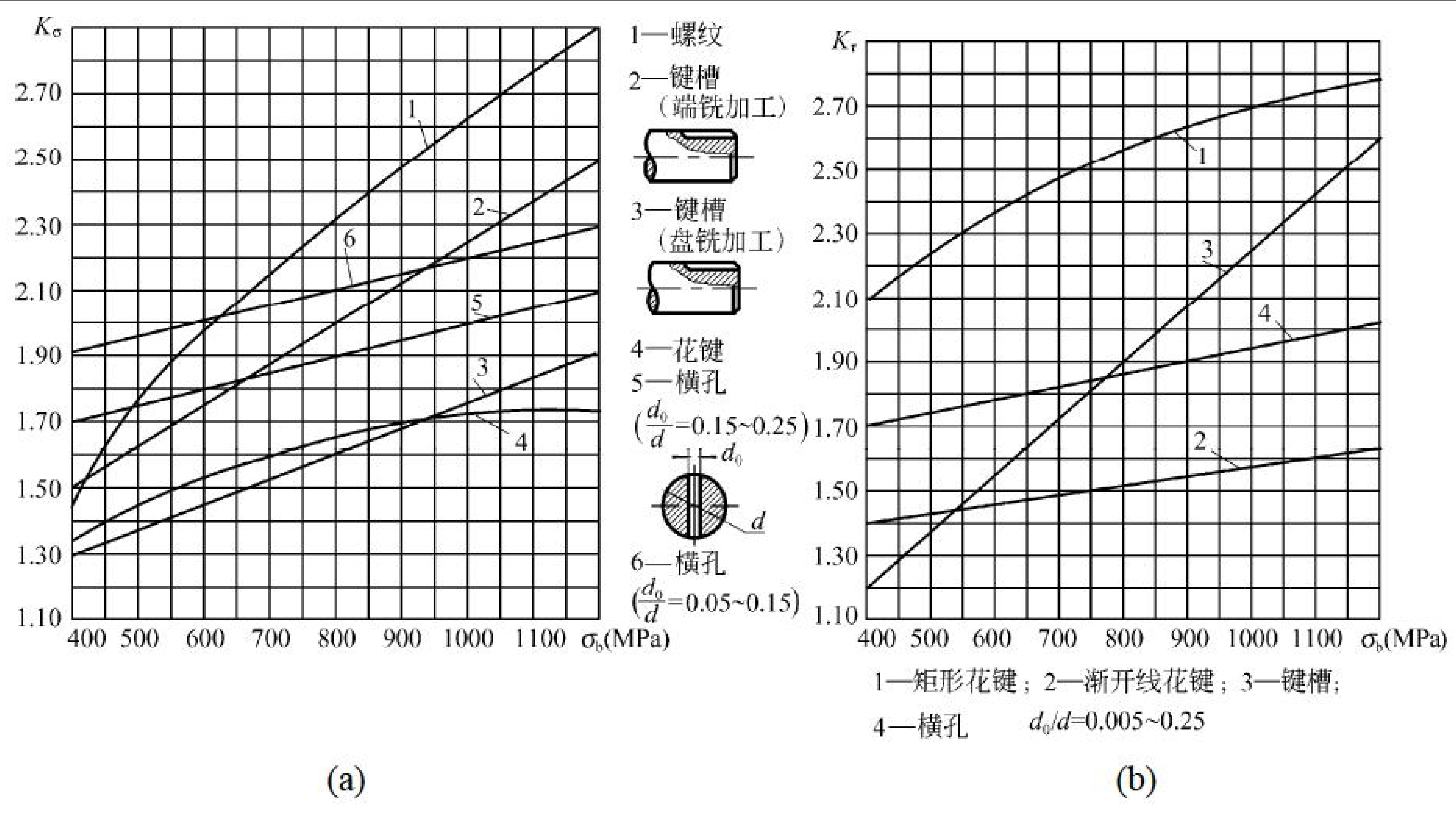


图 11.9

2. 构件尺寸的影响

持久极限一般是用直径为 7～10mm 的小试样测定的。随着试样横截面尺寸的增大，持久极限却相应地降低。现以图 11.10 中两个受扭试样来说明。沿圆截面的半径，切应力是线性分布的，若两者最大切应力相等，显然有 $\alpha_1 < \alpha_2$，即沿圆截面半径，大试样应力的衰减比小试样缓慢，因而大试样横截面上的高应力区比小试样的大，即大试样中处于高应力状态的晶粒比小试样多。所以，形成疲劳裂纹的机会也就更多。

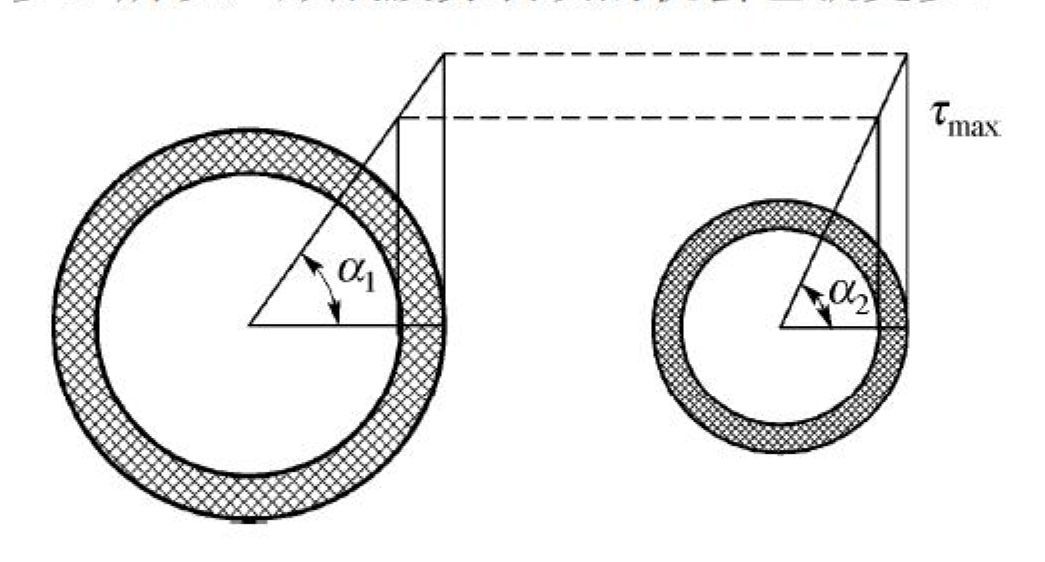


图 11.10

在对称循环下，若光滑小试样的持久极限为 σ_{-1}，光滑大试样的持久极限为 $(\sigma_{-1})_d$，则比值

$$\varepsilon_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_d}{\sigma_{-1}} \tag{11.11}$$

称为尺寸因数，其数值小于 1。对扭转，尺寸因数为

$$\varepsilon_\tau = \frac{(\tau_{-1})_d}{\tau_{-1}} \tag{11.12}$$

常用钢材的尺寸因数已列入表 11.1 中。

表 11.1　尺寸因数

直径 d/mm		$>20\sim30$	$>30\sim40$	$>40\sim50$	$>50\sim60$	$>60\sim70$
δ_σ	碳钢	0.91	0.88	0.84	0.81	0.78
	合金钢	0.83	0.77	0.73	0.70	0.68
各种钢 ε_τ		0.89	0.81	0.78	0.76	0.74
直径 d/mm		$>70\sim80$	$>80\sim100$	$>100\sim120$	$>120\sim150$	$>150\sim500$
V_σ	碳钢	0.75	0.73	0.70	0.68	0.60
	合金钢	0.66	0.64	0.62	0.60	0.54
各种钢 ε_τ		0.73	0.72	0.70	0.68	0.60

3. 构件表面质量的影响

一般情况下，构件的最大应力发生在表层，疲劳裂纹也多出现在表层。表面加工的刀痕和擦伤等都将引起应力集中，降低持久极限。所以，表面加工质量对持久极限有明显的影响。若表面磨光试样的持久极限为 σ_{-1}，而表面为其他加工情况时构件的持久极限为 $(\sigma_{-1})_\beta$，则比值

$$\beta = \frac{(\sigma_{-1})_\beta}{\sigma_{-1}} \tag{11.13}$$

称为表面质量因数。不同表面粗糙度的 β 列入表 11.2 中。可以看出，表面质量低于磨光试样时，$\beta<1$。还可看出，高强度钢材随表面质量的降低，β 的下降比较明显。这说明优质钢材更需要高质量的表面加工，才能充分发挥高强度的性能。

表 11.2　不同表面粗糙度的表面质量因数 β

加工方法	轴表面粗糙度 Ra/μm	σ_b/MPa		
		400	800	1200
磨　削	0.4～0.2	1	1	1
车　削	3.2～0.8	0.95	0.90	0.80
粗　车	25～6.3	0.85	0.80	0.65
未加工的表面	—	0.75	0.65	0.45

另外，如构件经淬火、渗碳、氮化等热处理或化学处理，使表层得到强化；或者经滚压、喷丸等机械处理，使表层形成预压应力，减弱容易引起裂纹的工作拉应力，这些都会明显提高构件的持久极限，得到大于 1 的 β。各种强化方法的表面质量因数列入表 11.3 中。

综合上述 3 种因素，在对称循环下，构件的持久极限为

$$\sigma_{-1}^0 = \frac{\varepsilon_\sigma \beta}{K_\sigma}\sigma_{-1} \tag{11.14}$$

式中，σ_{-1} 为光滑小试样的持久极限。公式是对正应力写出的，若为扭转，可写成

$$\tau_{-1}^0 = \frac{\varepsilon_\tau \beta}{K_\tau}\tau_{-1} \tag{11.15}$$

表 11.3　各种强化方法的表面质量因数 β

强化方法	心部强度 σ_b /MPa	β		
		光　轴	低应力集中的轴 $K_\sigma \leqslant 1.5$	高应力集中的轴 $K_\sigma \geqslant 1.8\sim2$
高频淬火	600～800	1.5～1.7	1.6～1.7	2.4～2.8
	800～1000	1.3～1.5		
氮　　化	900～1200	1.1～1.25	1.5～1.7	1.7～2.1
渗　　碳	400～600	1.8～2.0	3	
	700～800	1.4～1.5		
	1000～1200	1.2～1.3	2	
喷丸硬化	600～1500	1.1～1.25	1.5～1.6	1.7～2.1
滚子滚压	600～1500	1.1～1.3	1.3～1.5	1.6～2.0

注：1. 高频淬火系根据直径为 10～20mm，淬硬层厚度为(0.05 ～0.20)d 的试样试验求得的数据，对大尺寸的试样，β 值会有所降低。

2. 氮化层厚度为 0.01d 时用小值；在(0.03 ～0.04)d 时用大值。

3. 喷丸硬化系根据直径为 8～40mm 试样求得的数据。喷丸速度低时用小值，速度高时用大值。

4. 滚子滚压系根据直径为 17～130mm 的试样求得数据。

除上述 3 种因素外，构件的工作环境，如温度、介质等也会影响持久极限的数值。仿照前面的方法，这类因素的影响也可用修正系数来表示。

11.4　对称循环交变应力下构件的疲劳强度计算

对称循环交变应力作用下，构件的持久极限 σ_{-1}^0 由公式(11.14)来计算。将 σ_{-1}^0 除以安全因数 n 得许用应力为

$$[\sigma_{-1}]=\frac{\sigma_{-1}^0}{n} \tag{11.16}$$

构件的强度条件为

$$\sigma_{max} \leqslant [\sigma_{-1}] \text{或} \sigma_{max} \leqslant \frac{\sigma_{-1}^0}{n} \tag{11.17}$$

式中，σ_{max} 为构件危险点的最大工作应力。

也可把强度条件写成由安全因数表达的形式。由式(11.17)知

$$\frac{\sigma_{-1}^0}{\sigma_{max}} \geqslant n \tag{11.18}$$

式(11.18)左侧是构件持久极限 σ_{-1}^0 与最大工作应力 σ_{max} 之比，代表构件工作时的安全储备，称为构件的工作安全因数，用 n_σ 来表示，即

$$n_\sigma=\frac{\sigma_{-1}^0}{\sigma_{max}} \tag{11.19}$$

于是强度条件式(11.18)可以写成

$$n_\sigma \geqslant n \tag{11.20}$$

将式(11.14)代入式(11.19)，便可把工作安全因数n_σ和强度条件表示为

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\dfrac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta}\sigma_{\max}} \geqslant n \tag{11.21}$$

若为扭转交变应力，式(11.21)应写成

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\dfrac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \beta}\sigma_{\max}} \geqslant n \tag{11.22}$$

例 11.1　某减速器轴如图 11.11 所示。键槽为端铣加工，A—A 截面上的弯矩 $M = 860\text{N}\cdot\text{m}$，轴的材料为 45 钢，$\sigma_b = 520\text{MPa}$，$\sigma_{-1} = 220\text{MPa}$。若规定安全因数 $n = 1.4$，试校核截面 A—A 的强度。

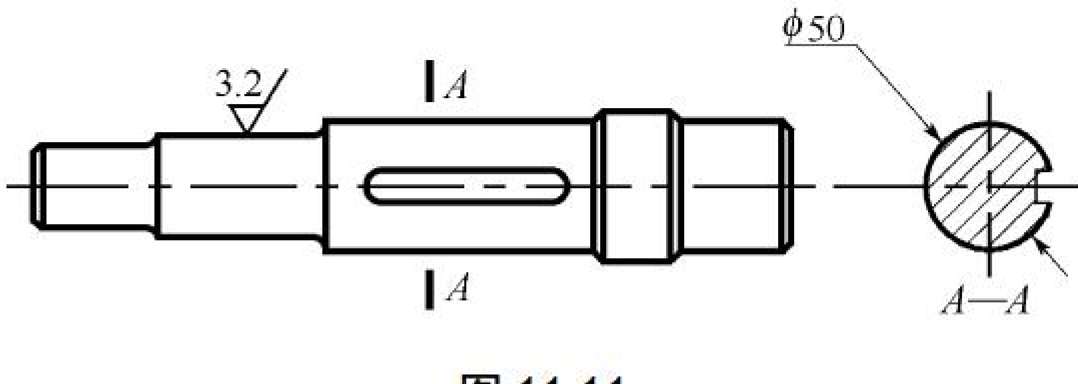


图 11.11

解：计算轴在 A—A 截面上的最大工作应力。若不计键槽对抗弯截面系数的影响，则 A—A 截面的抗弯截面系数为

$$W = \frac{\pi}{32}d^3 = \frac{\pi}{32}\times 5^3\text{cm}^3 = 12.3\text{cm}^3 = 12.3\times 10^{-6}\text{m}^3$$

轴在不变的弯矩 M 作用下旋转，故为弯曲变形下的对称循环。

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{860}{12.3\times 10^{-6}}\text{Pa} = 70\times 10^6\text{Pa} = 70\text{MPa}$$

$$\sigma_{\min} = -70\text{MPa}$$

$$r = -1$$

现在确定轴在 A—A 截面上的系数 K_σ、ε_σ 和 β。由图 11.9(a)中的曲线 2 查得端铣加工的键槽，当 $\sigma_b = 520\text{MPa}$ 时，$K_\sigma = 1.65$。由表 11.1 查得 $\varepsilon_\sigma = 0.84$。由表 11.2，使用线性插值法，求得 $\beta = 0.935$。

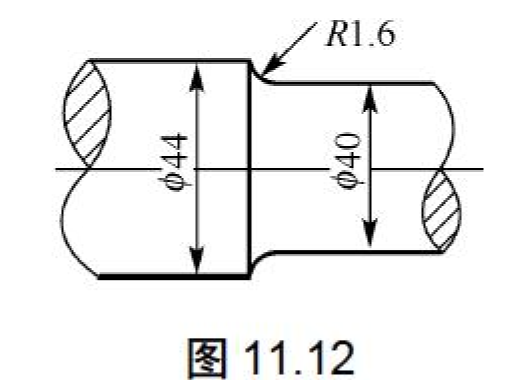


图 11.12

把以上求得的 $\sigma_{\max}$、K_σ、ε_σ、β 等代入公式(11.21)，求出 A—A 处的工作安全因数为

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\dfrac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta}\sigma_{\max}} = \frac{220}{\dfrac{1.65}{0.84\times 0.936}\times 70} = 1.5$$

规定的安全因数为 $n = 1.4$。所以，轴在截面 A—A 处满足强度条件式(11.20)。

例 11.2　图 11.12 所示为电机轴的一段。此轴表面经车削加工，轴的材料为碳钢，$\sigma_b = 600\text{MPa}$，$\sigma_{-1} = 250\text{MPa}$，根据受力情况求得轴截面变化处的弯矩 $M = 300\text{N}\cdot\text{m}$。规定安全因数为 $n = 2$，试校核该截面强度。

解：计算最大工作应力

$$\sigma_{\max}=\frac{M}{W_z}=\frac{300}{0.1\times40^3\times10^{-9}}\text{Pa}=46.9\times10^6\text{Pa}=46.9\text{MPa}$$

$$\sigma_{\min}=-46.9\text{MPa}$$

$$r=-1$$

现在确定轴在该截面上的系数K_σ、ε_σ和β。

$$\frac{D}{d}=\frac{44}{40}=1.1,\quad \frac{R}{d}=\frac{1.6}{40}=0.04$$

由图 11.8(a)中的曲线 2 查得，当$\sigma_b=600\text{MPa}$时，$K_\sigma=1.66$，由表 11.1 查得$\varepsilon_\sigma=0.88$。由于轴表面经切削加工，由表 11.2，使用线性插值法，求得$\beta=0.925$。

把以上求得的$\sigma_{\max}$、K_σ、ε_σ和β等代入式(11.21)，求出A—A处的工作安全因数为

$$n_\sigma=\frac{\sigma_{-1}}{\dfrac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma\beta}\sigma_{\max}}=\frac{250}{\dfrac{1.66}{0.88\times0.925}\times46.9}=2.6$$

规定的安全因数为$n=2$。所以，轴在该截面处满足强度条件式(11.20)。

11.5 持久极限曲线

在不对称循环交变应力作用的情况下，用σ_r表示持久极限。σ_r的下标 r 代表循环特征。例如，脉动循环$r=0$，其持久极限记为σ_0。与测定对称循环持久极限σ_{-1}的方法相似，在给定的循环特征r下进行疲劳试验，求得相应的S–N曲线。图 11.13 即为这种曲线的示意图。利用S–N曲线便可确定不同r值的持久极限σ_r。

选取以平均应力σ_m为横轴，应力幅σ_a为纵轴的坐标系如图 11.14 所示。对任一个应力循环，由它的σ_m和σ_a便可在坐标系中确定一个对应的P点。由式(11.4)知，若把一点的纵、横坐标相加，就是该点所代表的应力循环的最大应力，即

$$\sigma_a+\sigma_m=\sigma_{\max} \tag{11.23}$$

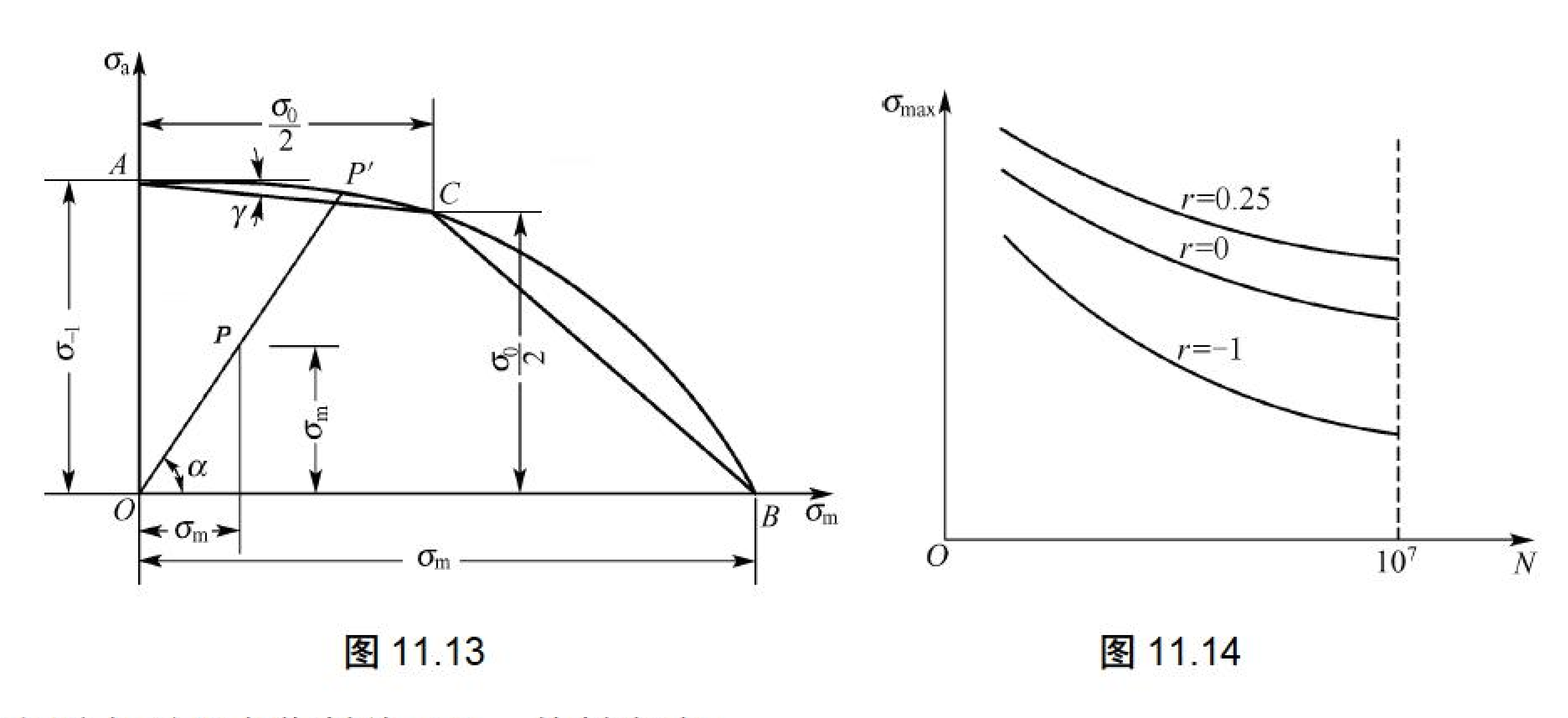


图 11.13　　图 11.14

由原点到P点作射线OP，其斜率为

$$\tan\alpha = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} = \frac{1-r}{1+r} \tag{11.24}$$

可见循环特征 r 相同的所有应力循环都在同一射线上。离原点越远，纵、横坐标之和越大，应力循环的σ_{max}也越大。显然，只要σ_{max}不超过同一 r 下的持久极限σ_r，就不会出现疲劳失效。故在每一条由原点出发的射线上，都有一个由持久极限确定的临界点(如OP线上的点P')。对于对称循环，$r=-1$，$\sigma_m=0$，$\sigma_a=\sigma_{max}$，表明与对称循环对应的点都在纵轴上。由σ_b在横轴上确定静载的临界点B。脉动循环$r=0$，由式(11.24)知$\tan\alpha=1$，故与脉动循环对应的点都在$\alpha=45^\circ$的射线上，与其持久极限σ_0相应的临界点为 C。总之，对任一循环特征r，都可确定与其持久极限相应的临界点。将这些点连成曲线即为持久极限曲线，如图 11.13 中的曲线$AP'CB$。

在$\sigma_m-\sigma_a$坐标平面内，持久极限曲线与坐标轴围成一个区域。在这个区域内的点，如 P 点，它所代表的应力循环的最大应力(等于 P 点纵、横坐标之和)，必然小于同一 r 下的持久极限(等于P'点纵、横坐标之和)，所以不会引起疲劳。

由于需要较多的试验资料才能得到持久极限曲线，所以通常采用简化的持久极限曲线，最常用的简化方法是由对称循环、脉动循环和静载荷确定 A、C、B 三点，用折线ACB代替原来的曲线。折线AC部分的倾角为γ，斜率为

$$\psi_\sigma = \tan\gamma = \frac{\sigma_{-1} - \sigma_0/2}{\sigma_0/2} \tag{11.25}$$

线段AC上的点都与持久极限σ_r相对应，将这些点的坐标记为σ_{rm}和σ_{ra}，于是AC的方程式可以写成

$$\sigma_{ra} = \sigma_{-1} - \psi_\sigma\sigma_{rm} \tag{11.26}$$

系数ψ_σ与材料有关。对拉压或弯曲，碳钢$\psi_\sigma=0.1\sim0.2$，合金钢$\psi_\sigma=0.2\sim0.3$。对扭转，碳钢$\psi_\tau=0.05\sim0.1$，合金钢$\psi_\tau=0.1\sim0.15$。

上述简化折线只考虑了$\sigma_m>0$的情况。对塑性材料，一般认为在σ_m为压应力时仍与σ_m为拉应力时相同。

11.6　非对称循环下构件的疲劳强度计算

11.5 节讨论的持久极限曲线或其简化折线，都是以光滑小试样的试验结果为依据的。对实际构件，则应考虑应力集中、构件尺寸和表面质量的影响。试验结果表明，上述诸因素只影响应力幅，而对平均应力并无影响。即图 11.15 中直线AC的横坐标不变，而纵坐标则应乘以$\dfrac{\varepsilon_\sigma\beta}{K_\sigma}$，这样就得到图 11.15 中的折线$EFB$。由式(11.26)知，代表构件持久极限的直线$EF$的纵坐标应为$\dfrac{\varepsilon_\sigma\beta}{K_\sigma}(\sigma_{-1}-\psi_\sigma\sigma_{rm})$。

构件工作时，若危险点的应力循环由 P 点表示，则$\overline{PI}=\sigma_a$，$\overline{OI}=\sigma_m$。保持 r 不变，延长射线OP与EF相交于 G 点，G 点纵、横坐标之和就是持久极限σ_r，即$\overline{OH}+\overline{GH}=\sigma_r$。构件的工作安全因数应为



$$n_\sigma = \frac{\sigma_r}{\sigma_{\max}} = \frac{\overline{OH} + \overline{GH}}{\sigma_m + \sigma_a} = \frac{\sigma_{rm} + \overline{GH}}{\sigma_m + \sigma_a} \tag{11.27}$$

因为 G 点在直线 EF 上，其纵坐标应为

$$\overline{GH} = \frac{\varepsilon_\sigma \beta}{K_\sigma} \cdot \left(\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_{rm}\right) \tag{11.28}$$

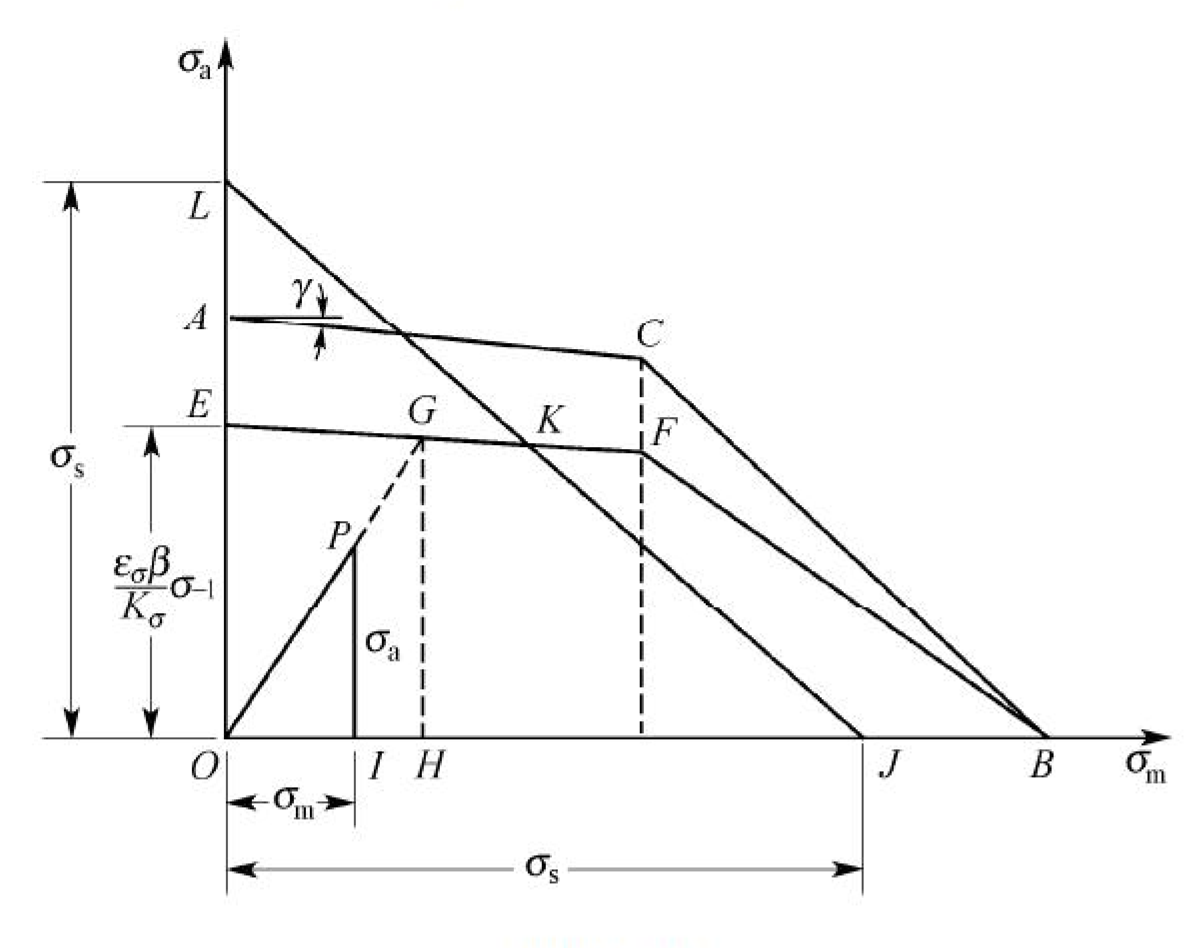


图 11.15

再由△ OPI 和△ OGH 的相似关系，得

$$\overline{GH} = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \sigma_{rm} \tag{11.29}$$

从式(11.28)、式(11.29)中解出

$$\sigma_{rm} = \frac{\sigma_{-1}}{\dfrac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta}\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} \sigma_m ,\quad \overline{GH} = \frac{\sigma_{-1}}{\dfrac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta}\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} \sigma_a$$

代入式(11.27)，即可求得

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\dfrac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta}\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} \tag{11.30}$$

构件的工作安全因数 n_σ 应大于或等于规定的安全因数 n，即强度条件仍为

$$n_\sigma \geqslant n \tag{11.31}$$

n_σ 是对正应力写出的。若为扭转，工作安全因数应写成

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\dfrac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \beta}\tau_a + \psi_\tau \tau_m} \tag{11.32}$$

除满足疲劳强度条件外，构件危险点的 $\sigma_{\max}$ 还应低于屈服极限 σ_s。在 $\sigma_m - \sigma_a$ 坐标系中，有

$$\sigma_{\max} = \sigma_a + \sigma_m = \sigma_s$$

这是斜直线 LJ。显然，代表构件最大应力的点应落在直线 LJ 的下方。所以，保证构件不

发生疲劳失效也不发生塑性变形的区域是折线 EKJ 与坐标轴围成的区域。

强度计算时，由构件工作应力的循环特征 r 确定射线 OP。若射线先与直线 EF 相交，则应由式(11.30)计算 n_σ，进行疲劳强度校核。若射线先与直线 LJ 相交，则表示构件在疲劳失效之前已发生塑性变形，应按静强度校核，强度条件为

$$n_\sigma = \frac{\sigma_s}{\sigma_{max}} \geqslant n_s \tag{11.33}$$

一般地说，对 $r > 0$ 的情况，应按式(11.33)补充静强度校核。

例 11.3　图 11.16 所示圆杆上有一个沿直径的贯穿圆孔，非对称交变弯矩为 $M_{max} = 5M_{min} = 512\text{N}\cdot\text{m}$。材料为合金钢，$\sigma_b = 950\text{MPa}$，$\sigma_s = 540\text{MPa}$，$\sigma_{-1} = 430\text{MPa}$，$\psi_\sigma = 0.2$。圆杆表面经磨削加工。若规定安全因数 $n = 2$、$n_s = 1.5$，试校核此杆的强度。

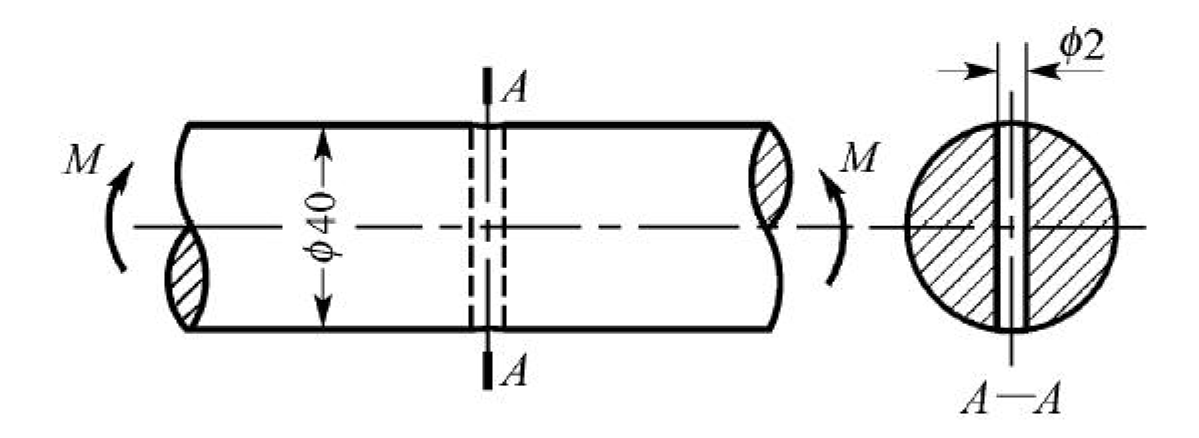


图 11.16

解：(1) 计算圆杆的工作应力。

$$W = \frac{\pi}{32}d^3 = \frac{\pi}{32} \times 4^3\,\text{cm}^3 = 6.28\text{cm}^3$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{512}{6.28 \times 10^{-6}}\text{Pa} = 81.5 \times 10^6\,\text{Pa} = 81.5\text{MPa}$$

$$\sigma_{min} = \frac{1}{5}\sigma_{max} = 16.3\text{MPa}$$

$$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = \frac{81.5 + 16.3}{2}\text{MPa} = 48.9\text{MPa}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = 32.6\text{MPa}$$

(2) 确定系数 K_σ、ε_σ 和 β。按照圆杆的尺寸，$\frac{d_0}{d} = \frac{2}{40} = 0.05$。由图 11.9(a)中的曲线 6 查得，当 $\sigma_b = 950\text{MPa}$ 时，$K_\sigma = 2.18$。由表 11.1 查出：$\varepsilon_\sigma = 0.77$。由表 11.2 查得，表面经磨削加工的杆件，$\beta = 1$。

(3) 疲劳强度校核。由式(11.30)计算工作安全因数。

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta}\sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m} = \frac{430}{\frac{2.18}{0.77 \times 1} \times 32.6 + 0.2 \times 48.9} = 4.21$$

规定的安全因数为 $n = 2$。$n_\sigma > n$，所以疲劳强度是足够的。

(4) 静强度校核。因为 $r = 0.2 > 0$，所以需要校核静强度。由式(11.33)计算出最大应力

对屈服极限的工作安全因数为

$$n_\sigma = \frac{\sigma_s}{\sigma_{max}} = \frac{540}{81.5} = 6.62 > n_s$$

所以静强度条件也是满足的。

11.7 弯扭组合交变应力的强度计算

弯曲和扭转组合下的交变应力在工程中最为常见。在同步的弯扭组合对称循环交变应力下，钢材光滑小试样的试验资料表明，持久极限中的弯曲正应力 σ_{rb} 和扭转切应力 τ_{rt} 满足下列椭圆关系，即

$$\left(\frac{\sigma_{rb}}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{rt}}{\tau_{-1}}\right)^2 = 1 \tag{11.34}$$

式中，σ_{-1} 为单一的弯曲对称循环持久极限；τ_{-1} 为单一的扭转对称循环持久极限。为把应力集中、构件尺寸和表面质量等因素考虑在内，以 $\dfrac{\varepsilon_\sigma \beta}{K_\sigma}$ 乘第一项的分子、分母，以 $\dfrac{\varepsilon_\tau \beta}{K_\tau}$ 乘第二项的分子、分母，并将 $\dfrac{\varepsilon_\sigma \beta}{K_\sigma}\sigma_{rb}$ 记为 $(\sigma_b)_d$、$\dfrac{\varepsilon_\tau \beta}{K_\tau}\tau_{rt}$ 记为 $(\tau_t)_d$，它们分别代表构件持久极限中的弯曲正应力和扭转切应力。于是式(11.34)化为

$$\left[\frac{(\sigma_b)_d}{\dfrac{\varepsilon_\sigma \beta}{K_\sigma}\sigma_{-1}}\right]^2 + \left[\frac{(\tau_t)_d}{\dfrac{\varepsilon_\tau \beta}{K_\tau}\tau_{-1}}\right]^2 = 1 \tag{11.35}$$

在图 11.17 中画出了式(11.35)所表示的椭圆的 1/4。显然，椭圆所围成的区域是不引起疲劳失效的范围。

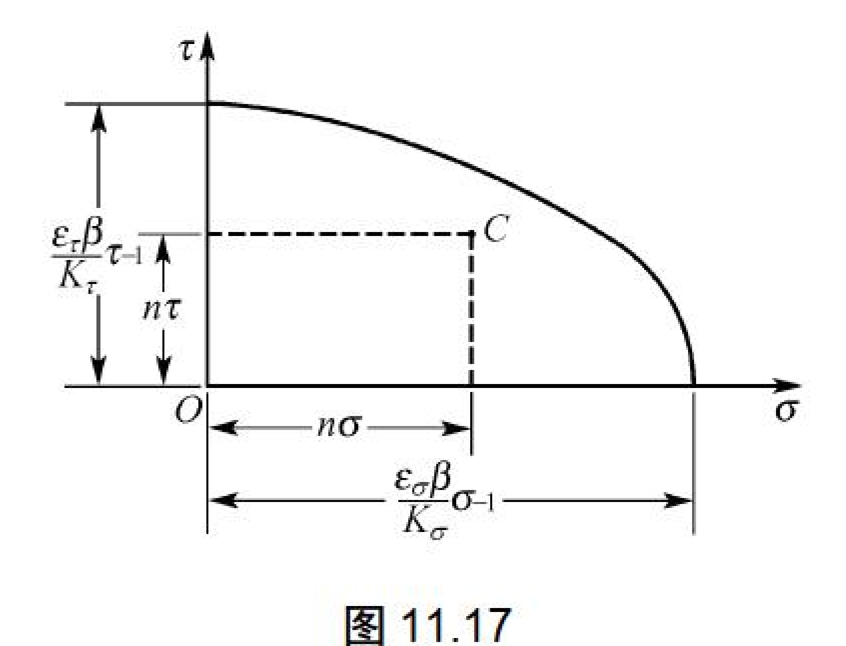


图 11.17

在弯扭组合交变应力下，设构件的工作弯曲正应力为 σ，扭转切应力为 τ。若设想把两部分应力扩大 n 倍(n 为规定的安全因数)，则由 $n\sigma$ 和 $n\tau$ 确定的点 C 应该落在椭圆的内部，或者最多落在椭圆上，即

$$\left(\frac{n\sigma}{\frac{\varepsilon_\sigma\beta}{K_\sigma}\sigma_{-1}}\right)^2+\left(\frac{n\tau}{\frac{\varepsilon_\tau\beta}{K_\tau}\tau_{-1}}\right)^2\leqslant 1 \tag{11.36}$$

由式(11.21)、式(11.22)可知

$$\frac{\sigma}{\frac{\varepsilon_\sigma\beta}{K_\sigma}\sigma_{-1}}=\frac{1}{\frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma\beta}\sigma}}=\frac{1}{n_\sigma} \tag{11.37}$$

$$\frac{\tau}{\frac{\varepsilon_\tau\beta}{K_\tau}\tau_{-1}}=\frac{1}{\frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau\beta}\tau}}=\frac{1}{n_\tau} \tag{11.38}$$

式中：n_σ 为单一弯曲对称循环的工作安全因数；n_τ 为单一扭转对称循环的工作安全因数。把式(11.37)、式(11.38)代入式(11.36)，略做整理即可得出

$$\frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2+n_\tau^2}}\geqslant n \tag{11.39}$$

这就是弯扭组合对称循环下的强度条件。把式(11.39)的左端记为 $n_{\sigma\tau}$，作为构件在弯扭组合交变应力下的安全因数，强度条件便可写成

$$n_{\sigma\tau}=\frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2+n_\tau^2}}\geqslant n \tag{11.40}$$

当弯扭组合为非对称循环时，仍按式(11.40)计算，但这时 n_σ 和 n_τ 应由非对称循环的式(11.30)和式(11.32)求出。

例 11.4　阶梯轴的尺寸如图 11.18 所示。材料为合金钢，$\sigma_b=900\text{MPa}$，$\sigma_{-1}=410\text{MPa}$，$\tau_{-1}=240\text{MPa}$。作用于轴上的弯矩变化在 $-1000\sim+1000\text{N}\cdot\text{m}$ 之间，扭矩变化在 $0\sim1500\text{N}\cdot\text{m}$ 之间。若规定安全因数 $n=2$，试校核轴的疲劳强度。

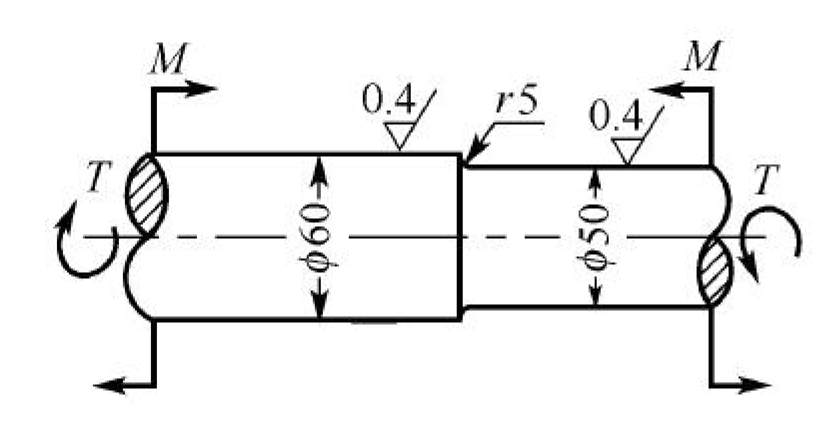


图 11.18

解：(1)　计算圆杆的工作应力。首先计算交变弯曲正应力及其循环特征。

$$W=\frac{\pi}{32}d^3=\frac{\pi}{32}\times5^3\text{cm}^3=12.3\text{cm}^3$$

$$\sigma_{max}=\frac{M_{max}}{W}=\frac{1000}{12.3\times10^{-6}}\text{Pa}=81.3\text{MPa}$$

$$\sigma_{min}=\frac{M_{min}}{W}=-\frac{1000}{12.3\times10^{-6}}\text{Pa}=-81.3\text{MPa}$$

$$r=\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}=-1$$

其次计算交变扭转切应力及其循环特征，即

$$W_{\mathrm{t}}=\frac{\pi}{16}d^3=\frac{\pi}{16}\times 5^3\,\mathrm{cm}^3=24.6\mathrm{cm}^3$$

$$\tau_{\max}=\frac{T_{\max}}{W_{\mathrm{t}}}=\frac{1500}{24.6\times 10^{-6}}\mathrm{Pa}=61\mathrm{MPa}\ ,\quad \tau_{\min}=0$$

$$r=\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}=0\ ,\quad \tau_{\mathrm{a}}=\frac{\tau_{\max}}{2}=30.5\mathrm{MPa}\ ,\quad \tau_{\mathrm{m}}=\frac{\tau_{\max}}{2}=30.5\mathrm{MPa}$$

(2) 确定各种系数。根据$\frac{D}{d}=\frac{60}{50}=1.2$，$\frac{r}{d}=\frac{5}{50}=0.1$。由图 11.8(b)查得$K_\sigma=1.55$，由图 11.8(d)查得$K_\tau=1.24$。

由于名义应力$\tau_{\max}$是按轴直径等于 50mm 计算的，所以尺寸因数也应按轴直径等于 50mm 来确定。由表 11.1 查得$\varepsilon_\sigma=0.73$，$\varepsilon_\tau=0.78$。

由表 11.2，$\beta=1$。

对合金钢取$\psi_\tau=0.1$。

(3) 计算弯曲工作安全因数n_σ和扭转工作安全因数n_τ。因为弯曲正应力是对称循环，$r=-1$，故按式(11.21)计算其工作安全因数n_σ，即

$$n_\sigma=\frac{\sigma_{-1}}{\dfrac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma\beta}\sigma_{\max}}=\frac{240}{\dfrac{1.55}{0.73\times 1}\times 81.3}=2.38$$

扭转切应力是脉动循环，$r=0$，应按非对称循环计算工作安全因数的式(11.32)计算n_τ，即

$$n_\tau=\frac{\tau_{-1}}{\dfrac{K_\tau}{\varepsilon_\tau\beta}\tau_{\mathrm{a}}+\psi_\sigma\tau_{\mathrm{m}}}=\frac{240}{\dfrac{1.24}{0.78\times 1}\times 30.5+0.1\times 30.5}=4.66$$

(4) 计算弯扭组合交变应力下轴的工作安全因数$n_{\sigma\tau}$。由式(11.40)，有

$$n_{\sigma\tau}=\frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2+n_\tau^2}}=\frac{2.38\times 4.66}{\sqrt{2.38^2+4.66^2}}=2.12\geqslant n=2$$

所以满足疲劳强度条件。

11.8 提高构件疲劳强度的措施

疲劳裂纹的形成主要在应力集中部位和构件表面。提高疲劳强度应从减缓应力集中、提高表面质量等方面入手。

1. 减缓应力集中

为了消除或减缓应力集中，在设计构件外形时，要避免出现方形或带有尖角的孔和槽。在截面尺寸突然改变处(如阶梯轴的轴肩)，要采用半径足够大的圆角过渡。

例如，以图 11.19 中的两种情况相比较，过渡圆角半径 r 较大的阶梯轴的应力集中程度就缓和得多。从图 11.8 中的曲线也可看出，随着 r 的增大，有效应力集中因数迅速减小。有时因结构上的原因，难以加大过渡圆角的半径，这时在直径较大的部分轴上开减荷槽(见图 11.20)或退刀槽(见图 11.21)，都可使应力集中有明显减弱。

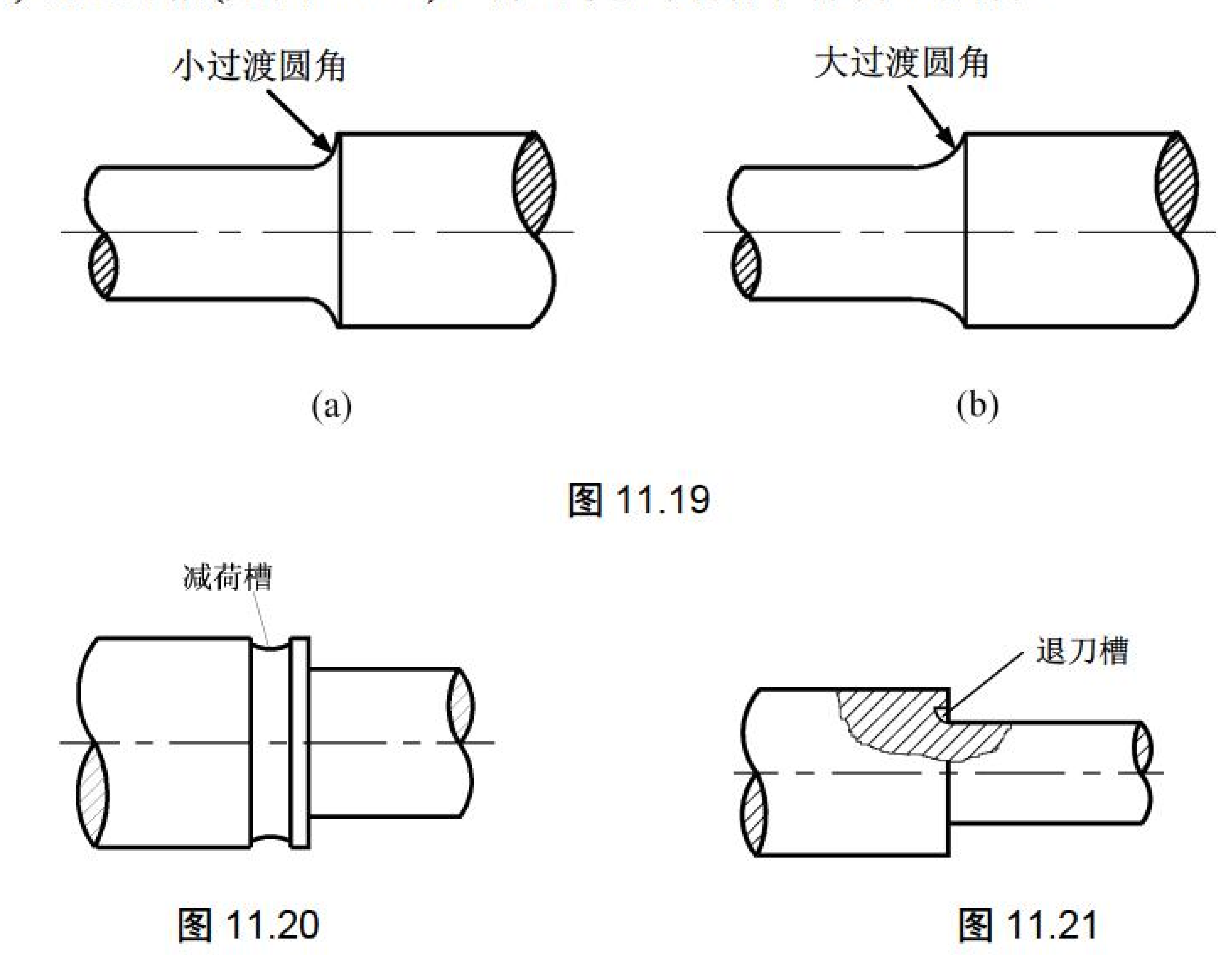


图 11.19

图 11.20　　图 11.21

在紧配合的轮毂与轴配合的面边缘处，有明显的应力集中。若在轮毂上开减荷槽，并加粗轴的配合部分(见图 11.22)，以减小轮毂与轴之间的刚度差距，便可以改善配合面边缘处应力集中的情况，在角焊缝处，如采用图 11.23(a)所示坡口焊接，应力集中程度要比无坡口焊接(见图 11.23(b))改善很多。

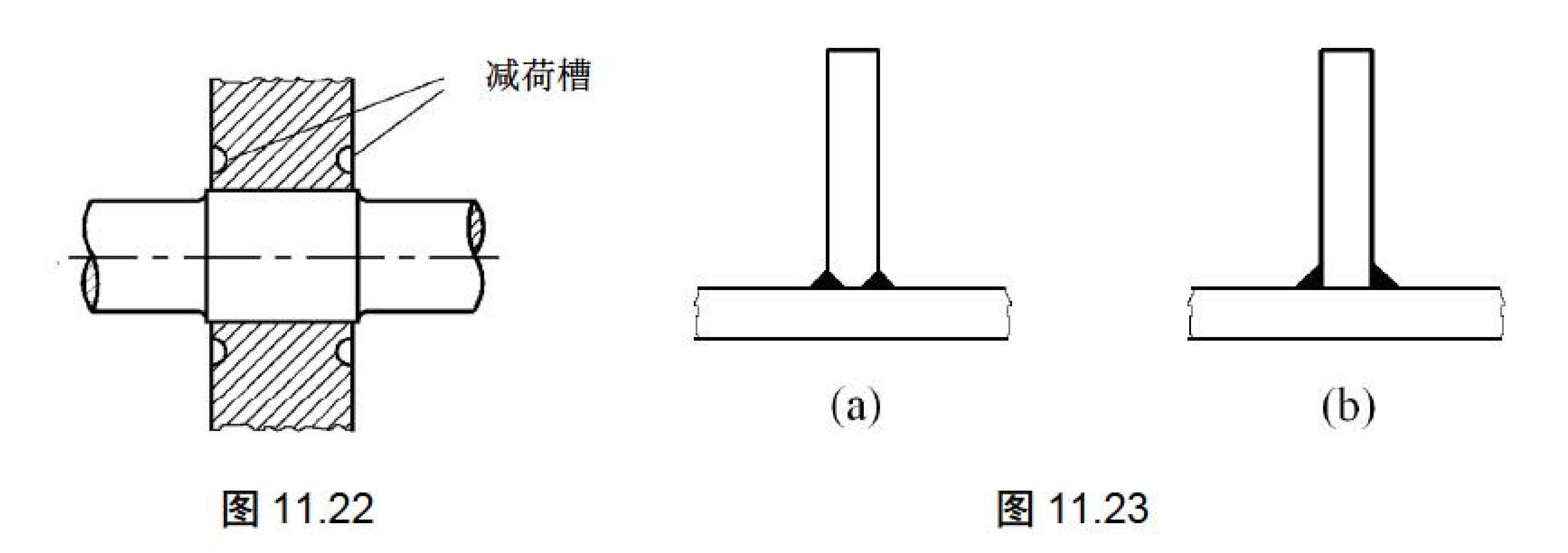


图 11.22　　图 11.23

2. 降低表面粗糙度

构件表面加工质量对疲劳强度影响很大，疲劳强度要求较高的构件，应有较低的表面粗糙度值。高强度钢对表面粗糙度更为敏感，只有经过精加工，才有利于发挥它的高强度性能；否则将会使持久极限大幅度下降，失去采用高强度钢的意义。在使用中也应尽量避免使构件表面受到机械损伤(如划伤、打印等)或化学损伤(如腐蚀、生锈等)。

3. 增加表面强度

为了强化构件的表面，可采用热处理和化学处理，如表面高频淬火、渗碳、氮化等，

皆可使构件疲劳强度有显著提高。但采用这些方法时，要严格控制工艺过程；否则将造成微细裂纹，反而降低持久极限。也可以用机械方法强化表层，如滚压、喷丸等，以提高构件的疲劳强度。

本章小结

交变应力是指随时间作周期性变化的应力；疲劳失效是构件在应力远远低于强度极限，甚至远低于屈服极限的情况下，突然发生的断裂。

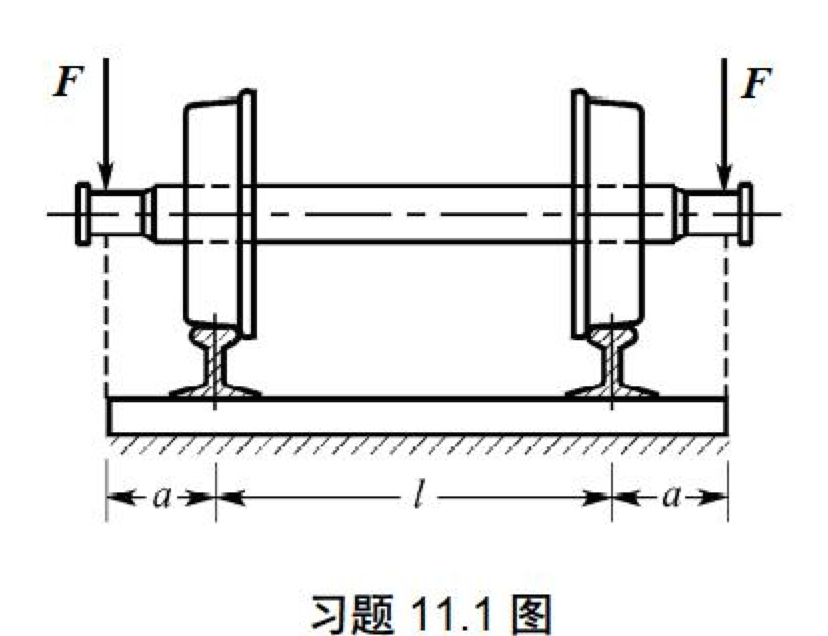
疲劳失效的特点是：①交变应力的破坏应力值一般低于静载荷作用下的强度极限值，甚至低于材料屈服极限；②交变应力作用下的破坏均表现为脆性断裂，无明显的塑性变形；③破坏的断口可明显区分为光滑区和粗糙区。

习　题

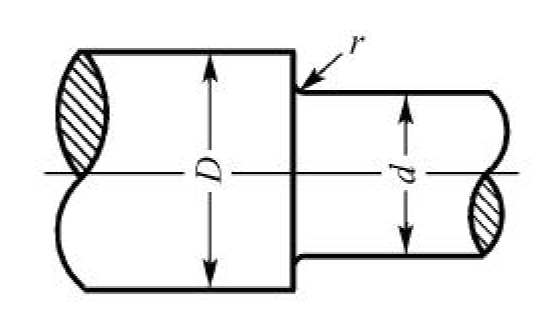
11.1　火车轮轴受力情况如习题 11.1 图所示，$a = 500\text{mm}$，$l = 1435\text{mm}$，轮轴中段直径 $d = 15\text{cm}$。若 $F = 50\text{kN}$，试求轮轴中段截面边缘上任一点的最大应力 $\sigma_{\max}$、最小应力 $\sigma_{\min}$、循环特征 r，并作出 $\sigma - t$ 曲线图。

11.2　柴油发电机连杆大头螺钉在工作时受到的最大拉力 $F_{\max} = 58.3\text{kN}$，最小拉力 $F_{\min} = 55.8\text{kN}$。螺纹处内径 $d = 11.5\text{mm}$。试求其平均应力 σ_{m}、应力幅 σ_{a}、循环特征 r，并作出 $\sigma - t$ 曲线。

11.3　阶梯轴如习题 11.3 图所示，材料为铬镍合金钢，$\sigma_{\text{b}} = 920\text{MPa}$，$\sigma_{-1} = 420\text{MPa}$，$\tau_{-1} = 250\text{MPa}$。轴的尺寸是：$d = 40\text{mm}$，$D = 50\text{mm}$，$r = 5\text{mm}$，求弯曲和扭转时的有效应力集中因数和尺寸因数。



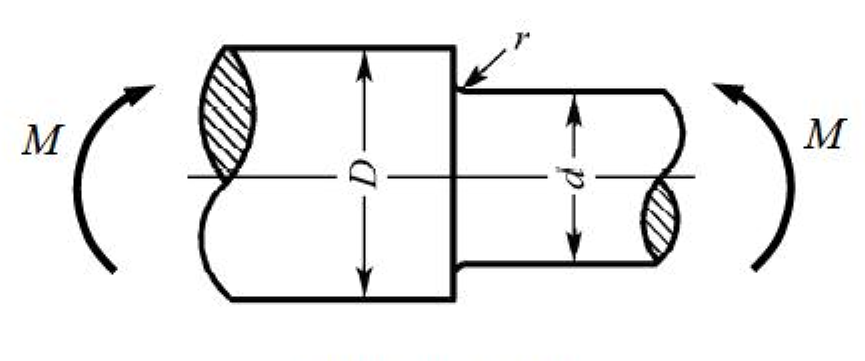
习题 11.1 图



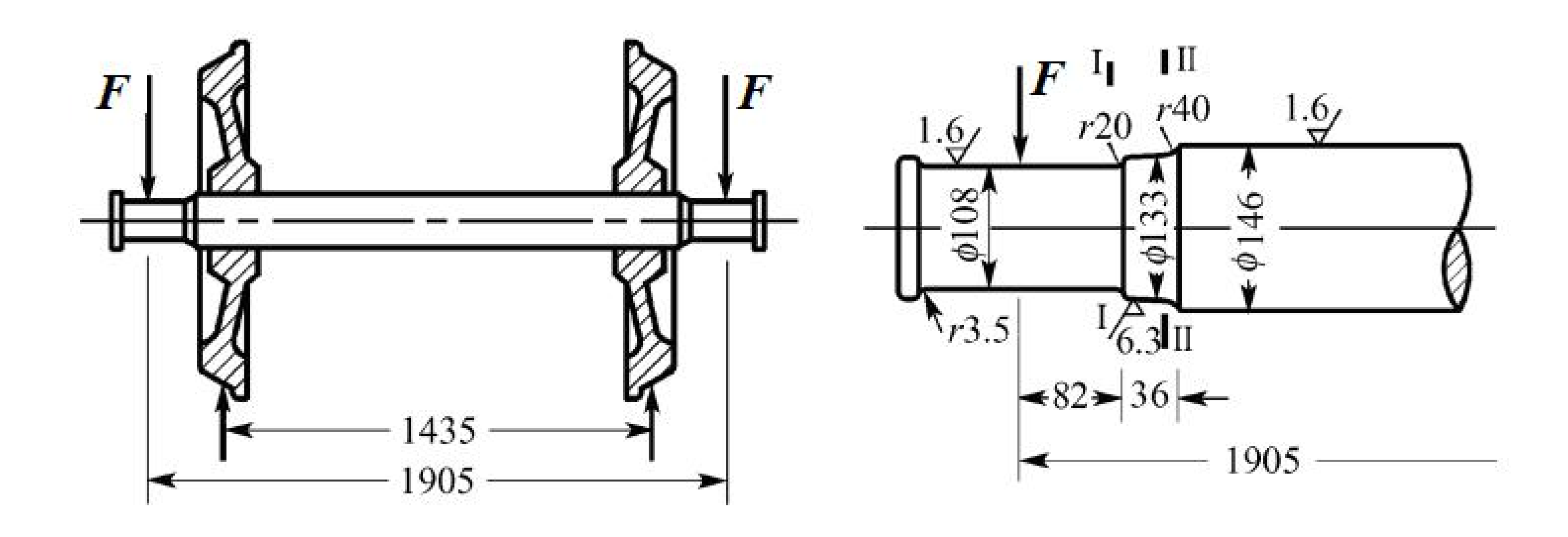
习题 11.3 图

11.4　如习题 11.4 图所示，旋转碳钢轴上，作用一不变的力偶 $M = 0.8\text{kN}\cdot\text{m}$，轴表面经过精车，$\sigma_{\text{b}} = 600\text{MPa}$，$\sigma_{-1} = 250\text{MPa}$，轴的尺寸为 $D = 70\text{mm}$，$d = 50\text{mm}$，$r = 7.5\text{mm}$，规定安全因数 $n = 1.9$，试校核轴的强度。

11.5　如习题 11.5 图所示，货车轮轴两端载荷 $F = 110\text{kN}$，材料为车轴钢，$\sigma_{\text{b}} = 500\text{MPa}$，$\sigma_{-1} = 240\text{MPa}$。规定安全因数 $n = 1.5$。试校核Ⅰ—Ⅰ和Ⅱ—Ⅱ截面的强度。



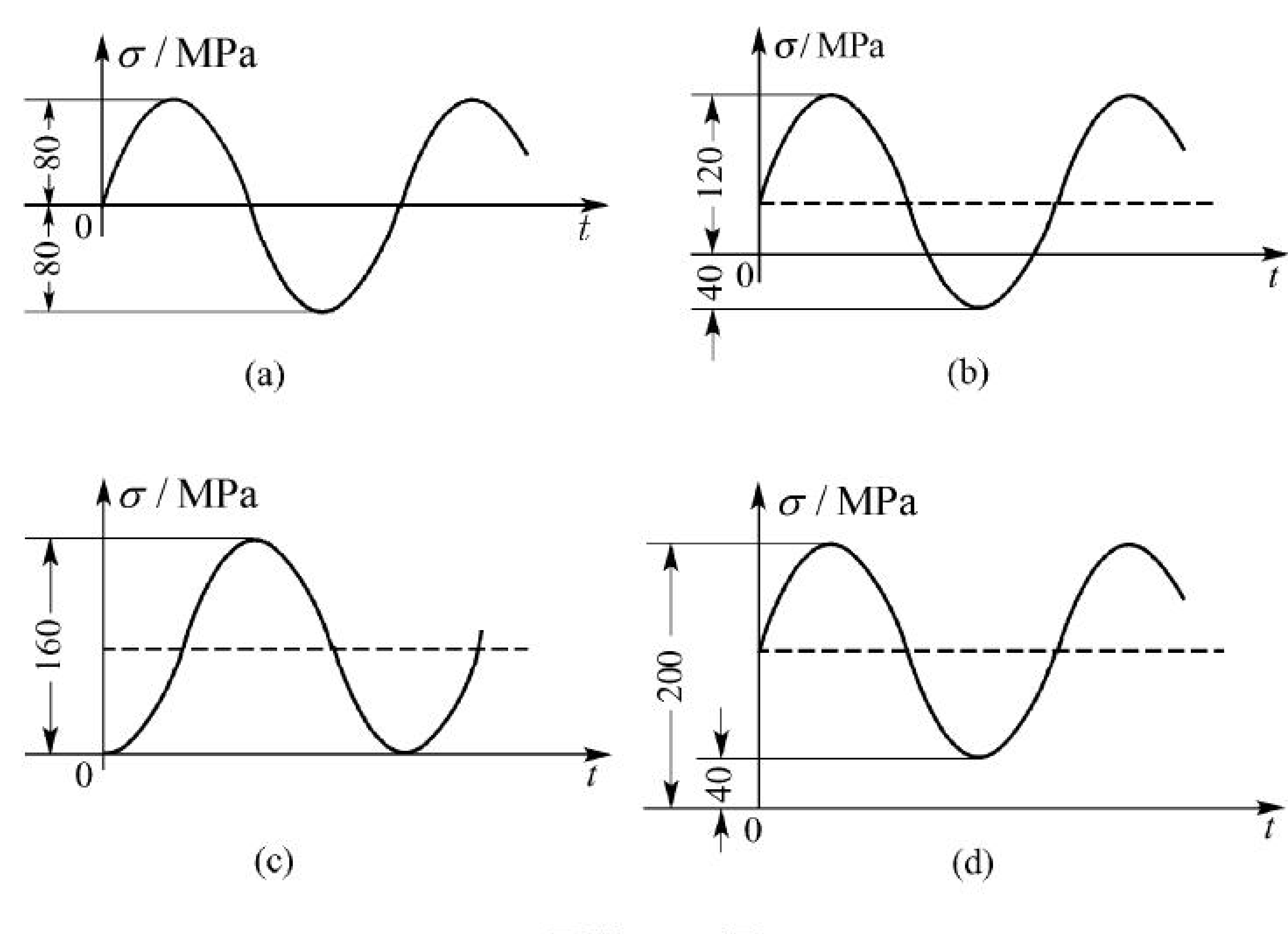
习题 11.4 图



习题 11.5 图

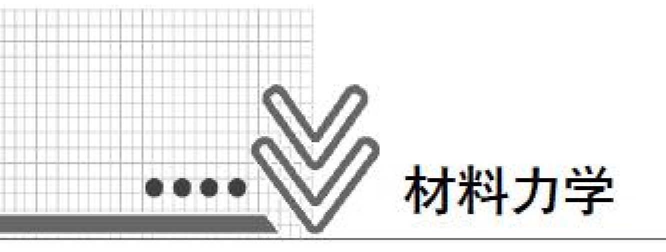
11.6　在$\sigma_m - \sigma_a$坐标系中，标出与习题 11.6 图所示应力循环对应的点，并求出自原点出发并通过这些点的射线与σ_m轴的交角α。

11.7　如习题 11.7 图所示，电动机轴直径$d = 30\text{mm}$，轴上开有端铣加工的键槽。轴的材料是合金钢，$\sigma_b = 750\text{MPa}$，$\tau_b = 400\text{MPa}$，$\tau_s = 260\text{MPa}$，$\tau_{-1} = 190\text{MPa}$。轴在$n = 750\text{r/min}$的转速下传递功率$N = 20$马力(1 马力=735.499W)。该轴时而工作时而停止，但没有反向旋转。轴表面经磨削加工。若规定安全因数$n = 2$，$n_s = 1.5$，试校核轴的强度。

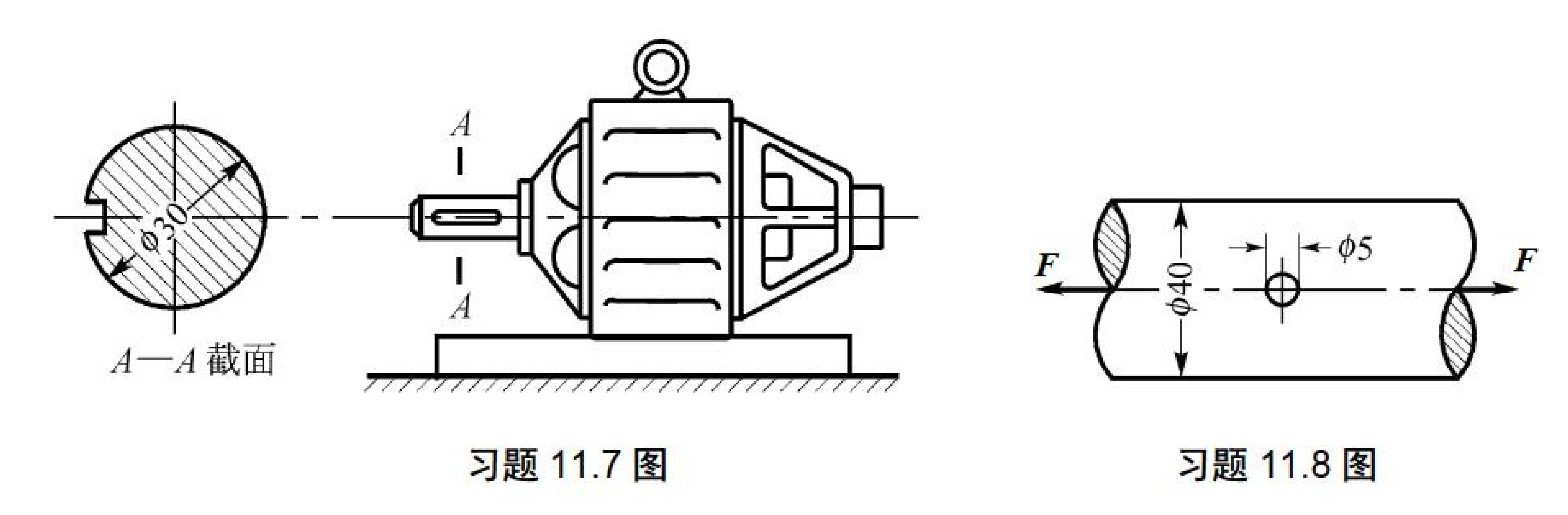


习题 11.6 图

11.8　如习题 11.8 图所示，圆杆表面未经加工，且因径向圆孔而削弱。杆受由 0～F_{max}的交变轴向力作用。已知材料为普通碳钢，$\sigma_b = 600\text{MPa}$，$\sigma_s = 340\text{MPa}$，$\sigma_{-1} = 200\text{MPa}$。



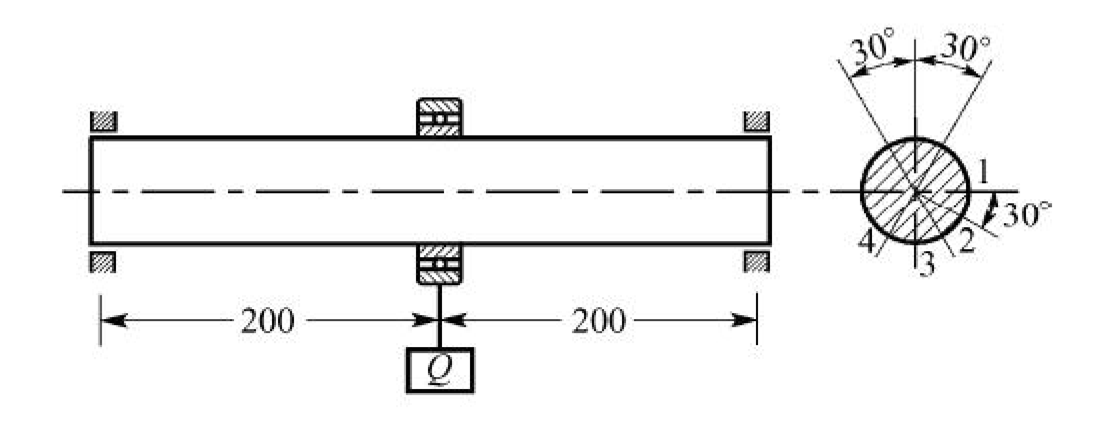
取$\psi_{\sigma}=0.1$，规定安全因数$n=1.7$，$n_{s}=1.5$，试求最大载荷。



习题 11.7 图　　　　习题 11.8 图

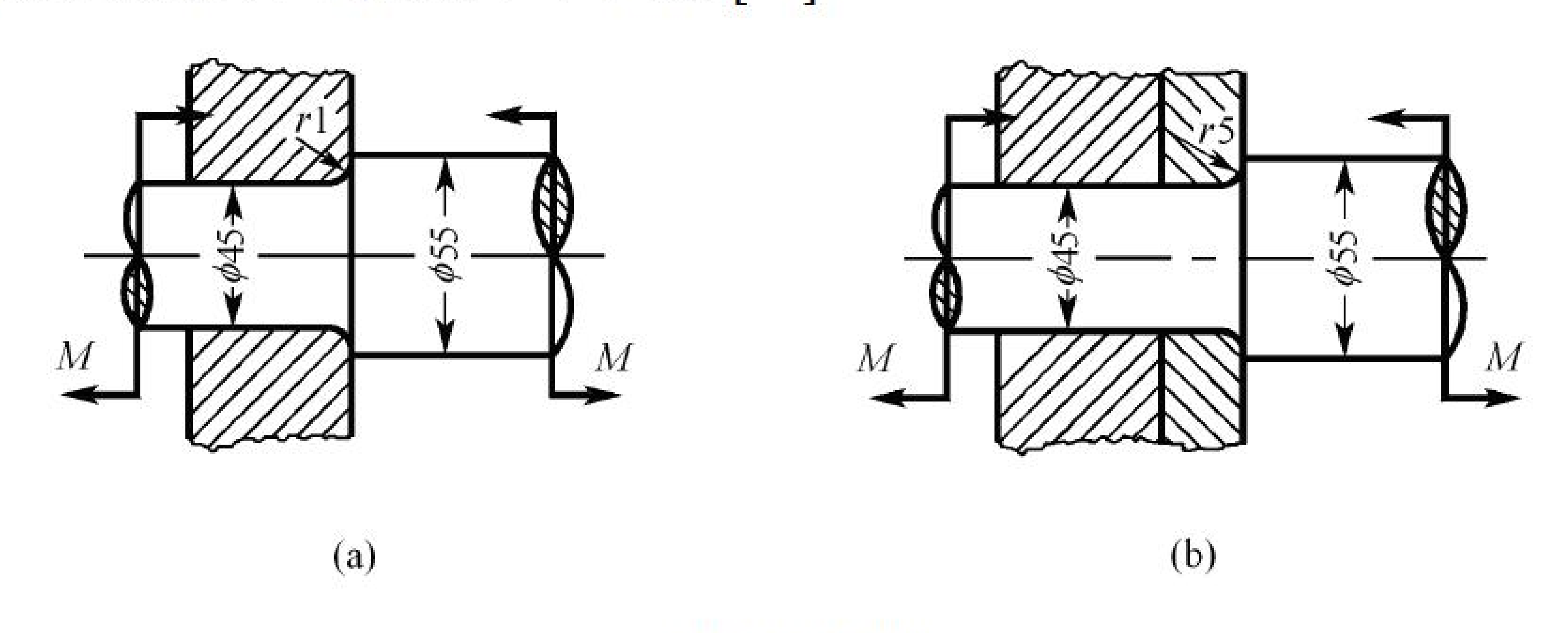
11.9　某发动机排气阀的密圈螺旋弹簧，其平均直径$D=60\text{mm}$，圈数$n=10$，簧丝直径$d=6\text{mm}$。弹簧材料的$\sigma_{b}=1300\text{MPa}$，$\tau_{b}=400\text{MPa}$，$\tau_{s}=500\text{MPa}$，$\tau_{-1}=300\text{MPa}$，$G=80\text{GPa}$。弹簧在预压缩量$\lambda_1=40\text{mm}$和最大压缩量$\lambda_{max}=90\text{mm}$范围内工作。若取$\beta=1$，试求弹簧的工作安全因数。

11.10　如习题 11.10 图所示，重物Q通过轴承对圆轴作用一垂直方向的力，$Q=10\text{kN}$，而轴在$\pm30^\circ$范围内往复摆动。已知材料的$\sigma_{b}=600\text{MPa}$，$\sigma_{-1}=250\text{MPa}$，$\sigma_{s}=340\text{MPa}$，$\psi_{\sigma}=0.1$。试求危险截面上的点 1、2、3、4 的应力变化的循环特征以及工作安全因数。



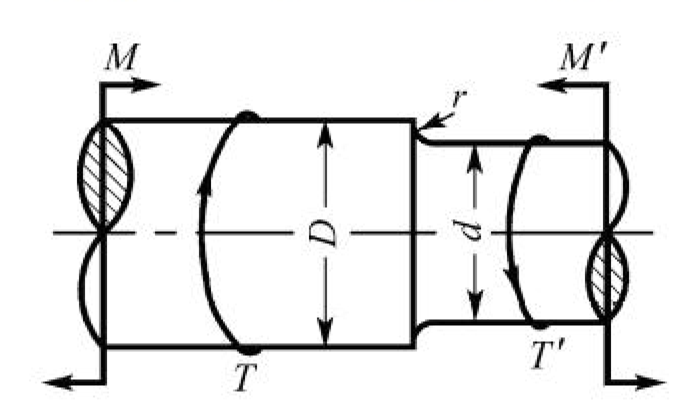
习题 11.10 图

11.11　卷扬机阶梯轴的某段需要安装一滚珠轴承，因滚珠轴承内座圈上圆角半径很小，若装配时不用定距环，如习题 11.11 图(a)所示，则轴上的圆角半径应为$r_1=1\text{mm}$，若增加一定距环，如习题 11.11 图(b)所示，则轴上圆角半径可增加为$r_2=5\text{mm}$。已知材料为 45 钢，$\sigma_{b}=520\text{MPa}$，$\sigma_{-1}=220\text{MPa}$，$\beta=1$，规定安全因数$n=1.7$。试比较轴在图(a)、图(b)两种情况下，对称循环许可弯矩$[M]$。



习题 11.11 图

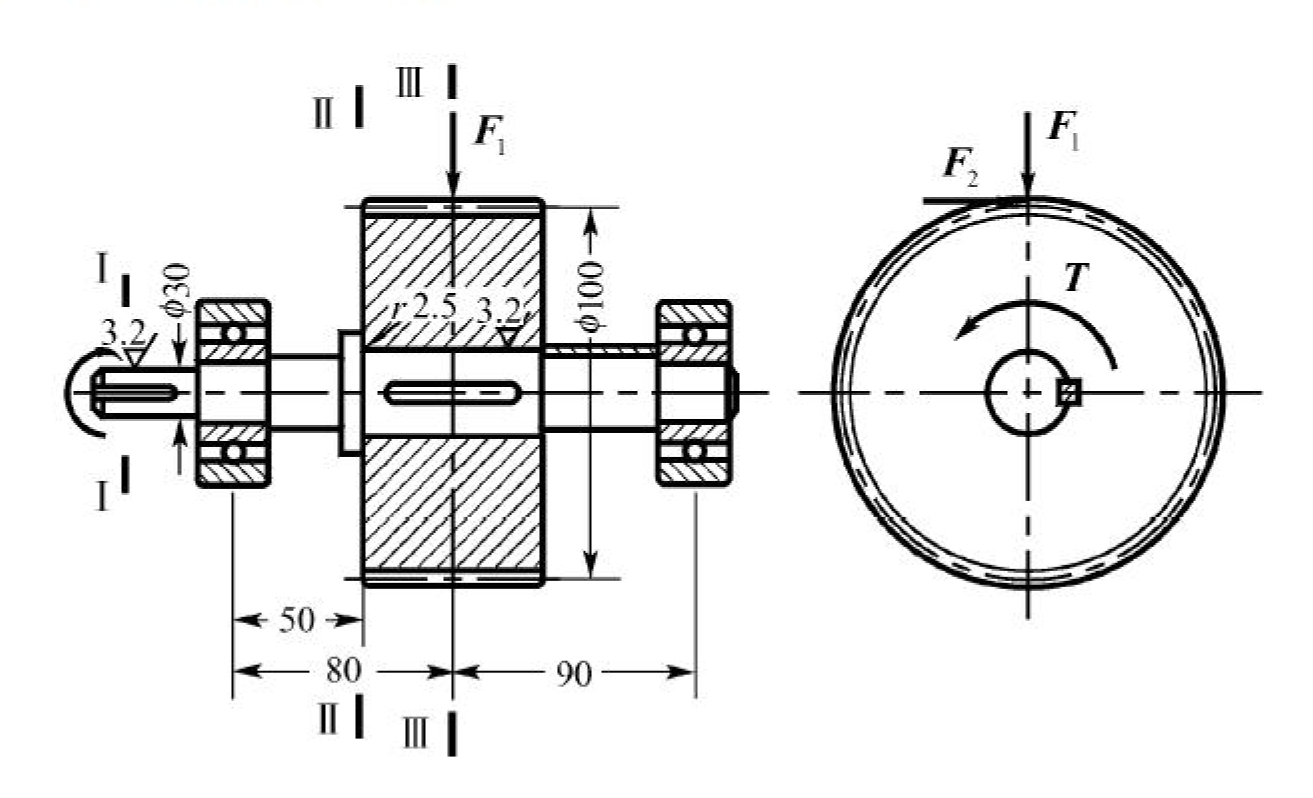
11.12　如习题 11.12 图所示，直径 $D=50\text{mm}$、$d=40\text{mm}$ 的阶梯轴，受交变弯矩和扭矩的联合作用。圆角半径 $r=2\text{mm}$。正应力从 50MPa 变到 −50MPa；切应力从 40MPa 变到 20MPa。轴的材料为碳钢，$\sigma_{\text{b}}=550\text{MPa}$，$\sigma_{-1}=220\text{MPa}$，$\tau_{-1}=120\text{MPa}$，$\sigma_{\text{s}}=300\text{MPa}$，$\tau_{\text{s}}=180\text{MPa}$。若取 $\psi_\sigma=0.1$，试求此轴的工作安全因数。设 $\beta=1$。



习题 11.12 图

11.13　如习题 11.13 图所示，圆柱齿轮轴，左端由电动机输入功率 $N=40$ 马力(1 马力=735.499W)，转速 $n=800\text{r/min}$。齿轮圆周力为 F_2，径向力 $F_1=0.36F_2$。轴上两个键槽均为端铣加工。安装齿轮处轴径 $\phi40$，左边轴肩直径 $\phi45$。轴的材料为 40Cr，$\sigma_{\text{b}}=900\text{MPa}$，$\sigma_{-1}=410\text{MPa}$，$\tau_{-1}=240\text{MPa}$。规定安全因数 $n=1.8$，试校核轴的疲劳强度。

提示：把扭转切应力作为脉动循环。



习题 11.13 图

第 12 章　能 量 方 法

【本章学习重点】

本章主要学习杆件应变能的计算和应变能的普遍表达式，互等定律和卡氏第二定理，单位载荷法、图乘法及其应用。

【本章学习目标】

- 会计算杆件基本变形的应变能。
- 理解互等定律和卡氏第二定理，并能求解线性弹性体位移。
- 掌握单位载荷法、图乘法及计算位移的解题方法。

12.1　概　　述

在变形固体力学中，利用功和能的概念，建立变形和力之间关系的原理和方法，称为能量方法。对构件的变形计算及静不定结构的求解，能量方法具有重要的作用。计算力学的兴起，使能量方法备受重视。

变形固体在外力作用下产生变形，引起外力作用点的位移。外力将沿其作用线方向上的位移做功。与此同时，在变形固体内部储存了应变能。在加载过程中，若外力从零开始缓慢地增加到最终值，则除应变能外，其他能量变化很小，可以认为全部外力功 W，都转变为变形固体内的应变能 V_ε，即

$$V_\varepsilon = W \tag{12.1}$$

弹性固体的应变能是可逆的，即当外力逐渐解除时，它又可恢复变形，释放出全部的应变能而做功。如果超过了弹性范围，发生的塑性变形将会消耗一部分能量，应变能不能全部再转变为功。根据功能原理，可以导出一系列与能量相关的计算方法。

12.2　杆件应变能的计算

12.2.1　轴向拉伸或压缩

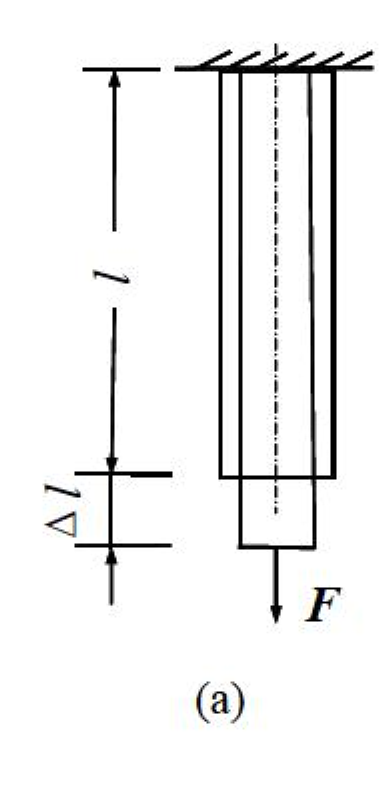
如图 12.1(a)所示拉杆，拉杆端部的集中外力 F，从零开始缓慢地增加到最终值。力作用点的位移也从零逐渐增加到最终值。外力 F 与位移 Δl 之间表现为正比例关系，如图 12.1(b)所示，所以在线弹性范围内，杆件的应变能为

$$V_\varepsilon = W = \frac{1}{2}F\Delta l = \frac{F_{\mathrm{N}}^2 l}{2EA} \tag{12.2}$$

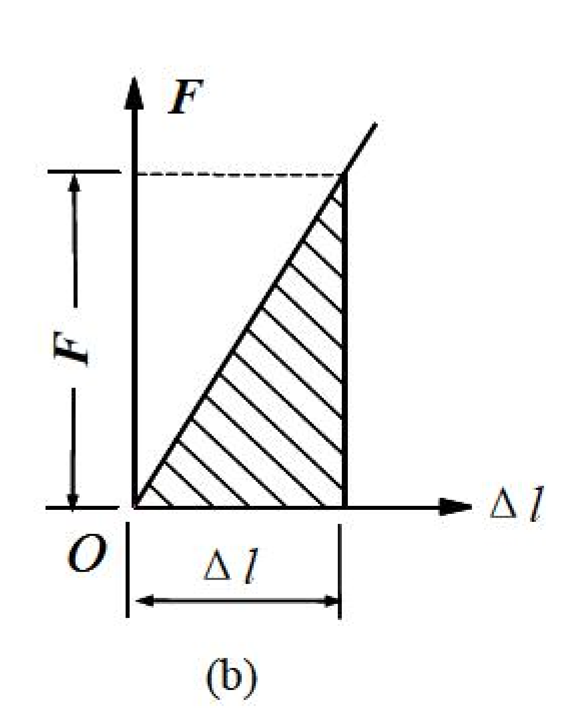
如果轴力 F_{N} 是变化的或者变形超过了弹性极限，则杆件的应变能为



$$V_\varepsilon = \int_l \frac{F_N^2(x)\mathrm{d}x}{2EA} \tag{12.3}$$



(a)



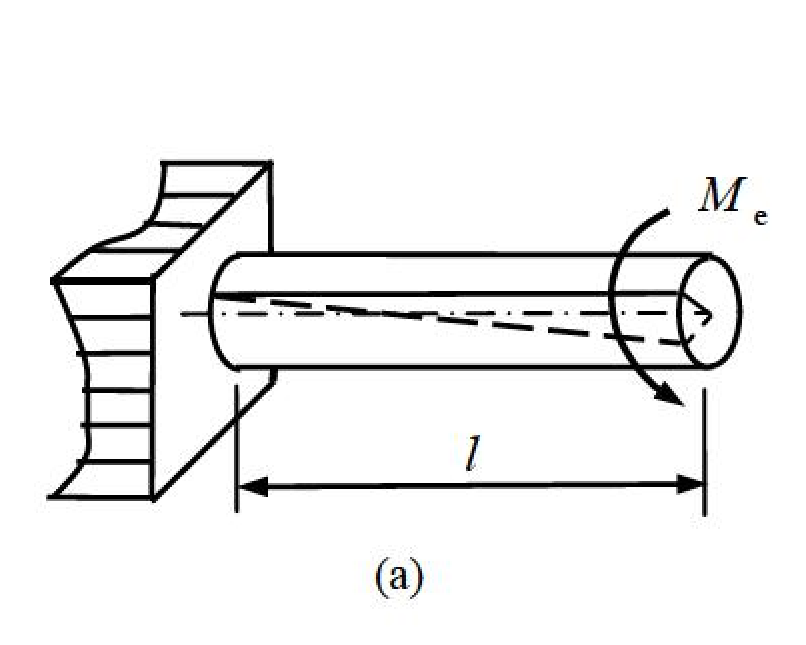
(b)

图 12.1

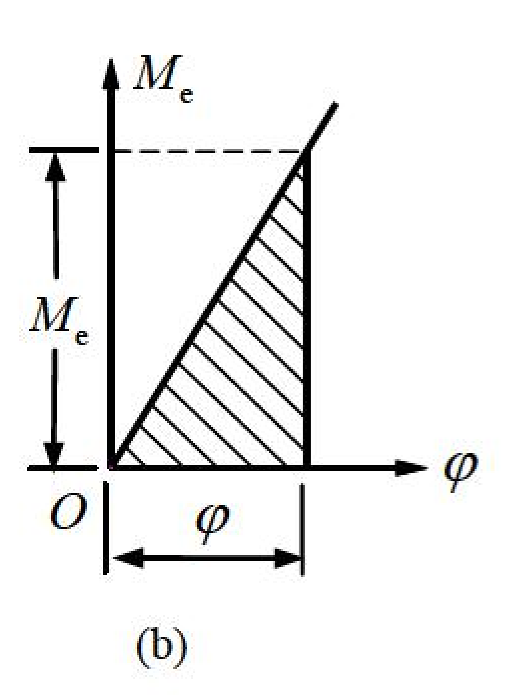
12.2.2　扭转

若作用于圆轴上的外力偶矩(见图 12.2(a))从零开始缓慢地增加到最终值，在线弹性范围内，扭转角 φ 与扭矩 T 即外力偶矩 M_e 的关系为斜直线(见图 12.2(b))，扭转角为

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p} = \frac{M_e l}{GI_p}$$



(a)



(b)

图 12.2

外力偶矩 M_e 即扭矩 T 所做的功为图 12.2(b)中的阴影部分面积，即

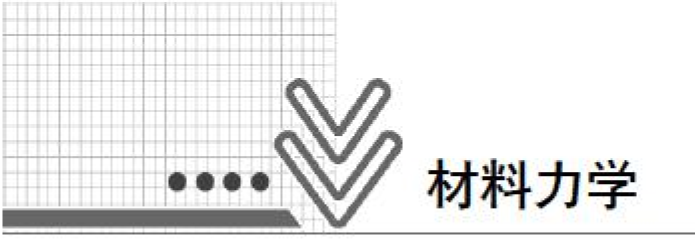
$$W = \frac{1}{2}T\varphi = \frac{T^2 l}{2GI_p}$$

扭转应变能为

$$V_\varepsilon = W = \frac{T^2 l}{2GI_p} \tag{12.4}$$

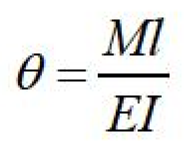
当扭矩 T 沿轴线是变化的或者变形超过了弹性极限，则杆件的扭转应变能为

$$V_\varepsilon = \int_l \frac{T^2(x)\mathrm{d}x}{2GI_p} \tag{12.5}$$

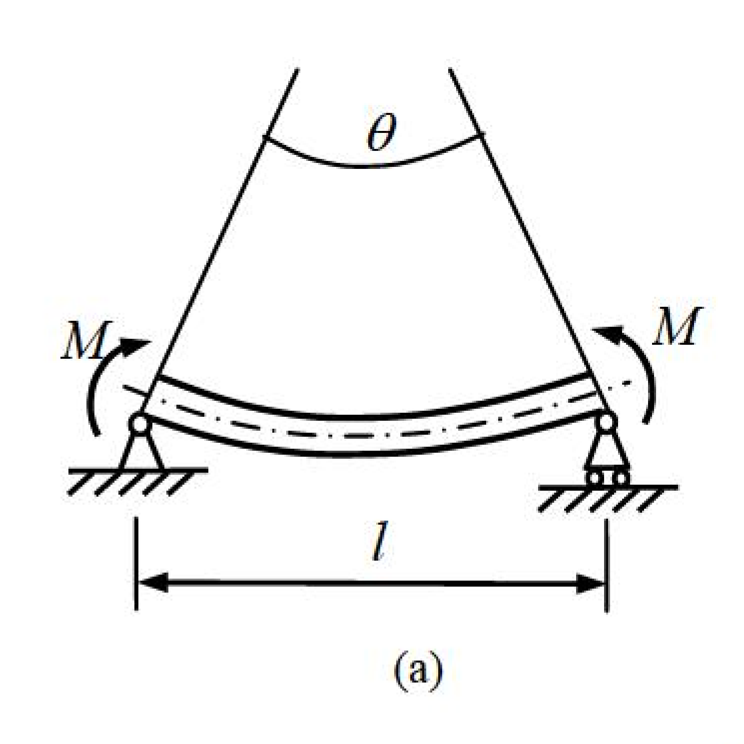


12.2.3 弯曲

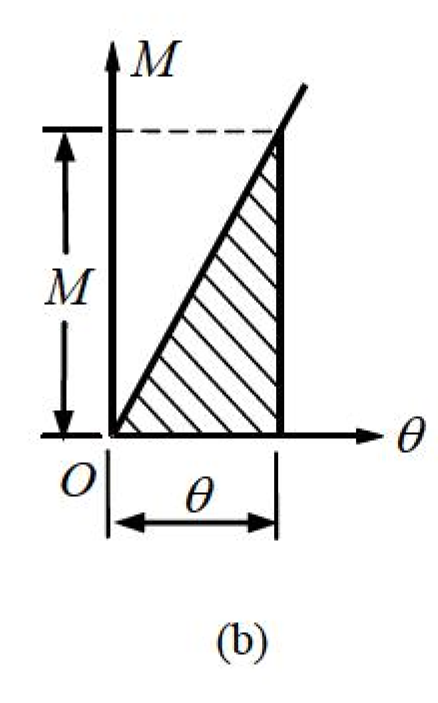
图 12.3(a)所示为纯弯曲梁发生弯曲变形，根据第 6 章求弯曲变形的方法，可以算得梁的两个端面的相对转角为



$$\theta = \frac{Ml}{EI}$$



(a)



(b)

图 12.3

在线弹性范围内，若弯矩 M 从零开始缓慢地增加到最终值，则 M 与 θ 的关系也为斜直线(见图 12.3(b))，弯矩 M 所做的功也为图 12.3(b)中的阴影部分面积，即

$$W = \frac{1}{2}M\theta$$

弯曲应变能为

$$V_\varepsilon = W = \frac{M^2 l}{2EI} \tag{12.6}$$

横力弯曲时，梁的横截面上的弯矩是随横截面的位置而变化的，则梁的弯曲应变能为

$$V_\varepsilon = \int_l \frac{M^2(x)\mathrm{d}x}{2EI} \tag{12.7}$$

12.2.4 应变能的普遍表达式

设在线弹性杆件中取出长为 dx 的微段，如图 12.4 所示，其两端横截面上有轴力 $F_\mathrm{N}(x)$、弯矩 $M(x)$、扭矩 $T(x)$。对所分析的微段来说，这些都是外力。$F_\mathrm{N}(x)$、$M(x)$、$T(x)$ 只在各自引起的位移 $\mathrm{d}(\Delta l)$、$\mathrm{d}\theta$、$\mathrm{d}\varphi$ 上做功，它们相互独立。因此，微段上的应变能用叠加法计算为

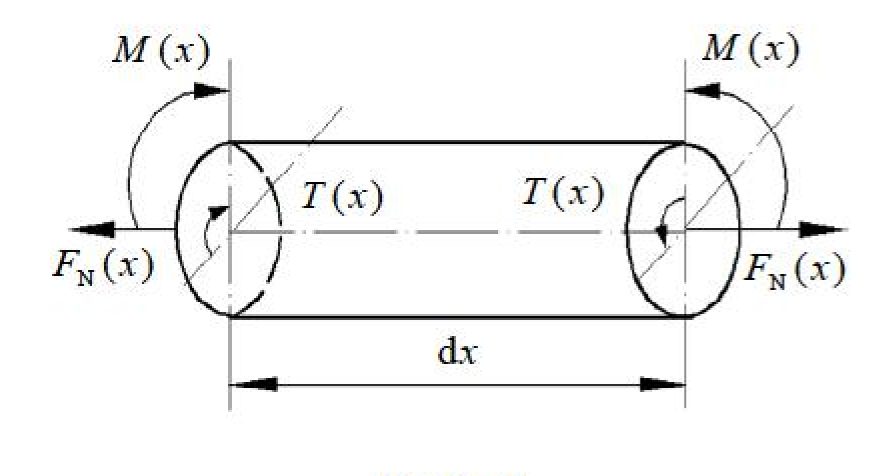


图 12.4

$$dV_\varepsilon=\frac{1}{2}F_N(x)d(\Delta l)+\frac{1}{2}M(x)d\theta+\frac{1}{2}T(x)d\varphi=\frac{F_N^2(x)dx}{2EA}+\frac{M^2(x)dx}{2EI}+\frac{T^2(x)dx}{2GI_p}$$

设杆长为l，积分上式，求出整根杆件的应变能为

$$V_\varepsilon=\int_l\frac{F_N^2(x)dx}{2EA}+\int_l\frac{M^2(x)dx}{2EI}+\int_l\frac{T^2(x)dx}{2GI_p} \tag{12.8}$$

例 12.1　图 12.5(a)所示轴线为水平面内四分之一圆周的曲杆，在自由端 B 作用一铅垂向下的载荷 $\boldsymbol{F}$。设 EI 和 GI_p 已知，试求截面 B 在垂直方向的位移。

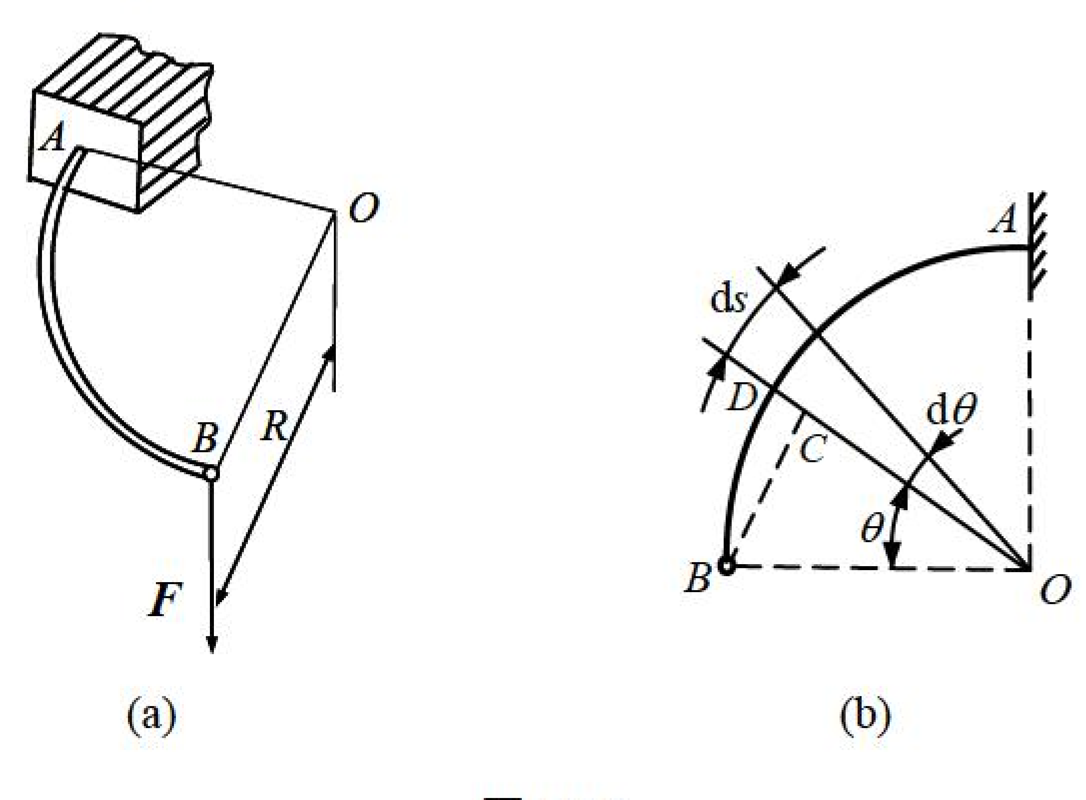


图 12.5

解：设任意横截面的位置由圆心角 θ 确定(见图 12.5(b))。横截面上的弯矩和扭矩分别为

$$M=FR\sin\theta，T=FR(1-\cos\theta)$$

微段 ds 内的应变能为

$$dV_\varepsilon=\frac{M^2Rd\theta}{2EI}+\frac{T^2Rd\theta}{2GI_p}$$

积分得整个曲杆的应变能为

$$V_\varepsilon=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M^2Rd\theta}{2EI}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{T^2Rd\theta}{2GI_p}=\frac{F^2R^3\pi}{8EI}+\frac{3F^2R^3\pi}{8GI_p}$$

若 $\boldsymbol{F}$ 力作用点沿垂直方向的位移为 δ_B，在变形过程中，集中力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功应为

$$W=\frac{1}{2}F\delta_B$$

由 U=W 得

$$\delta_B=\frac{FR^3\pi}{4EI}+\frac{3FR^3\pi}{4GI_p}$$

12.3　互 等 定 理

对位移与载荷呈线性关系的弹性体，利用应变能的概念可以导出下列重要结论：力 F_R 在力 F_s 引起的位移上所做的功，等于力 F_s 在力 F_R 引起的位移上所做的功。这一结论称

为功的互等定理。

现以梁为例证明这个定理。设 1、2 为梁上的两点，在点 1 作用载荷 $\boldsymbol{F}_1$ (见图 12.6(a))，引起点 1 的位移为 δ_{11}、点 2 的位移为 δ_{21}；在点 2 作用载荷 $\boldsymbol{F}_2$ (见图 12.6(b))，引起点 1 的位移为 δ_{12}、点 2 的位移为 δ_{22}。位移 δ_{ij} 的记号规则是：第一个下标 i 表示位移发生在 i 点，第二个下标 j 表示引起位移的载荷作用于 j 点。例如，δ_{21} 表示点 2 由于作用于点 1 的载荷 F_1 引起的位移。

设想在梁上先作用 $\boldsymbol{F}_1$，然后再作用 $\boldsymbol{F}_2$。在材料服从胡克定律和小变形的条件下，外力做的功即梁内的应变能为

$$V_{\varepsilon 1}=\frac{1}{2}F_1\delta_{11}+\frac{1}{2}F_2\delta_{22}+F_1\delta_{12} \tag{12.9}$$

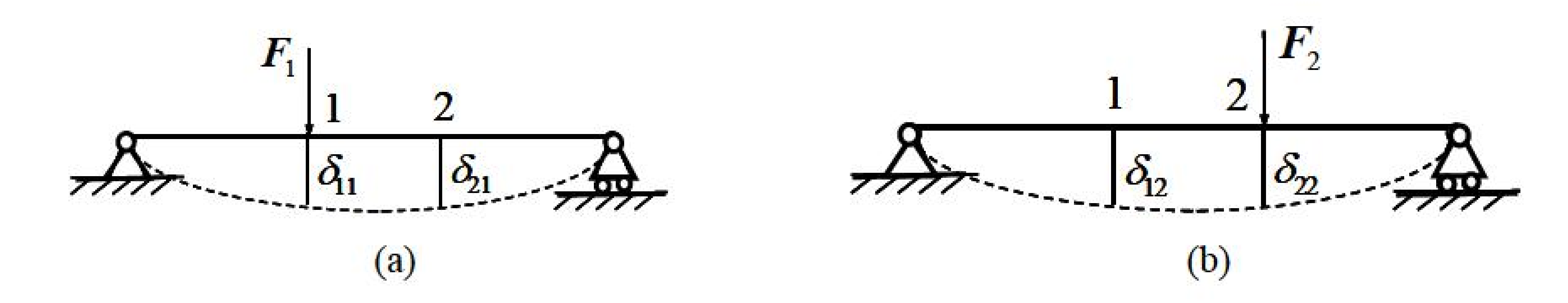


图 12.6

若把加载次序改为先作用 F_2，然后再作用 F_1，则外力做的功即梁内的应变能为

$$V_{\varepsilon 2}=\frac{1}{2}F_1\delta_{11}+\frac{1}{2}F_2\delta_{22}+F_2\delta_{21} \tag{12.10}$$

由于弹性体的应变能只与载荷的最终值有关，而与载荷作用的顺序无关，所以按上述两种不同的加载顺序所得的应变能应该相等，即 $V_{\varepsilon 1}=V_{\varepsilon 2}$，由此可得

$$F_1\delta_{12}=F_2\delta_{21} \tag{12.11}$$

即得功的互等定理。

当载荷 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 在数值上相等(即 $F_1=F_2$)时，由功的互等定理式(12.11)可得

$$\delta_{12}=\delta_{21} \tag{12.12}$$

这表明作用于点 2 处的载荷使点 1 处产生的位移等于作用于点 1 处的相同载荷使点 2 处产生的位移。这就是位移互等定理。

上述互等定理中的力和位移都应理解为是广义的。如果将力 F 换成力偶，位移 δ 换成角位移，其结论依然成立。

例 12.2 图 12.7(a)所示装有尾架的车削工件简化为静不定梁。已知 F、l、a 和 EI，试求 B 处约束力。

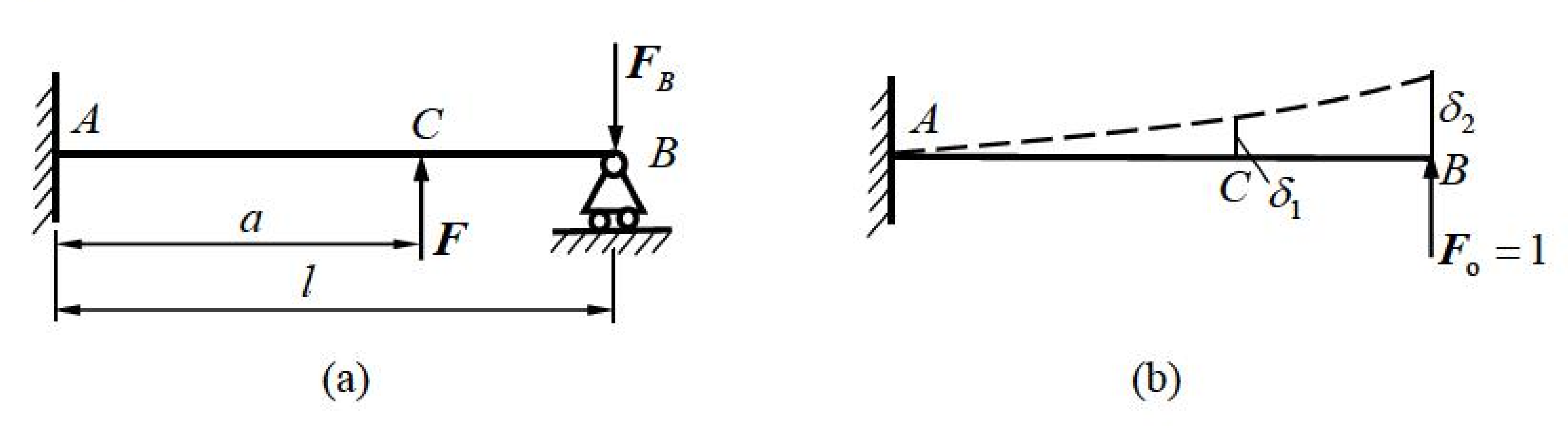


图 12.7

解： 解除约束 B，将结构看成悬臂梁。把 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}_B$ 看成第一组力。再假设在 B 端作用有一个单位力 $F_0 = 1$(见图 12.7(b))，并将其看成第二组力。

先求出第二组力即单位力 $F_0 = 1$ 作用时，第一组力 F 和 F_B 作用点的位移为

$$\delta_1 = \frac{a^2}{6EI}(3l-a),\quad \delta_2 = \frac{l^3}{3EI}$$

第一组力在第二组力引起的位移上所做的功为

$$F\delta_1 - F_B\delta_2 = \frac{Fa^2}{6EI}(3l-a) - \frac{F_B l^3}{3EI}$$

由于 B 端是一个铰链支座，铅垂方向没有位移，所以第一组力在第二组力作用点引起的位移等于零，故第二组力在第一组力引起的位移上所做的功等于零。根据功的互等定理，则有

$$\frac{Fa^2}{6EI}(3l-a) - \frac{F_B l^3}{3EI} = 0$$

解得

$$F_B = \frac{Fa^2}{2l^3}(3l-a)$$

12.4 卡氏定理

图 12.8 所示的弹性体梁，承受广义力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_k, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 作用，相应位移分别为 $\delta_1, \delta_2, \cdots$，$\delta_k, \cdots, \delta_n$。现在拟求 δ_k，即计算广义力 F_k 的相应位移。

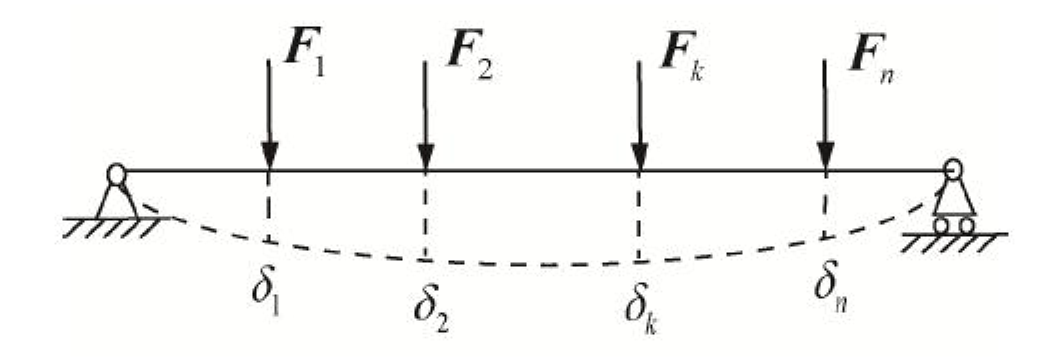


图 12.8

省略二阶微量 $\frac{1}{2}\mathrm{d}F_k\mathrm{d}\delta_k$，由式(12.9)得出

$$\delta_k = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_k} \tag{12.13}$$

式(12.13)说明应变能对任一载荷 F_k 的偏导数，等于 F_k 作用点沿 F_k 方向上的位移 δ_k，这就是卡氏第二定理。下面把卡氏定理应用于几种特殊情况。

在横力弯曲的情况下。由式(12.13)可得到

$$\delta_k = \int_l \frac{M(x)}{EI}\frac{\partial M(x)}{\partial F_k}\mathrm{d}x \tag{12.14}$$

对于桁架，其每根杆的变形都是轴向拉伸或压缩，第 i 根杆的应变能为 $\frac{F_{\mathrm{N}i}^2 l_i}{2EA_i}$，若桁架

有 n 根杆件，则整个桁架的应变能为 $\sum_{i=1}^{n}\frac{F_{Ni}^2 l_i}{2EA_i}$，应用卡氏第二定理，可得

$$\delta_k=\sum_{i=1}^{n}\frac{F_{Ni}l_i}{EA_i}\frac{\partial F_{Ni}}{\partial F_k} \tag{12.15}$$

例 12.3 图 12.9 所示角拐的端点 C 上作用一铅垂向上集中力 $\boldsymbol{F}$。设角拐两段材料相同且均为同一直径的圆截面杆，试求 C 点的铅垂位移。

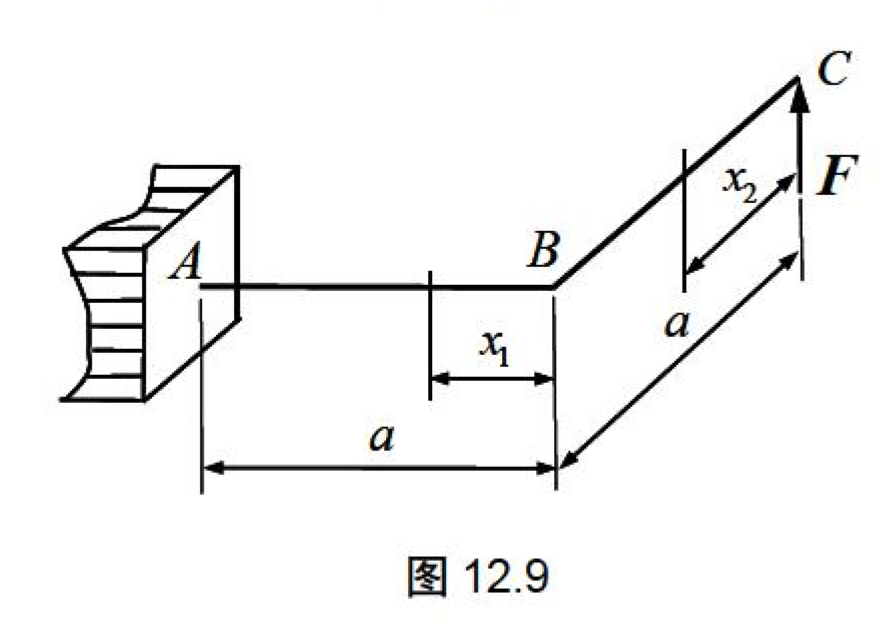


图 12.9

解： 角拐的总应变能由三部分组成，即 AB 段的弯曲应变能、BC 段的弯曲应变能和 AB 段的扭转应变能。结构的总体应变能为

$$V_\varepsilon=\int_0^a\frac{(Fx_1)^2}{2EI}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{(Fx_2)^2}{2EI}\mathrm{d}x+\frac{(Fa)^2a}{2GI_p}$$

应用卡氏定理求得 C 点的铅垂位移为

$$\delta_C=\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F}=\frac{2Fa^3}{3EI}+\frac{Fa^3}{GI_p}$$

例 12.4 外伸梁如图 12.10 所示，其抗弯刚度为 EI，试利用卡氏定理求外伸端 C 的挠度 w_C 和左端截面 A 的转角 θ_A。

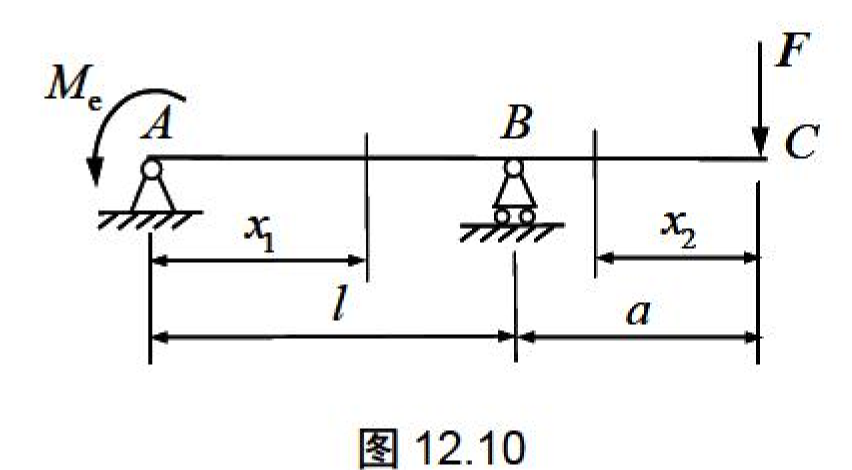


图 12.10

解： 与位移 w_C 相应的广义力为 $\boldsymbol{F}$，与位移 θ_A 相应的广义力为 M_e，由式(12.14)，有

$$w_C=\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F}=\int_l\frac{M(x)}{EI}\frac{\partial M(x)}{\partial F}\mathrm{d}x \tag{a}$$

$$\theta_A=\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial M_e}=\int_l\frac{M(x)}{EI}\frac{\partial M(x)}{\partial M_e}\mathrm{d}x \tag{b}$$

分段写出弯矩方程并求出相应的偏导数，然后代入式(12.15)进行积分。按图中所取坐标，在 AB 段内，有

$$M_1(x_1)=R_{Ax_1}-M_e=(\frac{M_e}{l}-\frac{Fa}{l})x_1-M_e$$

$$\frac{\partial M_1(x_1)}{\partial F}=-\frac{a}{l}x_1$$

$$\frac{\partial M_1(x_1)}{\partial M_e}=(\frac{x_1}{l}-1)$$

在 BC 段内，有

$$M_2(x_2)=-Fx_2,\quad \frac{\partial M_2(x_2)}{\partial F}=-x_2,\quad \frac{\partial M_2(x_2)}{\partial M_e}=0$$

将其代入式(a)和式(b)，得到

$$\begin{aligned}w_C&=\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F}=\int_0^l\frac{M_1(x_1)}{EI}\frac{\partial M_1(x_1)}{\partial F}dx_1+\int_0^a\frac{M_2(x_2)}{EI}\frac{\partial M_2(x_2)}{\partial F}dx_2\\&=\frac{1}{EI}\int_0^l[\left(\frac{M_e}{l}-\frac{Fa}{l}\right)x_1-M_e]\left(-\frac{a}{l}\right)x_1dx_1+\frac{1}{EI}\int_0^a(-Fx_2)(-x_2)dx_2\\&=\frac{1}{EI}\left(\frac{Fa^2l}{3}+\frac{M_eal}{6}+\frac{Fa^3}{3}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_A&=\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial M_e}=\int_0^l\frac{M_1(x_1)}{EI}\frac{\partial M_1(x_1)}{\partial M_e}dx_1+\int_0^a\frac{M_2(x_2)}{EI}\frac{\partial M_2(x_2)}{\partial M_e}dx_2\\&=\frac{1}{EI}\int_0^l\left[\left(\frac{M_e}{l}-\frac{Fa}{l}\right)x_1-M_e\right]\left(\frac{x_1}{l}-1\right)dx_1+\frac{1}{EI}\int_0^a(-Fx_2)(0)dx_2\\&=\frac{1}{EI}\left(\frac{M_el}{3}+\frac{Fal}{6}\right)\end{aligned}$$

w_C 和 θ_A 均为正值，表示它们的位移方向分别与 F 和 M_e 的方向一致。

12.5 单位荷载法 莫尔积分

梁在 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…作用下(见图 12.11(a))，求 C 点的位移 Δ。设梁是线弹性的，由式(12.8)得梁的弯曲应变能为

$$V_\varepsilon=\int_l\frac{M^2(x)dx}{2EI}\tag{12.16}$$

式中，$M(x)$为载荷作用下梁截面上的弯矩。为了求出 C 点的位移 Δ，假设在 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…作用之前，在 C 点沿 Δ 方向作用了单位力 $F_0=1$(见图 12.11(b))。单位力产生的弯矩为 $\overline{M}(x)$，单位力产生的应变能为

$$\int_l\frac{\overline{M}^2(x)dx}{2EI}\tag{12.17}$$

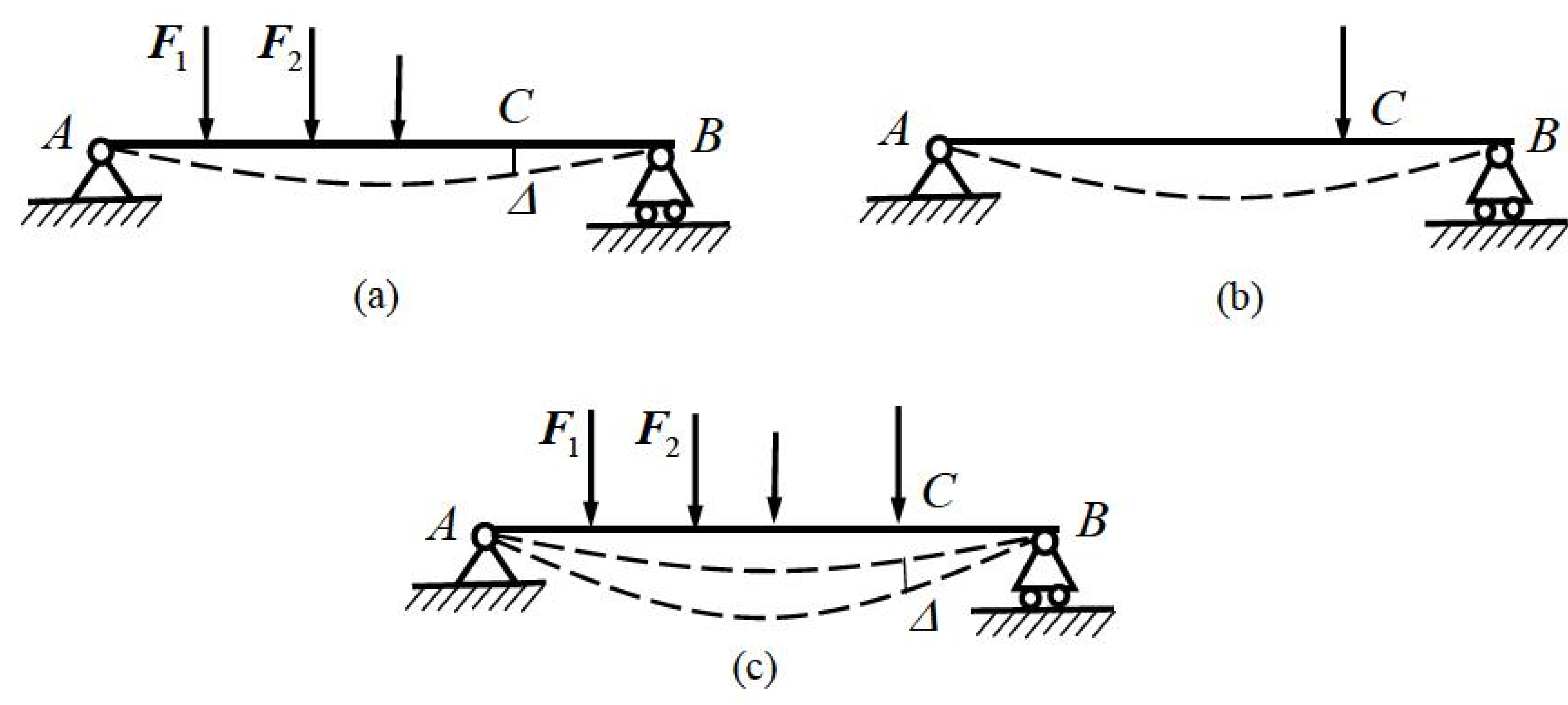


图 12.11

单位力 $\boldsymbol{F}_0$ 作用后，再将原来的载荷 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，⋯作用于梁上(见图 12.11(c))。载荷 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，⋯引起的位移仍然为 Δ，但先作用上去的单位力 $\boldsymbol{F}_0$ 又做了功 $1\cdot\Delta$。这样，单位力 $\boldsymbol{F}_0$ 连同后作用的载荷 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，⋯一起做的功即梁的总应变能为

$$V_{\varepsilon 1}=V_\varepsilon+\overline{V}_\varepsilon+1\cdot\Delta$$

$\boldsymbol{F}_0$ 和 $\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，⋯共同作用下梁的应变能也可以用弯矩来计算，即

$$V_{\varepsilon 1}=\int_l \frac{[M(x)+\overline{M}(x)]^2\,\mathrm{d}x}{2EI}$$

于是

$$V_\varepsilon+\overline{V}_\varepsilon+1\cdot\Delta=\int_l \frac{[M(x)+\overline{M}(x)]^2\,\mathrm{d}x}{2EI} \tag{12.18}$$

从式(12.18)减去式(12.16)和式(12.17)，即可得

$$\Delta=\int_l \frac{M(x)\overline{M}(x)}{EI}\mathrm{d}x \tag{12.19}$$

同样，对于圆轴的扭转，有

$$\Delta=\int_l \frac{T(x)\overline{T}(x)}{GI_\mathrm{p}}\mathrm{d}x \tag{12.20}$$

对于线弹性桁架，有

$$\Delta=\int_l \frac{F_{\mathrm{N}i}\overline{F}_{\mathrm{N}i}l_i}{E_iA_i}\mathrm{d}x \tag{12.21}$$

以上几式统称为莫尔定理，式中的积分称为莫尔积分。同理，若计算结构在载荷作用下某截面的转角 θ，则在该截面处加一个与转角 θ 相应的单位力偶，同样可以用以上几式计算出相应的转角。因此，以上几式中的 Δ 应理解为广义位移，而单位荷载则是与 Δ 相应的广义力。这种求位移的方法称为单位荷载法或单位力法，它适用于线弹性结构。

例 12.5 图 12.12(a)所示刚架，承受均布荷载 $\boldsymbol{q}$ 作用，设抗弯刚度 EI 为常数。试用单位荷载法计算截面 A 的转角。

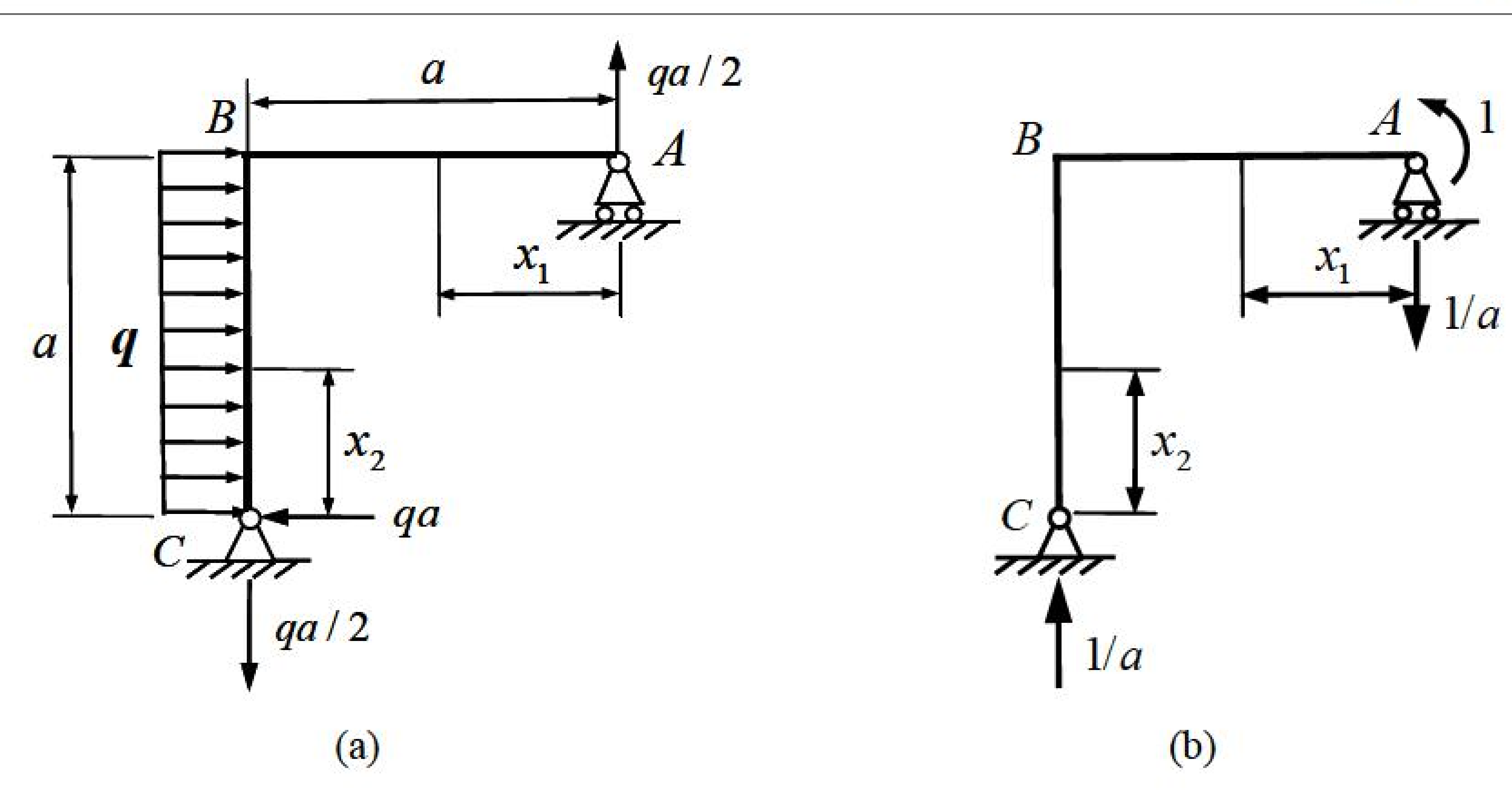


图 12.12

解：为了计算横截面 A 的转角，在该截面加上一单位力偶(见图 12.12(b))。在实际荷载和单位力偶单独作用时，求得刚架的支反力如图 12.12 所示，并由此建立各段梁的弯矩方程如下。

AB 段：

$$M(x_1)=\frac{qa}{2}x_1,\quad \overline{M}(x_1)=-\frac{x_1}{a}$$

BC 段：

$$M(x_2)=qax_2-\frac{1}{2}qx_2^2,\quad \overline{M}(x_2)=0$$

于是得截面 A 的转角为

$$\theta_A=\frac{1}{EI}\int_0^a\left(-\frac{x_1}{a}\right)\frac{qa}{2}x_1\mathrm{d}x+\frac{1}{EI}\int_0^a 0\cdot M(x_2)\mathrm{d}x=-\frac{qa^2}{6EI}$$

所得 θ_A 为负，表示横截面 A 的转角与单位力偶方向相反。

12.6　图　乘　法

在等截面直杆的情况下，莫尔积分中的 EI 为常量。所以只需计算积分，即

$$\int_l M(x)\overline{M}(x)\mathrm{d}x \tag{12.22}$$

直梁在单位力或单位力偶矩作用下，其 $\overline{M}(x)$ 图必定是线性的，以上积分就可以简化。例如，图 12.13 所示为直梁 AB 的 $M(x)$ 和 $\overline{M}(x)$ 图，其中 $\overline{M}(x)$ 图是一条斜直线。取这条斜直线与 x 轴的交点 O 为原点，则 $\overline{M}(x)$ 图中任意点的坐标为

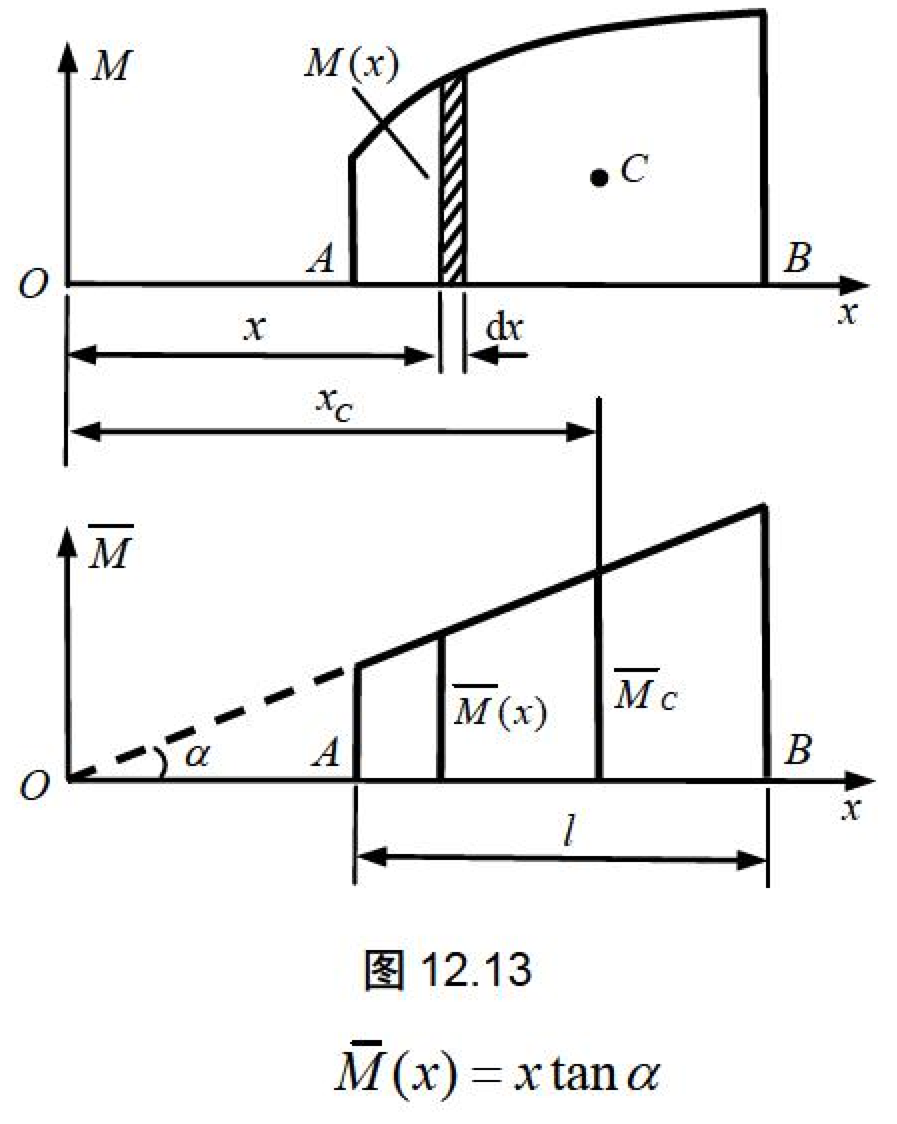


图 12.13

$$\bar{M}(x) = x\tan\alpha$$

于是，式(12.22)中的积分可写成

$$\int_l M(x)\bar{M}(x)\mathrm{d}x = \tan\alpha\int_l xM(x)\mathrm{d}x \tag{12.23}$$

在积分号内的 $M(x)\mathrm{d}x$ 是 $M(x)$ 图中画有阴影线的微分面积，而 $xM(x)\mathrm{d}x$ 则是上述微分面积对 M 轴的静矩。于是，积分 $\int_l xM(x)\mathrm{d}x$ 就是 $M(x)$ 图的面积对 M 轴的静矩。若以 ω 代表 $M(x)$ 图的面积，x_C 代表 $M(x)$ 图的形心到 M 轴的距离，则

$$\int_l xM(x)\mathrm{d}x = \omega x_C$$

这样，由式(12.23)得

$$\int_l M(x)\bar{M}(x)\mathrm{d}x = \omega x_C\tan\alpha = \omega\bar{M}_C \tag{12.24}$$

式中，$\bar{M}_C = x_C\tan\alpha$，是 $\bar{M}(x)$ 图中与 $M(x)$ 图的形心 C 对应的纵坐标。利用式(12.24)，对于等截面直梁，式(12.19)可以写为

$$\varDelta = \int_l \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI}\mathrm{d}x = \frac{\omega\bar{M}_C}{EI} \tag{12.25}$$

以上对莫尔积分的简化运算方法称为**图乘法**。

应用图乘法时，要经常计算某些图形的面积和形心的位置。在表 12.1 中，给出了几种常见图形的面积和形心位置的计算公式。

表 12.1

	直角三角形	三角形	二次抛物线
图形	c, h, l	c, a, h, l	顶点, c, h, l

续表

	直角三角形	三角形	二次抛物线
图形面积	$\frac{1}{2}lh$	$\frac{1}{2}lh$	$\frac{1}{3}lh$
形心位置 C	$\frac{l}{3}$	$\frac{1}{3}(l+a)$	$\frac{l}{4}$
	三次抛物线	二次抛物线	三次抛物线
图形	c, h, 顶点, l	c, 顶点, h, l	c, 顶点, h, l
图形面积	$\frac{1}{4}lh$	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{3}{4}lh$
形心位置 C	$\frac{l}{5}$	$\frac{3}{8}l$	$\frac{2}{5}l$

例 12.6　均布载荷作用下的简支梁如图 12.14(a)所示，其 EI 为常量。试求跨度中点的挠度 w_C。

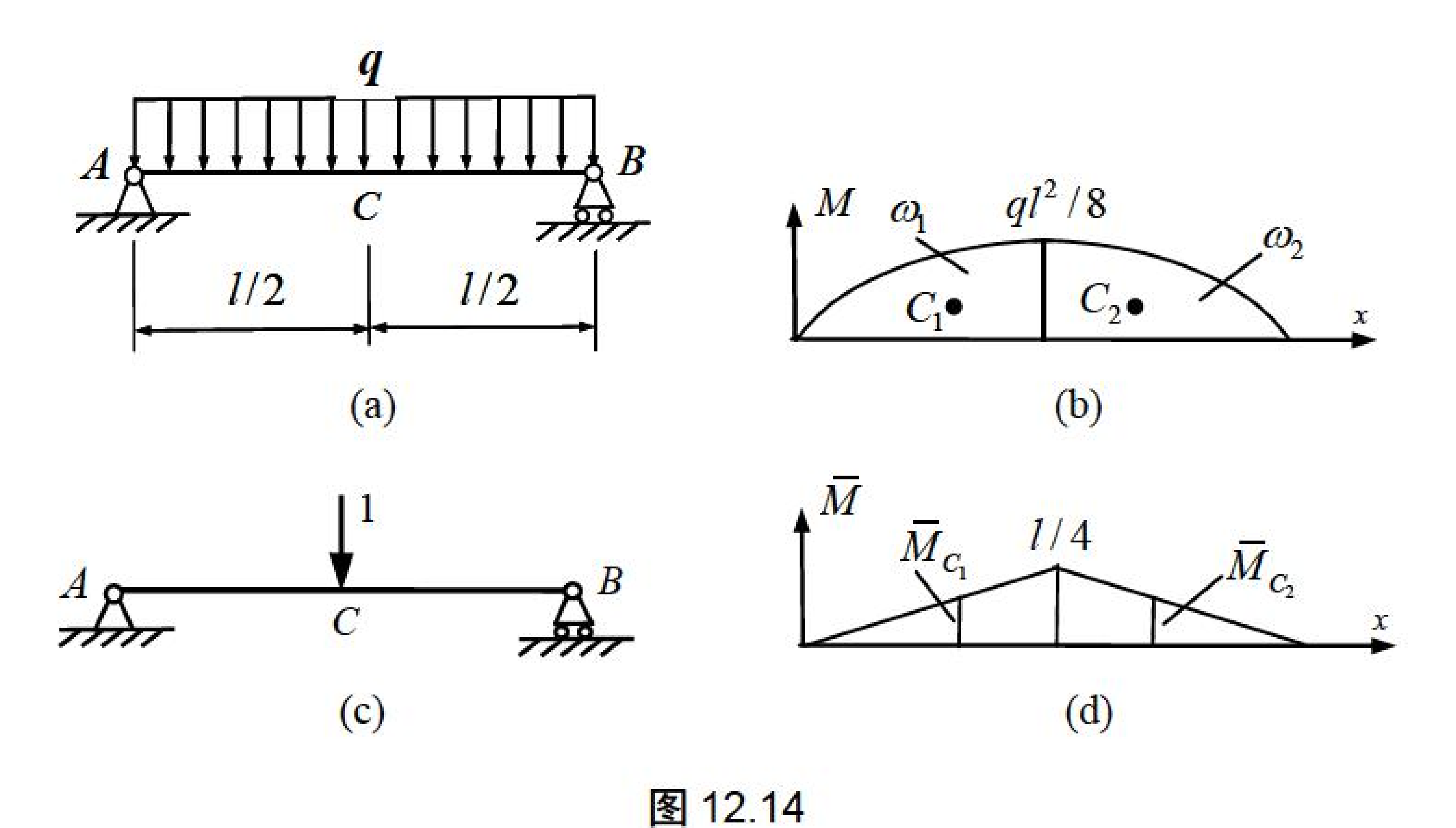


图 12.14

解：简支梁在均布荷载作用下的弯矩图为二次抛物线(见图 12.14(b))。在跨中 C 点作用一个单位力(见图 12.14(c))，单位力的 $\bar{M}(x)$ 图为一条折线(见图 12.14(d))。应以 $\bar{M}(x)$ 图的转折点为界，分两段使用图乘法。应用表 12.1 中的公式，容易求得 AC 和 BC 两段内弯矩图的面积 ω_1 和 ω_2，即

$$\omega_1=\omega_2=\frac{2}{3}\times\frac{ql^2}{8}\times\frac{l}{2}=\frac{ql^3}{24}$$

ω_1 和 ω_2 的形心在 $\bar{M}(x)$ 图中对应的纵坐标的绝对值为

$$\bar{M}_C=\frac{5}{8}\times\frac{l}{4}=\frac{5l}{32}$$

于是，跨度中点的挠度为

$$w_C = \frac{\omega_1 \bar{M}_C}{EI} + \frac{\omega_2 \bar{M}_C}{EI} = \frac{2}{EI} \times \frac{ql^3}{24} \times \frac{5l}{32} = \frac{5ql^4}{384EI} \quad (\downarrow)$$

例 12.7 试求 12.15(a)所示外伸梁的自由端挠度 w_B。已知梁的抗弯刚度 EI 为常量。

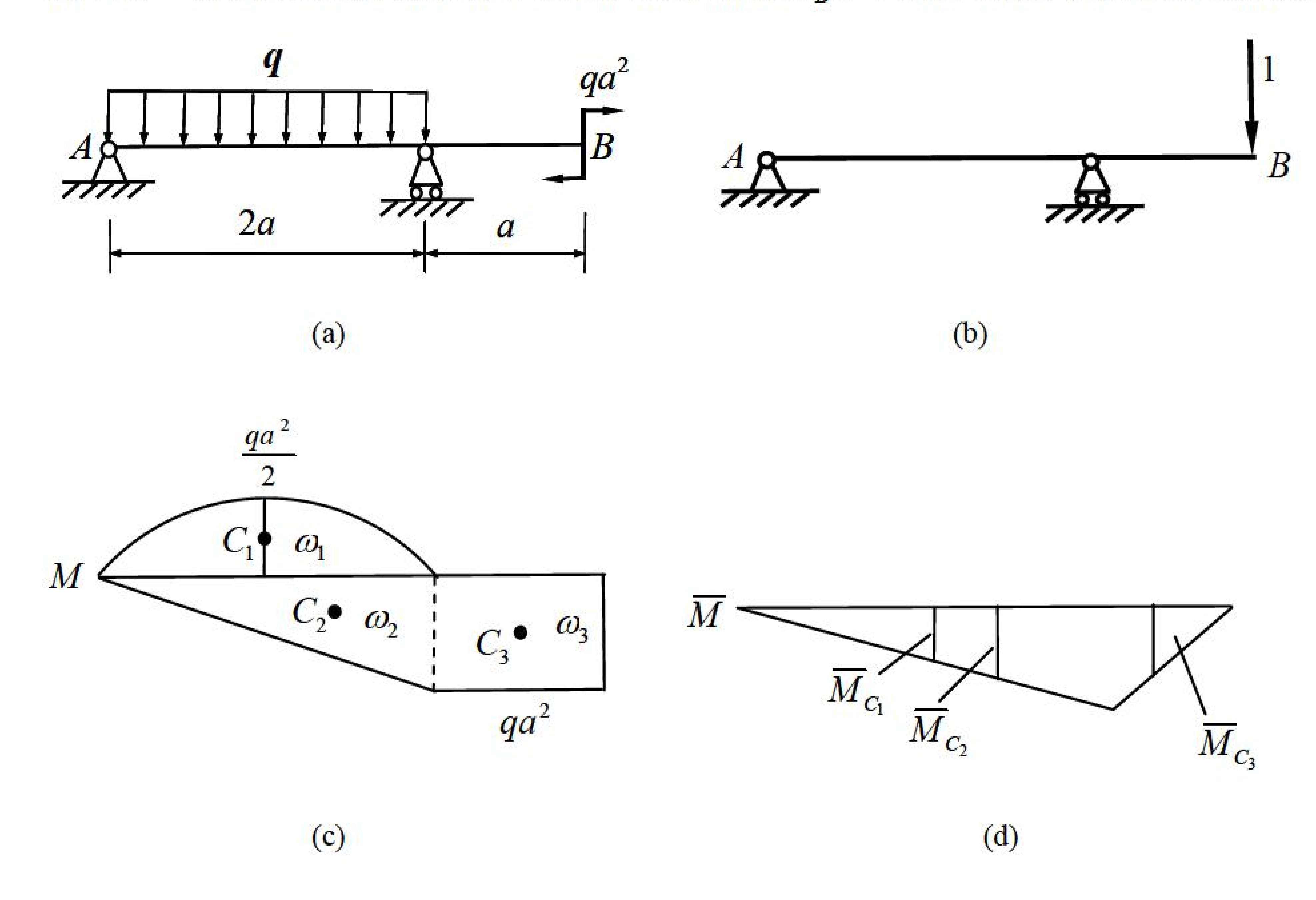


图 12.15

解：在自由端 B 加一铅垂方向的单位力(见图 12.15(b))。分别作 M 图和 $\overline{M}$ 图(见图 12.15(c)、(d))。在作 M 图时，梁上有两组载荷，为便于计算，可分别作出每组载荷单独作用时的弯矩图，但不必叠加成总的弯矩图(见图 12.15(c))。利用表 12.1，有

$$\omega_1 = \frac{2}{3}\frac{qa^2}{2} \cdot 2a = \frac{2}{3}qa^3, \quad \bar{M}_{C_1} = \frac{a}{2}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}qa^2 \cdot 2a = qa^3, \quad \bar{M}_{C_2} = \frac{2}{3}a$$

$$\omega_3 = qa^2 \cdot a = qa^3, \ \bar{M}_{C_3} = \frac{a}{2}$$

$$w_B = \frac{1}{EI}\left(-\frac{2}{3}qa^3 \cdot \frac{a}{2} + qa^3 \cdot \frac{2}{3}a + qa^3 \cdot \frac{a}{2}\right) = \frac{5qa^4}{6EI}$$

由于弯矩图 ω_1 与 $\bar{M}_{C_1}$ 分别处于轴线的异侧，所以图乘时第一项要取负号。

本 章 小 结

变形固体力学中，利用功和能的概念，建立变形和力之间关系的原理和方法，称为能

量方法。

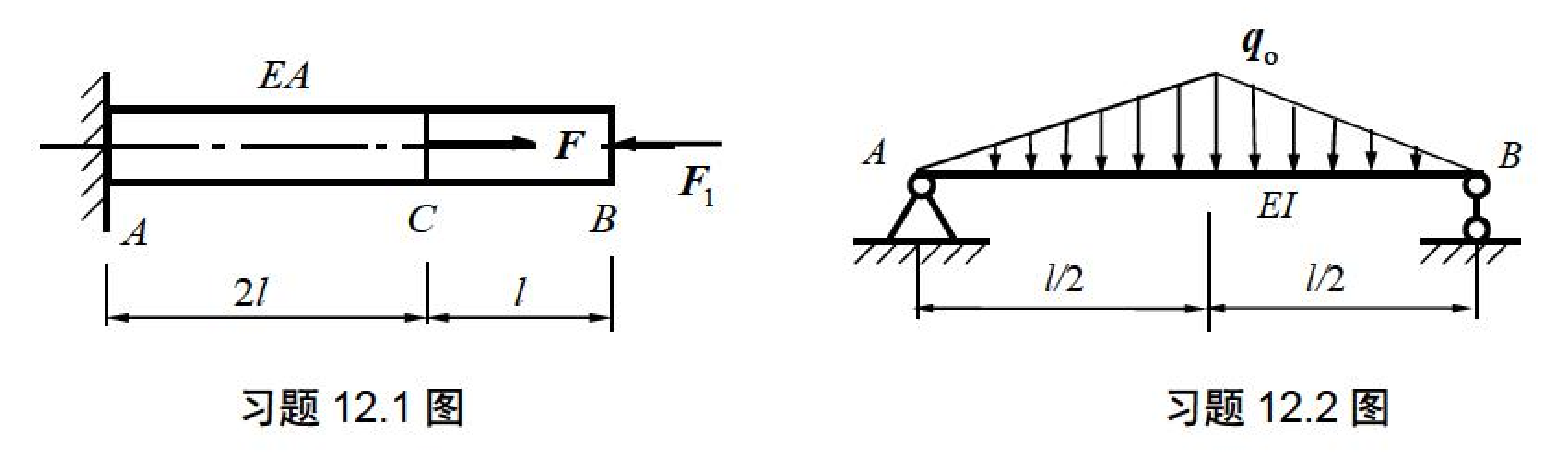
功的互等定理可描述为：力 F_1 在力 F_2 引起的位移上所做的功，等于力 F_2 在力 F_1 引起的位移上所做的功。

应变能对任一载荷 F_k 的偏导数，等于 F_k 作用点沿 F_k 方向上的位移 δ_k，这就是卡氏第二定理，通常称为卡氏定理。

习 题

12.1 直杆的支承及受载如习题 12.1 图所示，试证明当 $F_1 = 2F/3$ 时，杆中的应变能最小，并求出此时应变能的值。

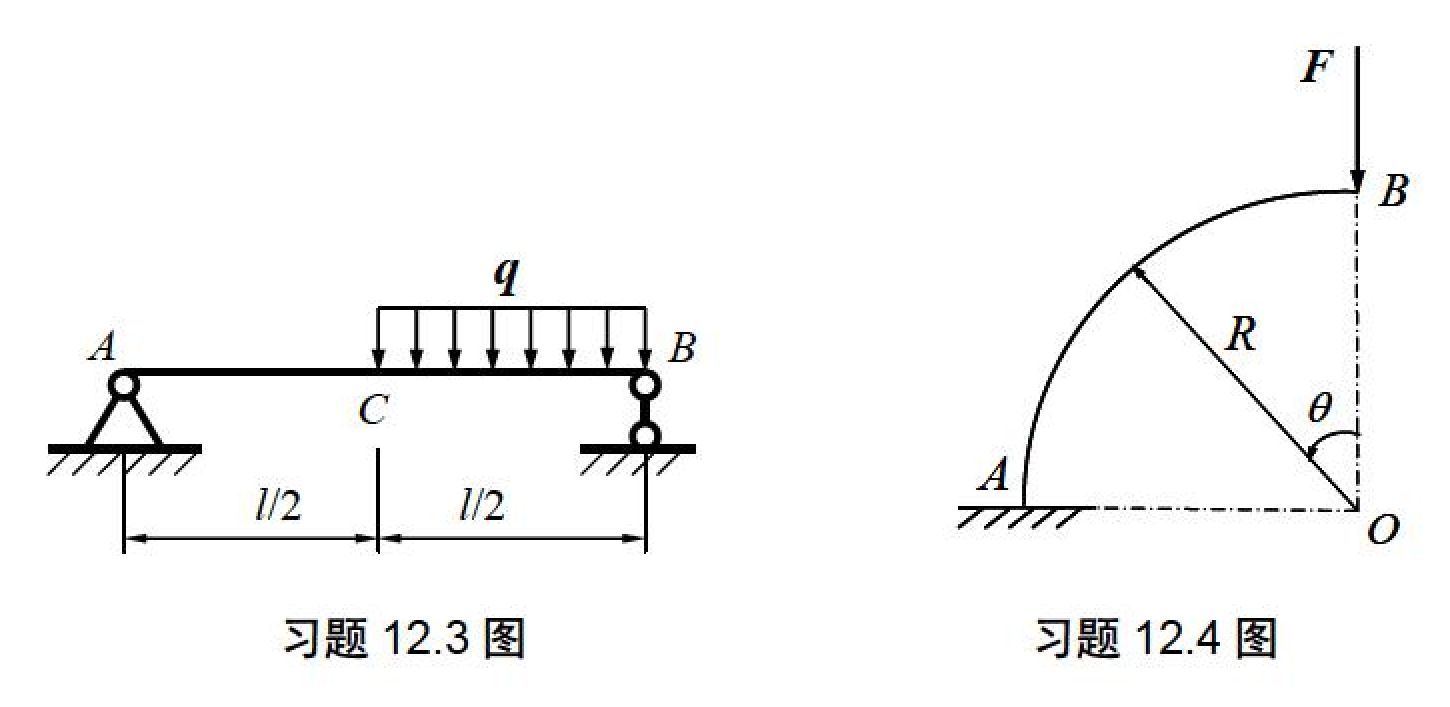
12.2 试求习题 12.2 图所示等截面简支梁内的应变能。



习题 12.1 图　　习题 12.2 图

12.3 习题 12.3 图所示简支梁的抗弯刚度为 *EI*，不计剪力的影响，求梁的应变能。

12.4 如习题 12.4 图所示，已知曲杆的直径为 d，曲率半径为 R，弹性模量为 E，求曲杆的弹性应变能。



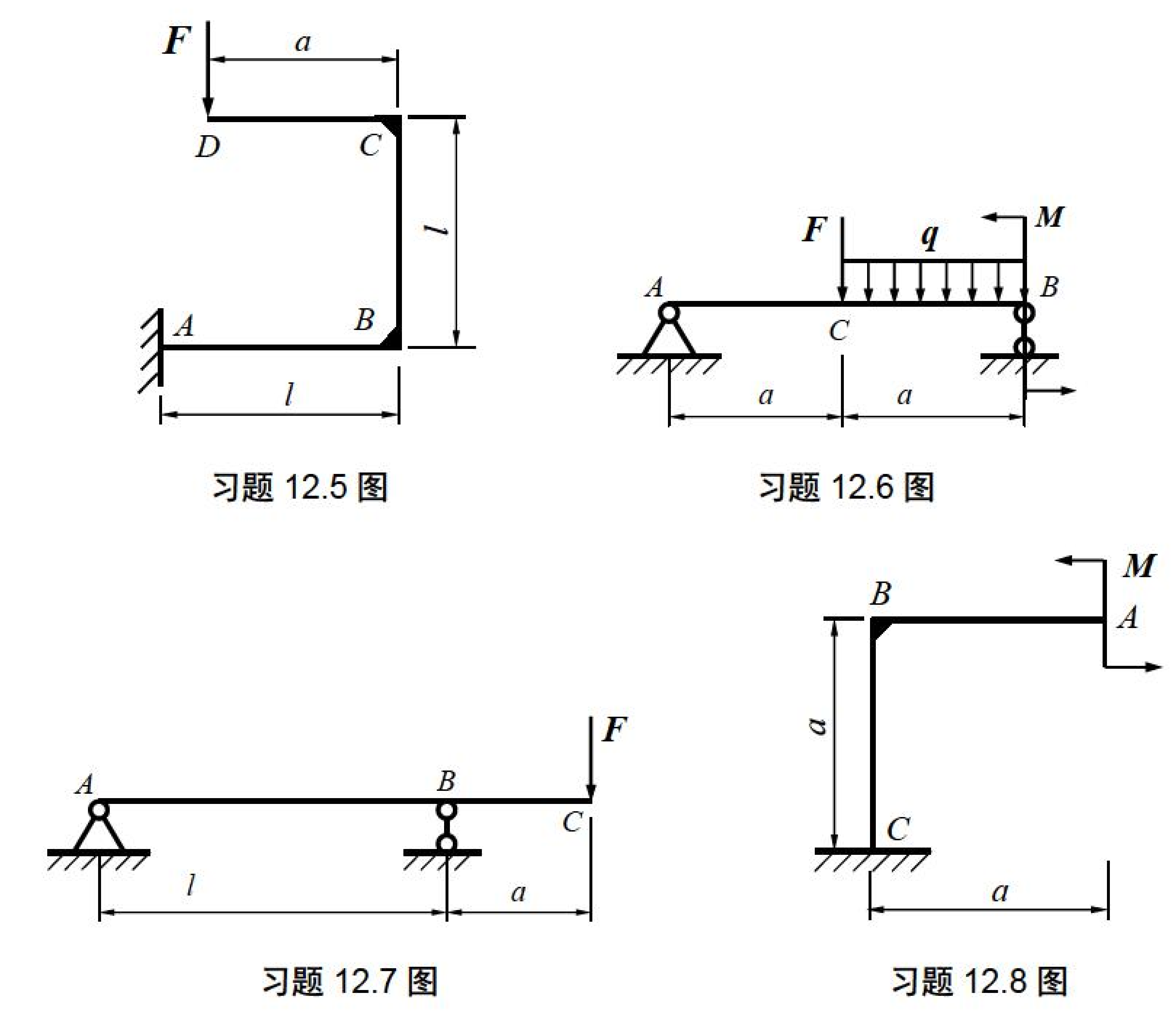
习题 12.3 图　　习题 12.4 图

12.5 已知习题 12.5 图所示刚架各杆的 *EI* 为常量。试用卡氏定理证明：当 $a/l = 4/5$ 时，D 点的水平位移为零。

12.6 简支梁受载如习题 12.6 图所示，已知：q，a，$F = qa$，$M = qa^2$，梁的抗弯刚度为 *EI*，试用卡氏第二定理求截面 A 的转角。

12.7 外伸梁受载如习题 12.7 图所示，已知 F、l、a，梁的抗弯刚度为 *EI*，试用卡氏定理求截面 C 的转角和挠度。

12.8 平面刚架受载如习题 12.8 图所示，已知 M、a，抗弯刚度为 *EI*，试用卡氏定理求截面 A 的转角。

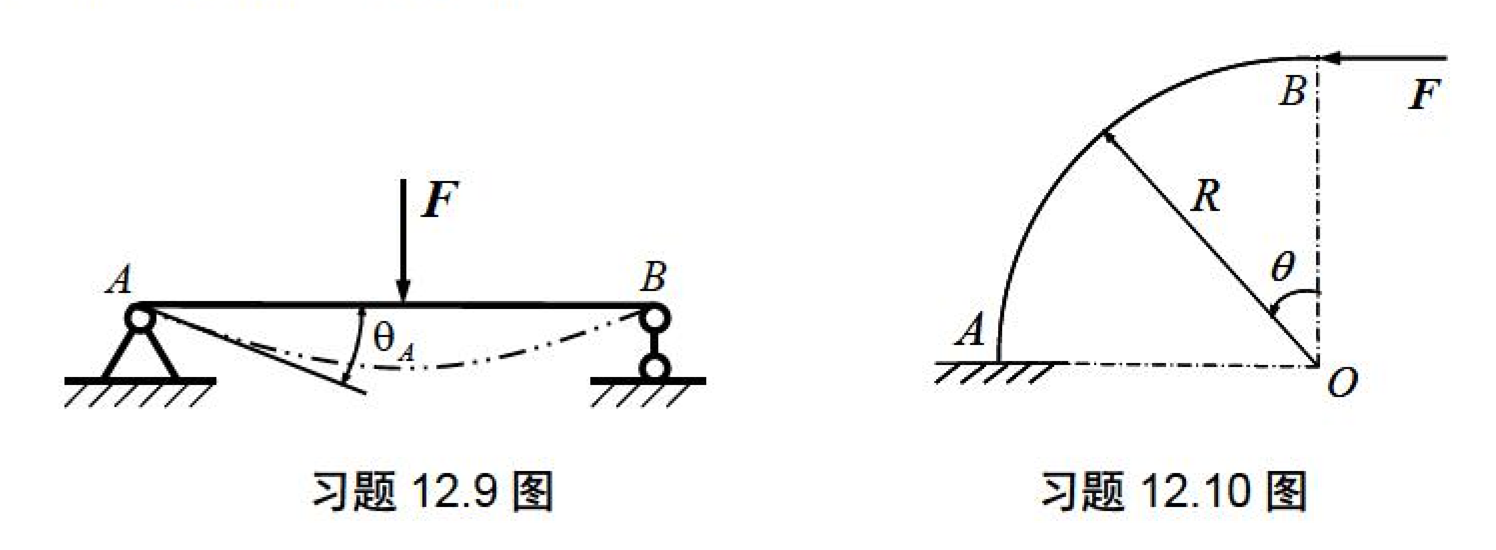


习题 12.5 图　　习题 12.6 图

习题 12.7 图　　习题 12.8 图

12.9　欲测定习题 12.9 图所示梁端截面的转角 θ_A，但只有测量挠度的仪器，怎样用改变加载方式的方法达到此目的？

12.10　等截面曲杆如习题 12.10 图所示，已知曲杆的抗弯刚度为 EI，试求截面 B 的铅垂位移、水平位移和截面 B 的转角。



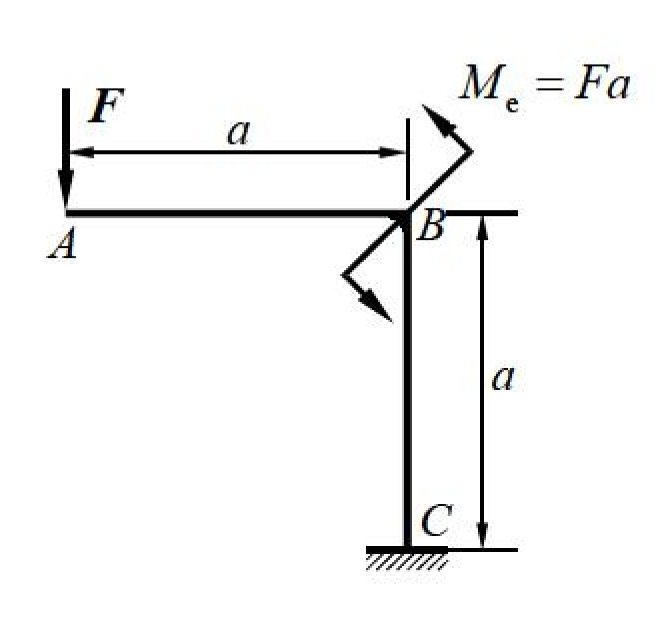
习题 12.9 图　　习题 12.10 图

12.11　等截面刚架如习题 12.11 图所示，各杆的抗弯刚度 EI 相同。试用单位载荷法计算截面的铅垂位移 w_A。略去剪力和轴力对变形的影响。

12.12　习题 12.12 图所示刚架，各杆的横截面均为圆形，直径为 d。在横截面 A 处受集中力 $\boldsymbol{F}$ 作用($\boldsymbol{F}$ 的作用线与轴线 CD 平行)。试用单位载荷法计算截面 A 的铅垂位移 Δ_{Ay} 和扭转角 φ_A。材料的弹性模量 E 和切变模量 G 均为已知。

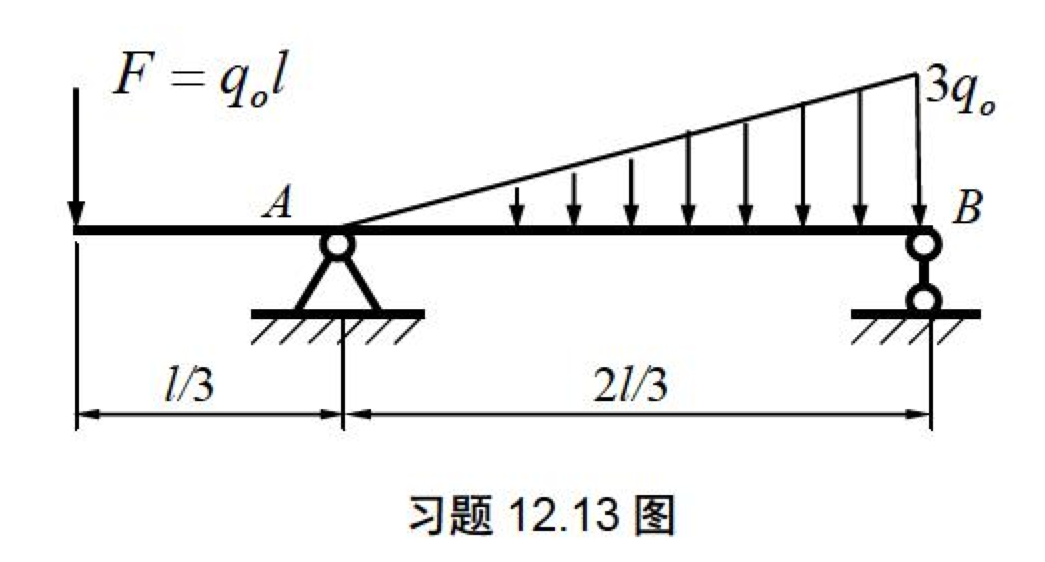
12.13　如习题 12.13 图所示，已知梁的抗弯刚度 EI 为常量，试用单位载荷法求下列外伸梁 A 点的挠度。

12.14　已知梁的抗弯刚度 EI 为常数。试用图乘法求习题 12.14 图所示悬臂梁中点 D 处铅垂位移 w_D。

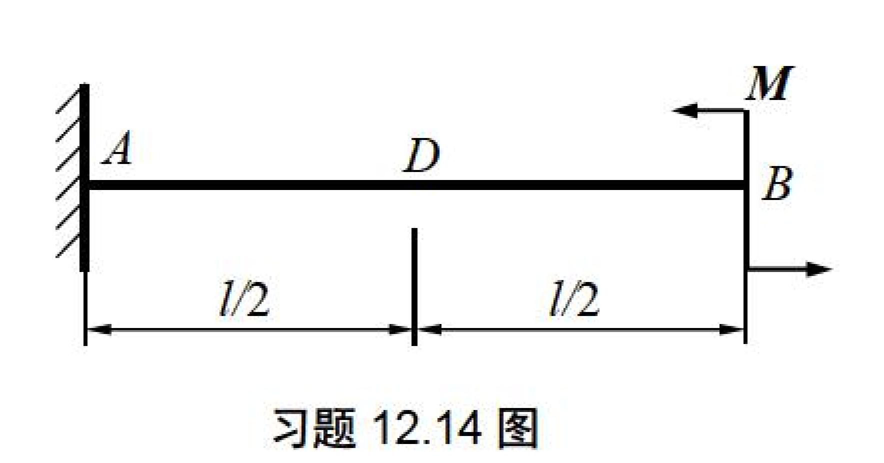


习题 12.11 图

习题 12.12 图



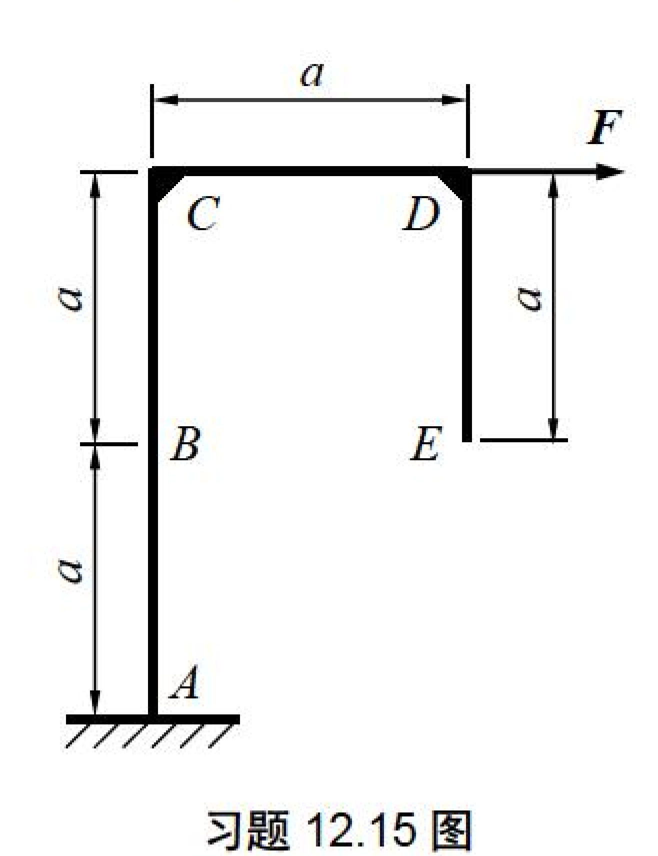
习题 12.13 图



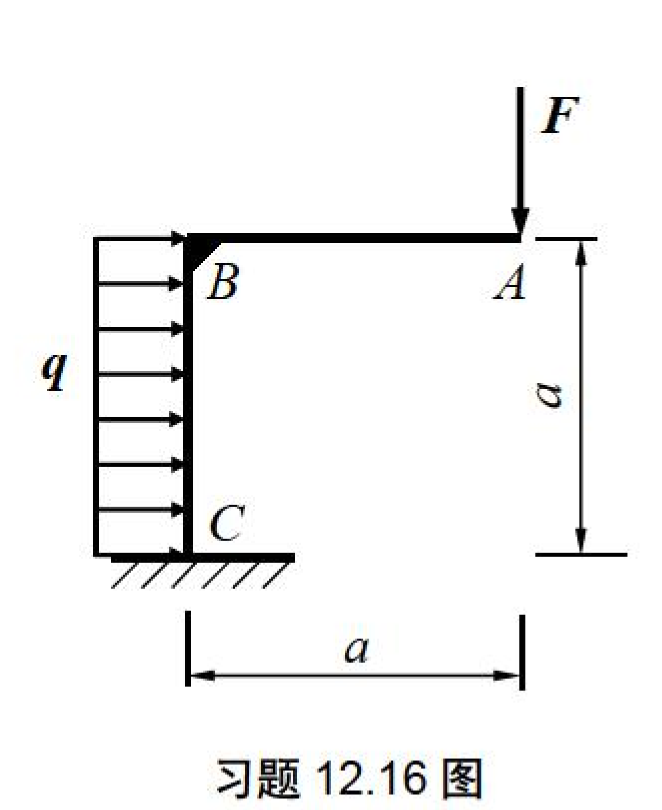
习题 12.14 图

12.15　等截面刚架 *ABCDE* 的抗弯刚度为 *EI*，受力如习题 12.15 图所示。试用图乘法求 *E* 点的水平位移 Δ_{Ex} 及两截面的相对转角 θ_{BE} 。

12.16　平面刚架受载如习题 12.16 图所示，已知 *q*、*a*、*F*=*qa*，抗弯刚度为 *EI*，试用图乘法求截面 *A* 的转角和铅垂位移。



习题 12.15 图



习题 12.16 图

附录 A　平面图形的几何性质

计算受力杆件的应力和变形时，要用到其横截面图形的几何性质，如在拉(压)杆的强度和刚度计算中要用到横截面面积 A，在圆轴扭转中计算扭转切应力和扭转角时要用到极惯性矩I_{p}，在弯曲问题中还将用到静矩 S、惯性矩 I 等。下面介绍截面图形几何性质的意义和计算方法。

A.1　静矩和形心

如图 A.1 所示，从面积为 A 的平面图形中，在坐标为(z，y)处取一微面积 dA，则 ydA、zdA 分别称为该微面积 dA 对 z 轴和 y 轴的静矩。则下列两积分式分别定义了平面图形对 z 轴或 y 轴的静矩，即

$$S_y = \int_A z\mathrm{d}A \tag{A.1a}$$

$$S_z = \int_A y\mathrm{d}A \tag{A.1b}$$

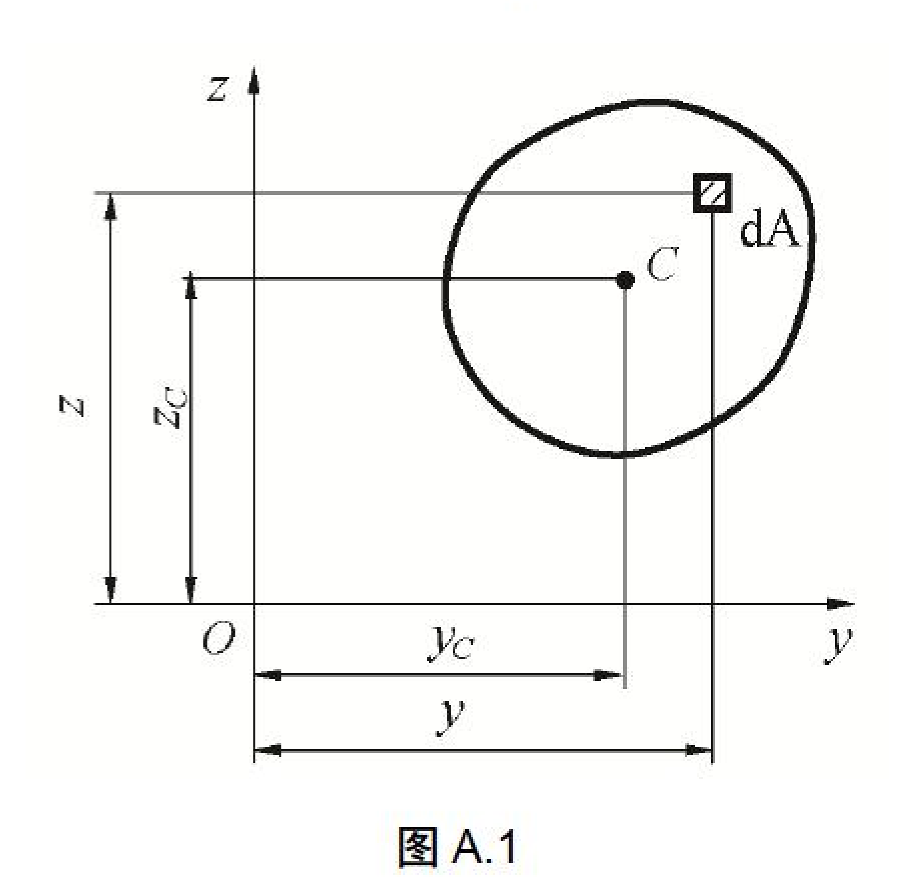


图 A.1

上述积分是对整个平面面积 A 进行的。C 是截面的形心，它的坐标是(y_C，z_C)。静矩的单位为m^3。因积分号内的 z 或 y 均为一次，故静矩又称为一次矩。

平面图形的静矩是对一定的轴而言的。同一平面图形对不同坐标轴，其静矩值就不同，可能为正、负或零。

与静力学中求均质等厚度薄板的重心相似，根据合力矩定律可求得截面图形的形心坐标y_C、z_C分别为

$$y_C = \frac{\int_A y\mathrm{d}A}{A} = \frac{S_z}{A} \tag{A.2a}$$

$$z_C = \frac{\int_A z\mathrm{d}A}{A} = \frac{S_y}{A} \tag{A.2b}$$

可将式(A.2)改写为

$$S_y = Az_C \tag{A.3a}$$

$$S_z = Ay_C \tag{A.3b}$$

这表明，平面图形对 y 轴和 z 轴的静矩，分别等于平面图形 A 乘以其形心的坐标 z_C 和 y_C。

当平面是由若干个简单图形(如矩形、圆形、三角形等)所组成的组合图形时，由于简单图形的面积与形心位置均为已知，而且由静矩定义可知，平面各组成部分对某轴静矩的代数和，即等于整个平面对同一轴的静矩。先可按式(A.1)计算出每一简单图形的静矩，然后求其代数和，即得组合平面图形的静矩，即

$$\overline{S}_y = \sum_{i=1}^{n} A_i z_i \tag{A.4a}$$

$$\overline{S}_z = \sum_{i=1}^{n} A_i y_i \tag{A.4b}$$

A_i 是任一简单图形的面积，z_i、y_i 是任一简单图形的形心坐标。计算组合平面图形形心坐标的公式为

$$\overline{y_C} = \frac{\overline{S_z}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \tag{A.5a}$$

$$\overline{z_C} = \frac{\overline{S_y}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \tag{A.5b}$$

由以上公式可知，若 $S_z = 0$ 和 $S_y = 0$，则 $y_C = 0$ 和 $z_C = 0$，即平面图形对于某一轴的静矩若等于零，则该轴必通过平面图形的形心；反之，若某一轴通过平面图形形心，则图形对该轴的静矩等于零。

例 A.1　求图 A.2 中，抛物线的方程为 $z = h\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$。计算由抛物线、$y$ 轴和 z 轴所围成的平面图形对 y 轴和 z 轴的静矩 S_y 和 S_z，并确定图形的形心 C 的坐标。

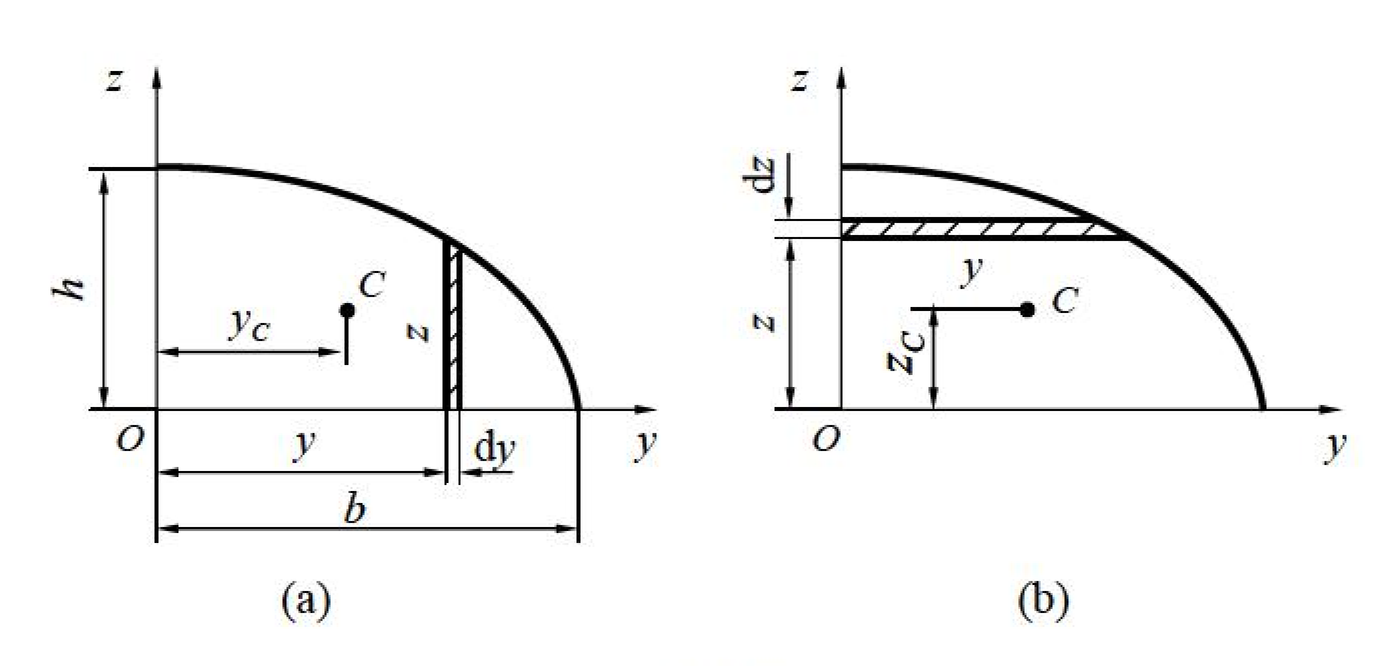


图 A.2



解：图 A.2(a)中微面积 $\mathrm{d}A$ 为

$$\mathrm{d}A = z\mathrm{d}y = h\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y$$

平面图形的面积 A 和 z 轴的静矩为

$$A = \int_A \mathrm{d}A = \int_0^b h\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y = \frac{2bh}{3}$$

$$S_z = \int_A y\mathrm{d}A = \int_0^b yh\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y = \frac{b^2h}{4}$$

同样，由图 A.2(b)中微面积 $\mathrm{d}A = y\mathrm{d}z$，得

$$S_y = \int_A z\mathrm{d}A = \int_0^h bz\sqrt{1-\frac{z}{h}}\mathrm{d}z = \frac{4bh^2}{15}$$

由式(A.3)可得形心坐标为

$$y_C = \frac{S_z}{A} = \frac{3}{8}b \quad , \qquad z_C = \frac{S_y}{A} = \frac{2}{5}h$$

例 A.2　求图 A.3 所示截面图形的形心。

解：将 T 形截面图形视为矩形Ⅰ和矩形Ⅱ的组合平面图形。

因为 z 轴是对称轴，所以形心必在 z 轴上。

(1)　求组合平面图形对 y 轴的静矩，即

$$A_1 = 80\times 20 = 1600\mathrm{mm}^2$$

$$A_2 = 120\times 20 = 2400\mathrm{mm}^2$$

$$z_{C1} = 10\mathrm{mm}，\quad z_{C2} = 20\mathrm{mm} + 60\mathrm{mm} = 80\mathrm{mm}$$

$$\overline{S}_y = \sum_{i=1}^{n} A_I z_i = 1600\times 10\mathrm{mm}^3 + 2400\times 80\mathrm{mm}^3$$

$$= 20800\mathrm{mm}^3$$

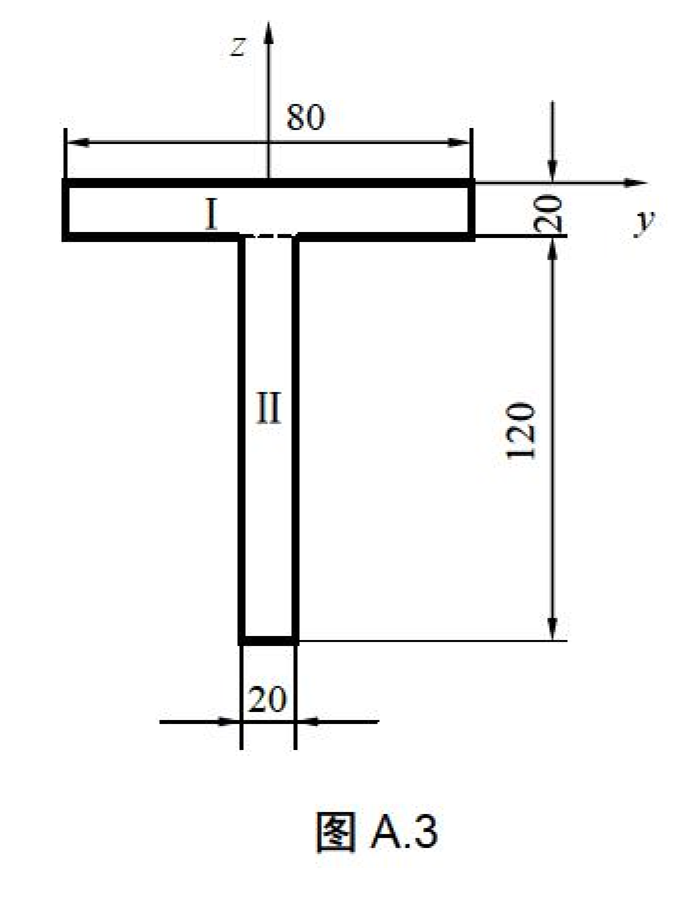


图 A.3

(2)　求组合平面图形的形心。

$$\overline{z_C} = \frac{\overline{S_y}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{20800}{1600+2400} = 52\mathrm{mm}$$

A.2　惯性矩 极惯性矩 惯性积

A.2.1　惯性矩

如图 A.4 所示，从任意平面图形中，在坐标为(z，y)处取一微面积 $\mathrm{d}A$，则 $y^2\mathrm{d}A$ 和 $z^2\mathrm{d}A$ 分别为面积元素 $\mathrm{d}A$ 对于 z 轴和 y 轴的惯性矩(若将 $\mathrm{d}A$ 看作质量，则 $y^2\mathrm{d}A$ 与 $z^2\mathrm{d}A$ 即相当于动力学中的转动惯量，因此从形式上的相似称它为惯性矩)。下列两积分式分别定义了平面图形对 z 轴或 y 轴的惯性矩，即

$$I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A \tag{A.6a}$$

$$I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A \tag{A.6b}$$

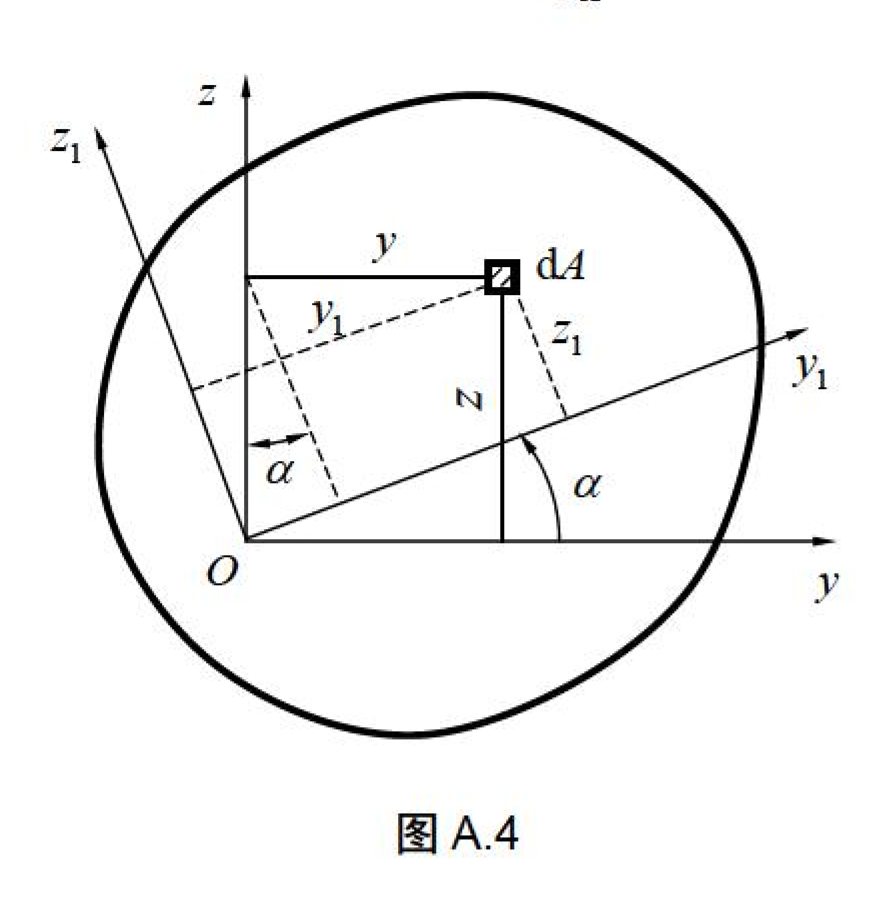


图 A.4

A.2.2　极惯性矩

以 ρ 表示微面积 dA 至原点 O 的距离，$\rho^2\mathrm{d}A$ 称为面积元素 dA 对于原点 O 的极惯性矩。平面图形对坐标原点 O 的极惯性矩可定义为

$$I_\mathrm{p} = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A \tag{A.7}$$

由图 A.4 可见，$\rho^2 = y^2 + z^2$，因此有

$$I_\mathrm{p} = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A = \int_A \left(y^2 + z^2\right)\mathrm{d}A = \int_A y^2 \mathrm{d}A + \int_A z^2 \mathrm{d}A = I_z + I_y \tag{A.8}$$

所以，截面对于任意一对互相垂直轴的惯性矩之和，恒等于它对于该两轴交点的极惯性矩。

A.2.3　惯性积

面积元素 dA 与两坐标 z、y 的乘积 $zy\mathrm{d}A$ 称为该面积元素对于 z、y 两轴的惯性积，整个图形面积的惯性积用表示为

$$I_{yz} = \int_A yz \mathrm{d}A \tag{A.9}$$

同一截面对不同轴的惯性矩或惯性积都是不相同的。惯性矩或极惯性矩的值恒为正。惯性积的值可能为正，可能为负，也可能等于零。惯性矩、极惯性矩、惯性积的常用单位为 m^4。惯性矩、极惯性矩、惯性积也称为二次矩。

如果截面图形有一根对称轴，则截面图形对包含此对称轴的任一对正交轴的惯性积均为零。图 A.5 中 z 轴为截面图形的对称轴，位于 z 轴两侧对称位置的任意两个微面积 dA 与其坐标的乘积 $yz\mathrm{d}A$ 大小相等，正、负号相反，积分求和时抵消，故有

$$I_{yz} = \int_A yz \mathrm{d}A = 0$$

所以，若 z 轴或 y 轴之一是平面图形对称轴，则其惯性积 $I_{yz} = 0$。

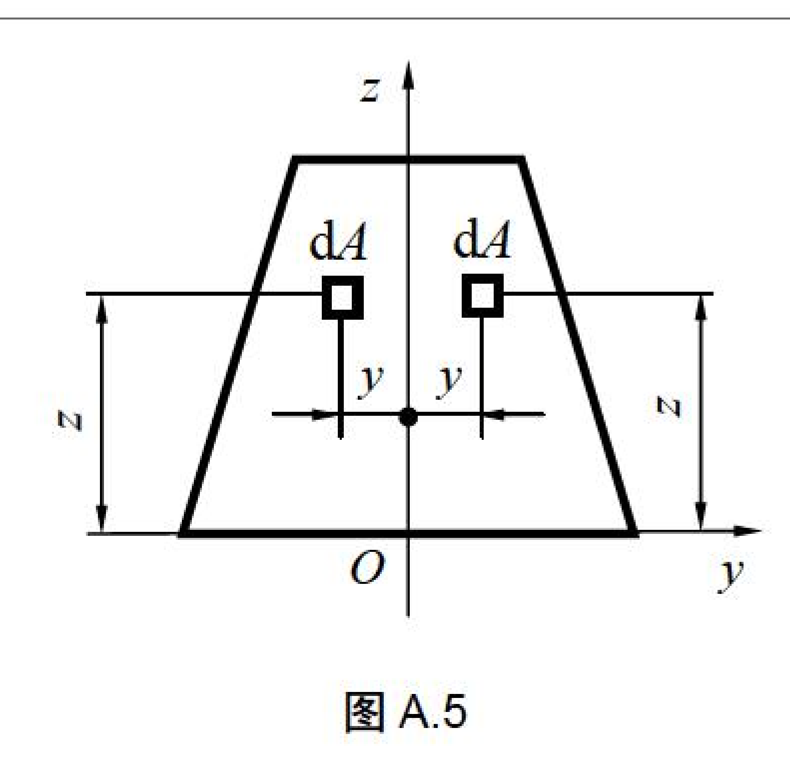


图 A.5

A.2.4 惯性半径

在材料力学的应用中，有时将惯性矩表示为截面面积 A 与某一长度平方的乘积，即

$$I_y = Ai_y^2 \tag{A.10a}$$

$$I_z = Ai_z^2 \tag{A.10b}$$

式中，i_y 与 i_z 分别为图形对于轴 y 或 z 轴的**惯性半径**，其常用单位为 m。当已知截面面积和惯性矩 I_y 和 I_z 时，惯性半径可从式(A.11)求得，即

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{A.11a}$$

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \tag{A.11b}$$

例 A.3 试计算图 A.6 所示矩形截面(高度 h、宽度 b)对于其对称轴 z、y 的惯性矩。

解：在图中取宽为 b、高为 $\mathrm{d}z$ 的细长条作为微面积 $\mathrm{d}A=b\mathrm{d}z$(图中画阴影线面积)，按式(A.6a)进行积分，可得对 y 轴的惯性矩

$$I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A = \int_0^{\frac{h}{2}} bz^2 \mathrm{d}z = \frac{bh^3}{12}$$

求 I_z 时，以同样的方法可得

$$I_z = \frac{hb^3}{12}$$

例 A.4 试计算图 A.7 所示圆形截面对于其形心轴 z、y 的惯性矩。

解：取图中的阴影线面积为 $\mathrm{d}A$，则

$$\mathrm{d}A = 2y\mathrm{d}z = 2\sqrt{r^2 - z^2}\mathrm{d}z$$

$$I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A = \int_0^r z^2 \sqrt{r^2 - z^2}\mathrm{d}z$$

$$= \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}$$

对于圆形截面，根据其对称性，必然有

$$I_z = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$$

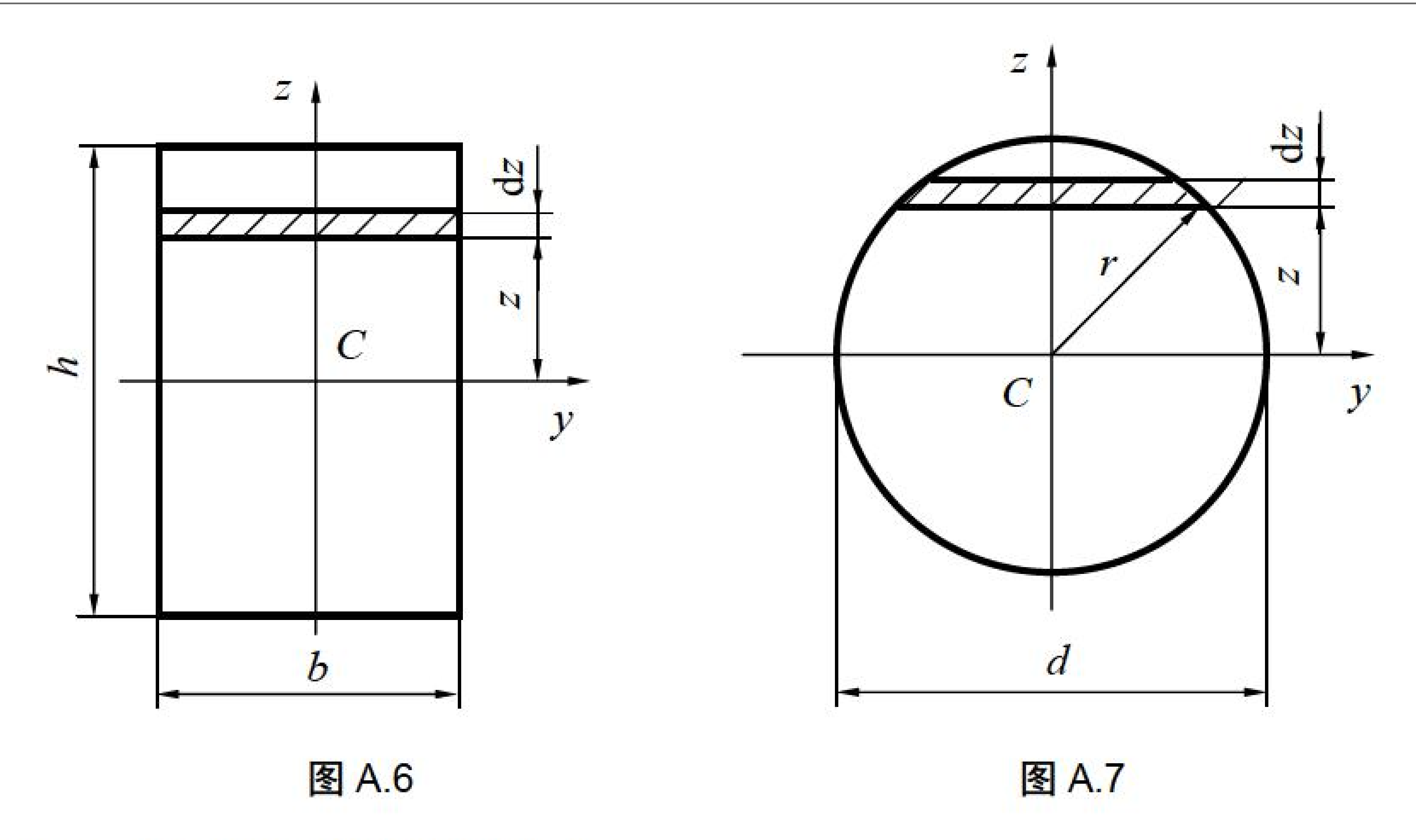
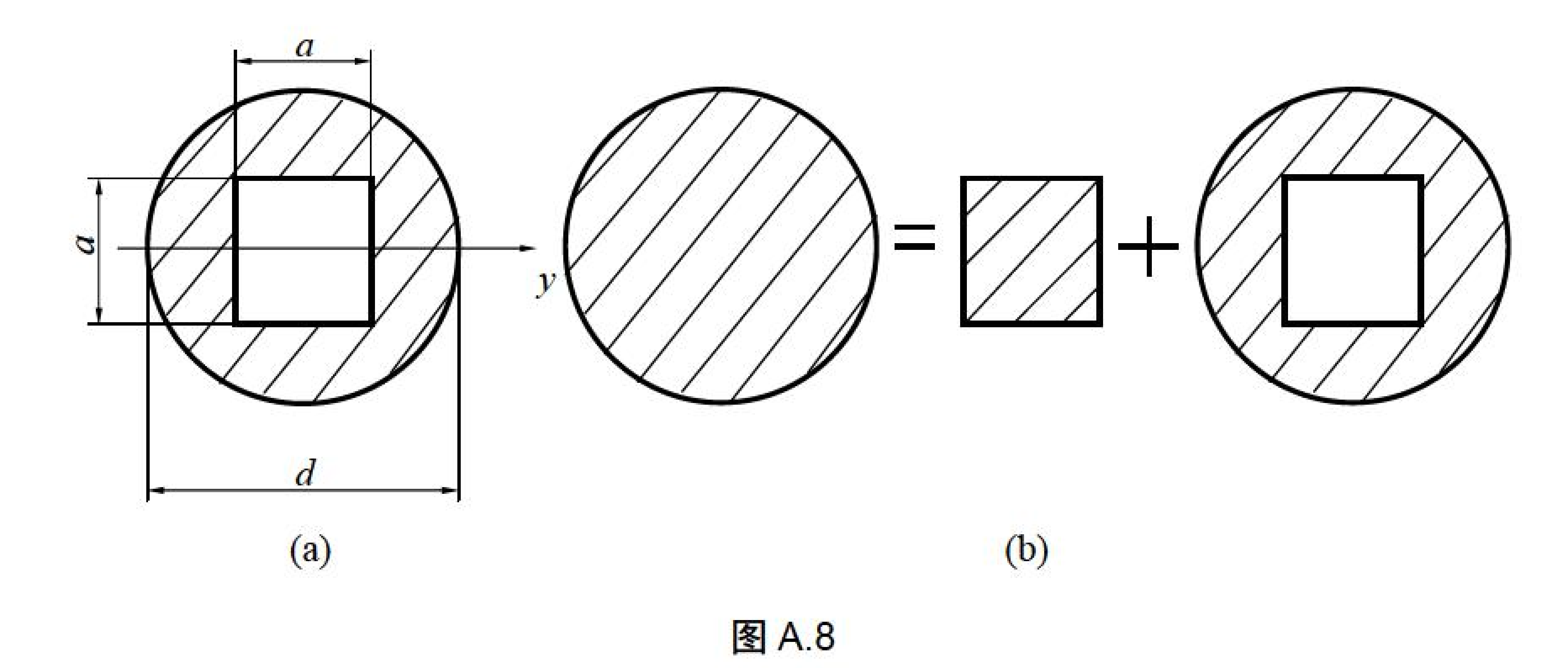


图 A.6　　图 A.7

由式(A.8)，圆形截面的极惯性矩为

$$I_{\mathrm{p}} = I_y^2 + I_z^2 = \frac{\pi d^4}{32}$$

例 A.5　试计算图 A.8(a)所示空心截面对形心轴 y 的惯性矩。



(a)　　(b)

图 A.8

解：如图 A.8(b)所示，直径为 d 的圆截面，可视为由边长为 a 的正方形截面与上述空心截面所组成。设上述空心截面对 y 轴的惯性矩为I_y，圆形与正方形截面对 y 轴的惯性矩分别为I_{dy}和I_{ay}，则有

$$I_{dy} = I_{ay} + I_z$$

$$I_z = I_{dy} - I_{ay} = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{a^4}{12}$$

A.3　平行移轴公式

同一平面图形对于两对相互平行坐标轴的惯性矩或惯性积虽然不同，但它们之间存在着一定的关系。利用这些关系可使计算得到简化和有助于计算组合图形的惯性矩。下面推导截面图形对两对平行坐标轴其惯性矩和惯性积的计算关系式。

如图 A.9 所示，设 y_C、z_C 为截面图形的形心轴，y 轴平行于 y_C 轴，z 轴平行于 z_C 轴，两坐标间关系为

$$y = y_C + b\text{，}\quad z = z_C + a$$

以上关系代入 I_y、I_z、I_{yz} 式得

$$I_y = \int_A z^2 \mathrm{d}A = \int_A (z_C + a)^2 \mathrm{d}A = \int_A z_C^2 \mathrm{d}A + 2a\int_A z_C \mathrm{d}A + a^2 \int_A \mathrm{d}A$$

$$I_z = \int_A y^2 \mathrm{d}A = \int_A (y_C + b)^2 \mathrm{d}A = \int_A y_C^2 \mathrm{d}A + 2b\int_A y_C \mathrm{d}A + b^2 \int_A \mathrm{d}A$$

$$I_{yz} = \int_A yz\mathrm{d}A = \int_A (y_C + b)(z_C + a)\mathrm{d}A = \int_A y_C z_C \mathrm{d}A + a\int_A y_C \mathrm{d}A + b\int_A z_C \mathrm{d}A + ab\int_A \mathrm{d}A$$

在以上三式中，由于 $\int_A z_C \mathrm{d}A$ 和 $\int_A y_C \mathrm{d}A$ 分别为图形对形心轴 y_C、z_C 的静矩，其值等于零；$\int_A z_C^2 \mathrm{d}A$、$\int_A y_C^2 \mathrm{d}A$ 分别为图形对形心轴 y_C、z_C 的惯性矩；$\int_A y_C z_C \mathrm{d}A$ 为图形对形心轴 y_C、z_C 的惯性积；$\int_A \mathrm{d}A = A$。则上列三式可简化为

$$I_y = I_{y_C} + a^2 A \tag{A.12a}$$

$$I_z = I_{z_C} + b^2 A \tag{A.12b}$$

$$I_{yz} = I_{y_C z_C} + abA \tag{A.12c}$$

式(A.12)称为惯性矩和惯性积的平行移轴公式。由前两式可以看出，在一组平行轴中，图形对形心轴的惯性矩最小。

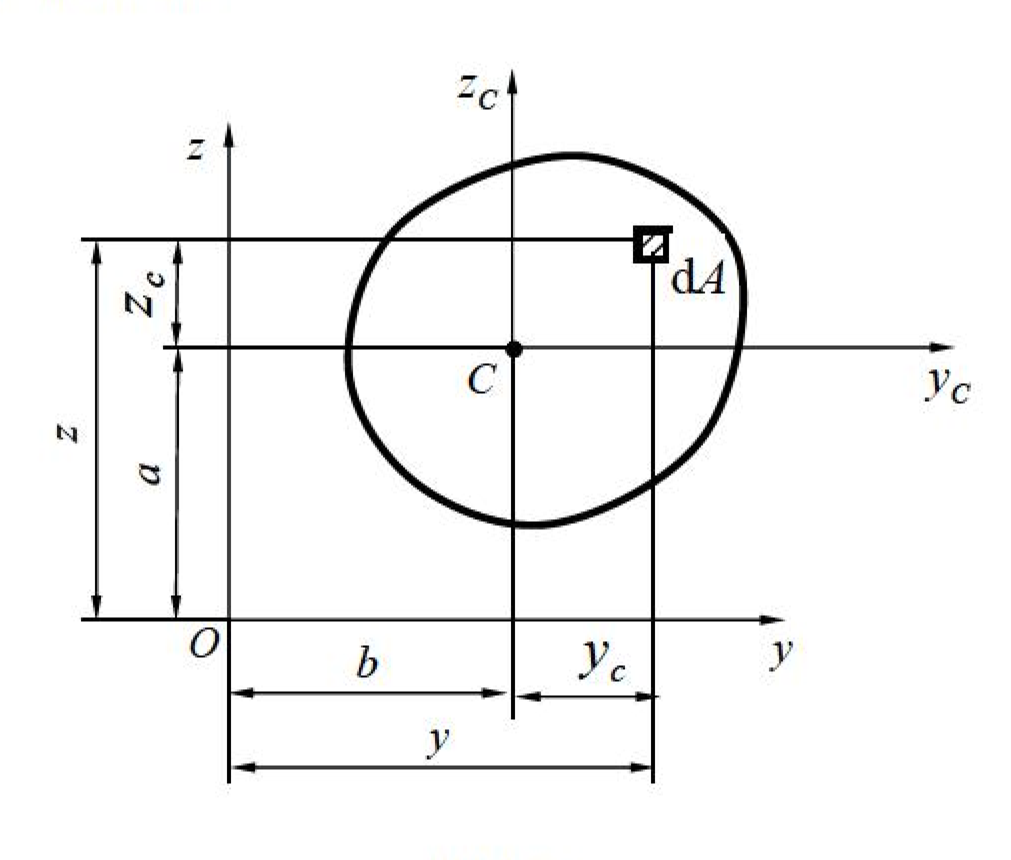


图 A.9

例 A.6　试计算图 A.10 中 T 形截面图形(参考例 A.2)对形心轴 y_C 的惯性矩。

解：应用平行移轴公式分别计算矩形Ⅰ、Ⅱ对 y_C 惯性矩。由式(A.12a)得

$$I_{yc}^{(1)} = I_{yc1} + a_1^2 A_1$$
$$= \frac{80 \times 20^3}{12}\text{mm}^4 + (52 - 10)^2 \times 80 \times 20\text{mm}^4 = 2.875 \times 10^6 \text{mm}^4$$

$$I_{yc}^{(2)} = I_{yc2} + a_2^2 A_2$$
$$= \frac{20 \times 80^3}{12}\text{mm}^4 + (140 - 60 - 52)^2 \times 120 \times 20\text{mm}^4 = 2.735 \times 10^6 \text{mm}^4$$

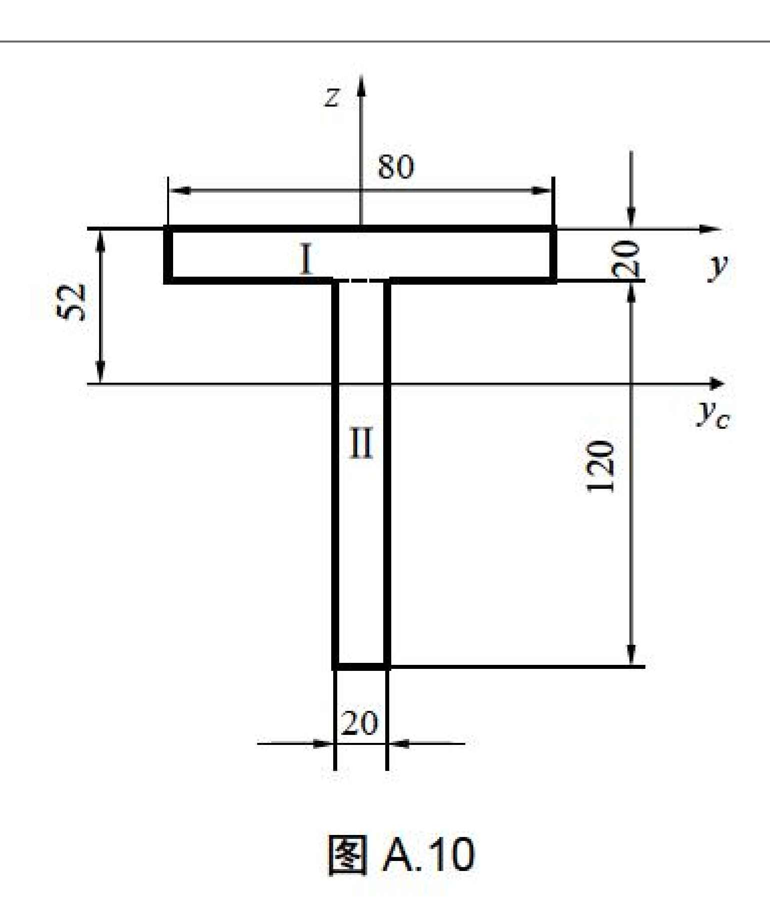


图 A.10

整个图形对形心轴 y_C 的惯性矩为

$$I_{y_C}=I_{y_C}^{(1)}+I_{y_C}^{(2)}=5.61\times10^6\,\text{mm}^4$$

A.4　转轴公式 主惯性轴 主惯性矩

A.4.1　转轴公式

设图 A.11 所示任意平面图形对 y 轴和 z 轴的惯性矩和惯性积 I_y、I_z、I_{yz} 为已知，将 y 轴和 z 轴绕坐标原点 O 旋转 α 角(规定逆时针方向为正)后，平面图形对新坐标轴 y_1 z_1 的惯性矩和惯性积应为

$$\left.\begin{aligned}I_{y_1}&=\int_A z_1^2\,\mathrm{d}A\\I_{z_1}&=\int_A y_1^2\,\mathrm{d}A\\I_{y_1z_1}&=\int_A y_1z_1\,\mathrm{d}A\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

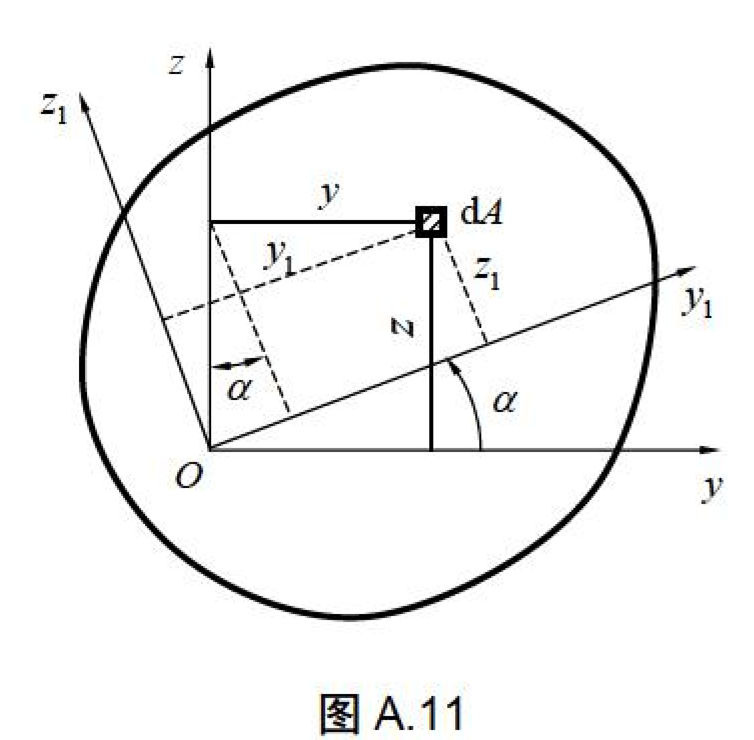


图 A.11

微面积 dA 的新旧坐标转换关系为

$$\left.\begin{aligned}y_1&=y\cos\alpha+z\sin\alpha\\z_1&=z\cos\alpha-y\sin\alpha\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

将式(b)代入式(a)，并利用三角函数倍角公式整理，便得到截面图形对新旧坐标轴的惯性矩和惯性积之间的关系为

$$I_{y_1}=\frac{I_y+I_z}{2}+\frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\alpha-I_{yz}\sin 2\alpha \tag{A.13a}$$

$$I_{z_1}=\frac{I_y+I_z}{2}-\frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\alpha+I_{yz}\sin 2\alpha \tag{A.13b}$$

$$I_{y_1z_1}=\frac{I_y-I_z}{2}\sin 2\alpha+I_{yz}\cos 2\alpha \tag{A.13c}$$

式(A.13)称为惯性矩和惯性积的**转轴公式**。公式表明，I_{y_1}、I_{z_1}、$I_{y_1z_1}$随α角的变化而改变，它们都是α角的函数。

若将式(A.13a)与(A.13b)相加 可得

$$I_{y_1}+I_{z_1}=I_y+I_z=I_{\rm p}$$

由上式可以得出结论，平面图形对过同一点的任意一对正交轴的两惯性矩之和恒为常数。 这与式(A.8)的结论相同。

A.4.2 主惯性轴、主惯性矩

由式(A.13)可知，当坐标轴旋转时，惯性积$I_{y_1z_1}$将随之变化且有正有负。因此，总可以找到一个特定的角度$\alpha_{\rm o}$，使平面对新坐标轴$y_{\rm o}$、$z_{\rm o}$的惯性积等于零，这一对坐标轴就称为主惯性轴。截面对主惯性轴的惯性矩称为主惯性矩。通过截面形心的主惯性轴称为形心主惯性轴，截面对形心主惯性轴的惯性矩称为形心主惯性矩。截面的形心主惯性轴与杆件轴线所确定的平面称为形心主惯性平面。

设$\alpha_{\rm o}$角为主惯性轴与原坐标轴之间的夹角，则将角$\alpha_{\rm o}$代入惯性积的转轴式(A.13c)，并令其等于零，即

$$I_{y_{\rm o}z_{\rm o}}=\frac{I_y-I_z}{2}\sin 2\alpha_{\rm o}+I_{yz}\cos 2\alpha_{\rm o}=0$$

由上式求得

$$\tan 2\alpha_{\rm o}=-\frac{2I_{yz}}{I_y-I_z} \tag{A.14}$$

由此式可解出$\alpha_{\rm o}$，从而确定了一对主惯性轴$y_{\rm o}$、$z_{\rm o}$的位置。

将求出角度$\alpha_{\rm o}$的数值代入式(A.13a)、式(A.13b)就可求得相应的截面主惯性矩。 为了计算方便，下面导出直接计算主惯性矩的公式。由式(A.14)可以求得

$$\cos 2\alpha_{\rm o}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(2\alpha_{\rm o})}}=\frac{I_y-I_z}{\sqrt{(I_y-I_z)^2+4{I_{yz}}^2}} \tag{c}$$

$$\sin 2\alpha_{\rm o}=\tan 2\alpha_{\rm o}\cos 2\alpha_{\rm o}=\frac{-2I_{yz}}{\sqrt{(I_y-I_z)^2+4{I_{yz}}^2}} \tag{d}$$

将式(c)、式(d)代入(A.13(a))、式(A.13(b))，经简化后得出主惯性矩的计算公式为

$$I_{y_o} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \tag{A.15a}$$

$$I_{z_o} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \tag{A.15b}$$

此外，还可通过对转轴公式中式(A.13a)、式(A.13b) 求导的方法求 I_{y_1} 、 I_{z_1} 的极值，即令

$$\frac{\mathrm{d}I_{y_1}}{\mathrm{d}\alpha} = 0 \qquad 或 \qquad \frac{\mathrm{d}I_{z_1}}{\mathrm{d}\alpha} = 0$$

所解得的 α 表达式与式(A.14)完全一致。因此，通过平面图形内任一点的主惯性轴计算出的主惯性矩，是该点所有轴的主惯性矩的极值。因为 I_{y_o} 与 I_{z_o} 之和是一常数，若 I_{y_o} 是极大值，则 I_{z_o} 就是极小值。

综上所述，对于一个有对称轴的平面图形，则对称轴以及与之垂直并通过形心的轴就是一对形心主惯性轴，可利用移轴公式等计算形心主惯性矩；对于没有对称轴的平面图形，需先计算通过形心的某一对轴的惯性矩和惯性积 I_y 、I_z 、I_{yz}，再利用式(A.14) 、 式(A.15)求取形心主惯性轴的位置 α_o 和形心主惯性矩 I_{y_o} 、 I_{z_o} 。它们在弯曲问题的计算中常需用到。

例 A.7　试计算图 A.12 中 L 形截面图形的形心主惯性轴及相应的形心主惯性矩。

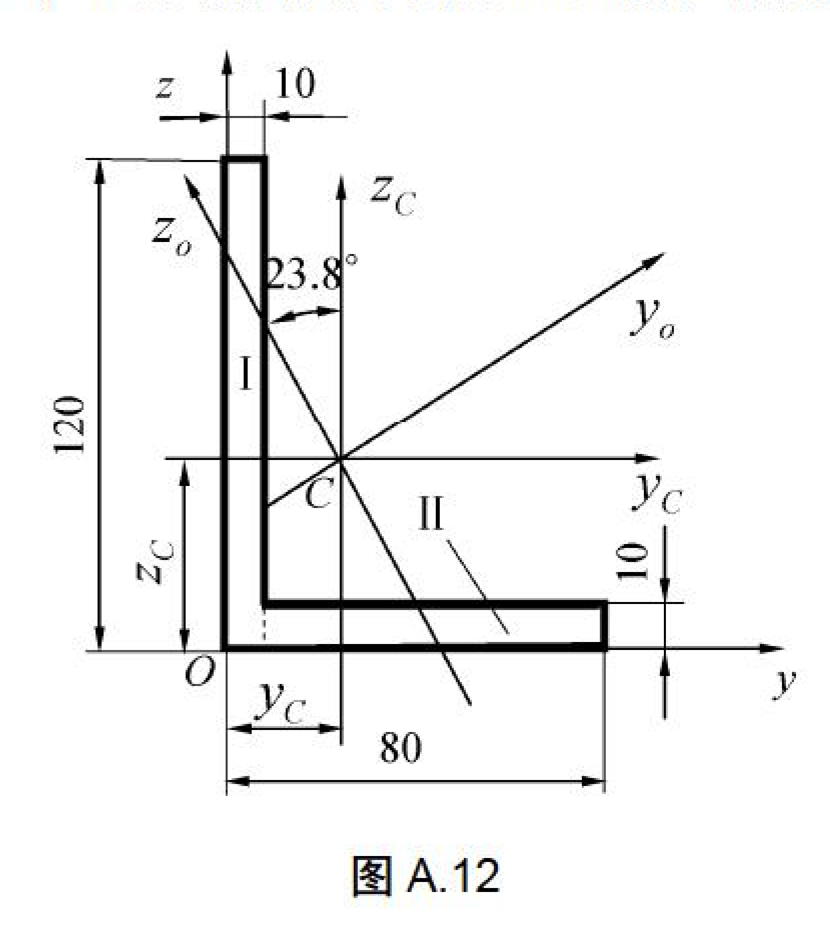


图 A.12

解：(1)　求形心位置。

选辅助坐标 yOz 如图 A.12 所示，则形心坐标为

$$\overline{y_C} = \frac{\overline{S_z}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{10\times120\times5 + 70\times10\times45}{10\times120 + 70\times10}\text{mm} = 19.7\text{mm}$$

$$\overline{z_C} = \frac{\overline{S_y}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{10\times120\times60 + 70\times10\times5}{10\times120 + 70\times10}\text{mm} = 39.7\text{mm}$$

(2) 求截面对形心的惯性矩和惯性积。

$$I_{y_C}=\left[\frac{10\times120^3}{12}+10\times120\times(60-39.5)^2+\frac{70\times10^3}{12}+70\times10\times(39.7-5)^2\right]\text{mm}^4$$
$$=2.78\times10^6\,\text{mm}^4$$
$$I_{z_C}=\left[\frac{120\times10^3}{12}+10\times120\times(19.7-5)^2+\frac{10\times70^3}{12}+70\times10\times(45-19.7)^2\right]\text{mm}^4$$
$$=1.003\times10^6\,\text{mm}^4$$

$$I_{y_Cz_C}=[-10\times120\times(60-39.7)\times(19.7-5)-70\times10\times(45-19.7)\times(39.7-5)]\text{mm}^4$$
$$=-9.73\times10^5\,\text{mm}^4$$

(3) 求形心主惯性轴的位置。

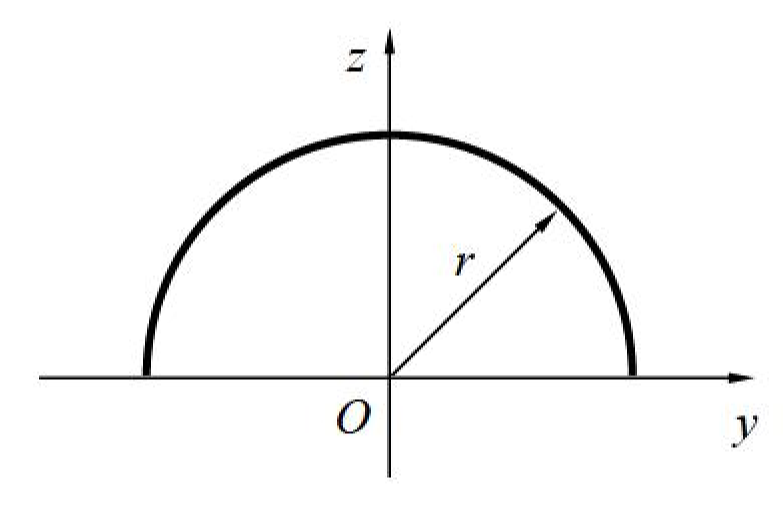
$$\tan2\alpha_{\text{o}}=-\frac{2I_{y_Cz_C}}{I_{y_C}-I_{z_C}}=-\frac{(-2\times9.73\times10^5)}{2.78\times10^6-1.003\times10^6}=1.091$$
$$\alpha=23.8^\circ \quad 或 \quad \alpha=113.8^\circ$$

(4) 求形心主惯性矩 $I_{y_{\text{o}}}$、$I_{z_{\text{o}}}$。

$$I_{y_{\text{o}}}=\frac{I_y+I_z}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(I_y-I_z)^2+4I_{yz}^2}$$
$$=\frac{2.78\times10^6+1.003\times10^6}{2}\text{mm}^4+\frac{1}{2}\sqrt{(2.78\times10^6-1.003\times10^6)^2+4\times(-9.79\times10^5)^2}\,\text{mm}^4$$
$$=3.214\times10^6\,\text{mm}^4$$
$$I_{y_{\text{o}}}=\frac{I_y+I_z}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(I_y-I_z)^2+4I_{yz}^2}=0.574\times10^6\,\text{mm}^4$$

习　　题

A.1 试求习题 A.1 图所示半圆形截面图形对 y 轴的静矩和形心坐标。

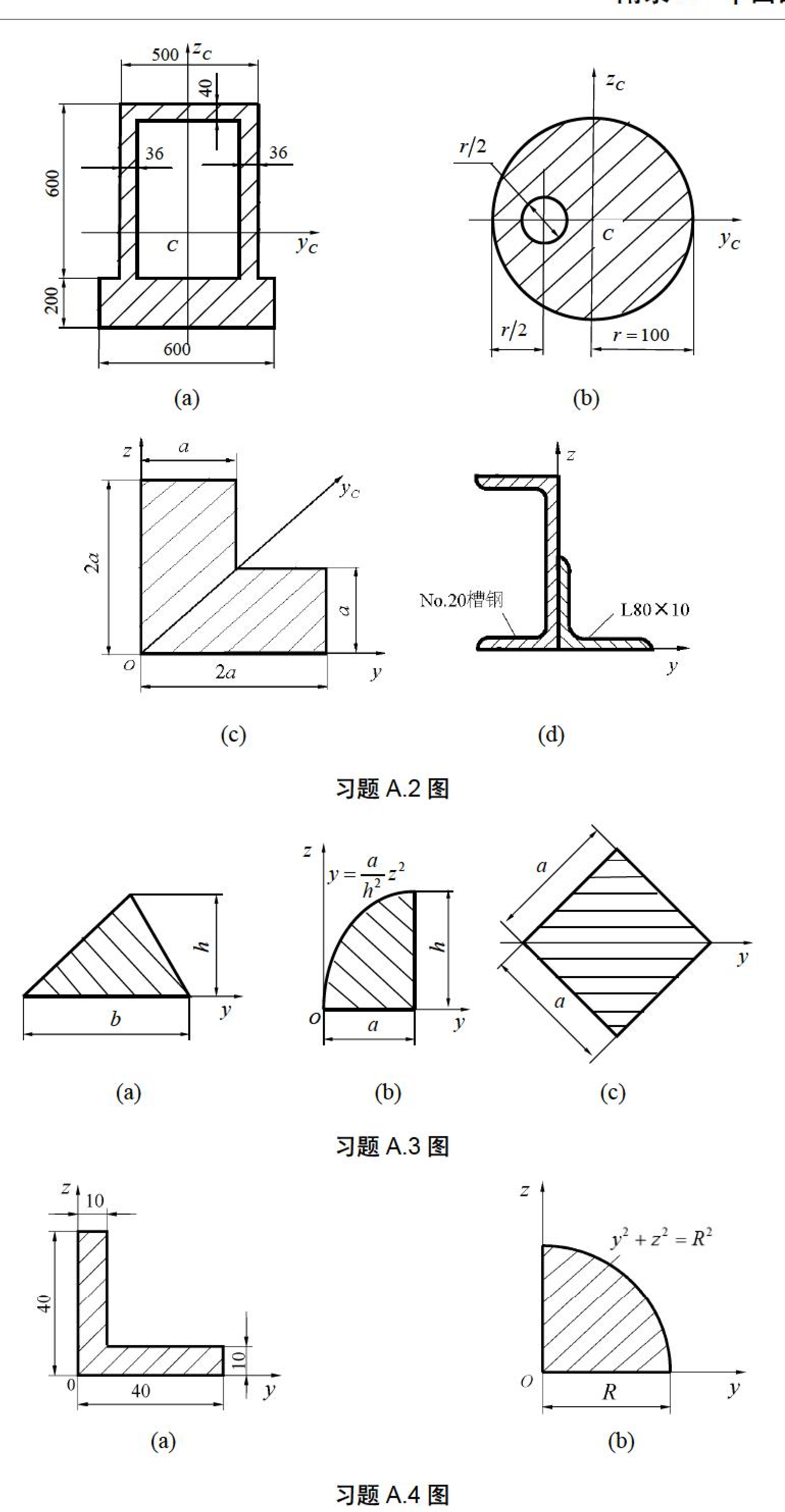


习题 A.1 图

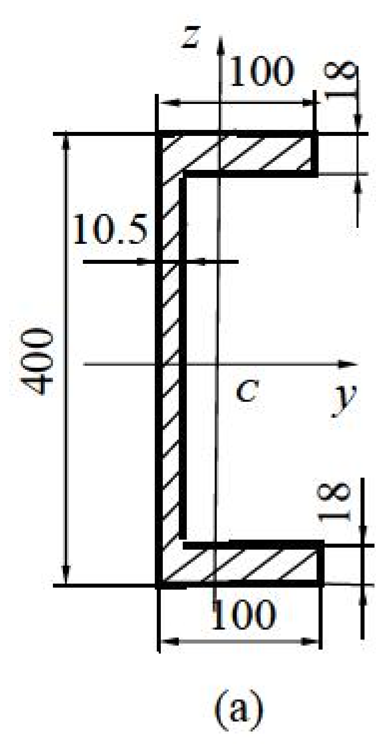
A.2 试求习题 A.2 图所示图形的形心位置。

A.3 试用积分法求习题 A.3 图所示各图形对 y 轴的惯性矩。

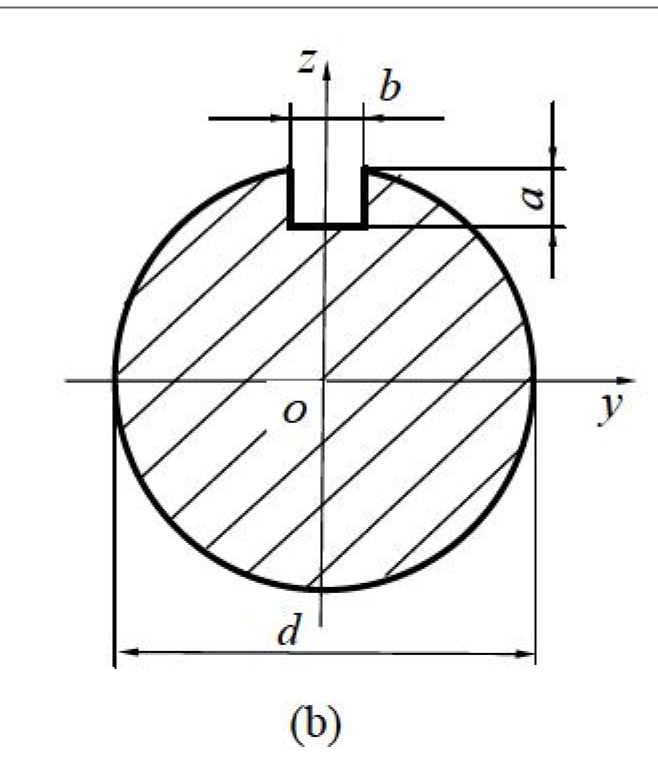
A.4 试求习题 A.4 图所示图形对 y、z 轴的惯性矩 I_y、I_z 和惯性积 I_{yz}。



A.5　试求习题 A.5 图所示各组合图形对 y 轴的惯性矩。



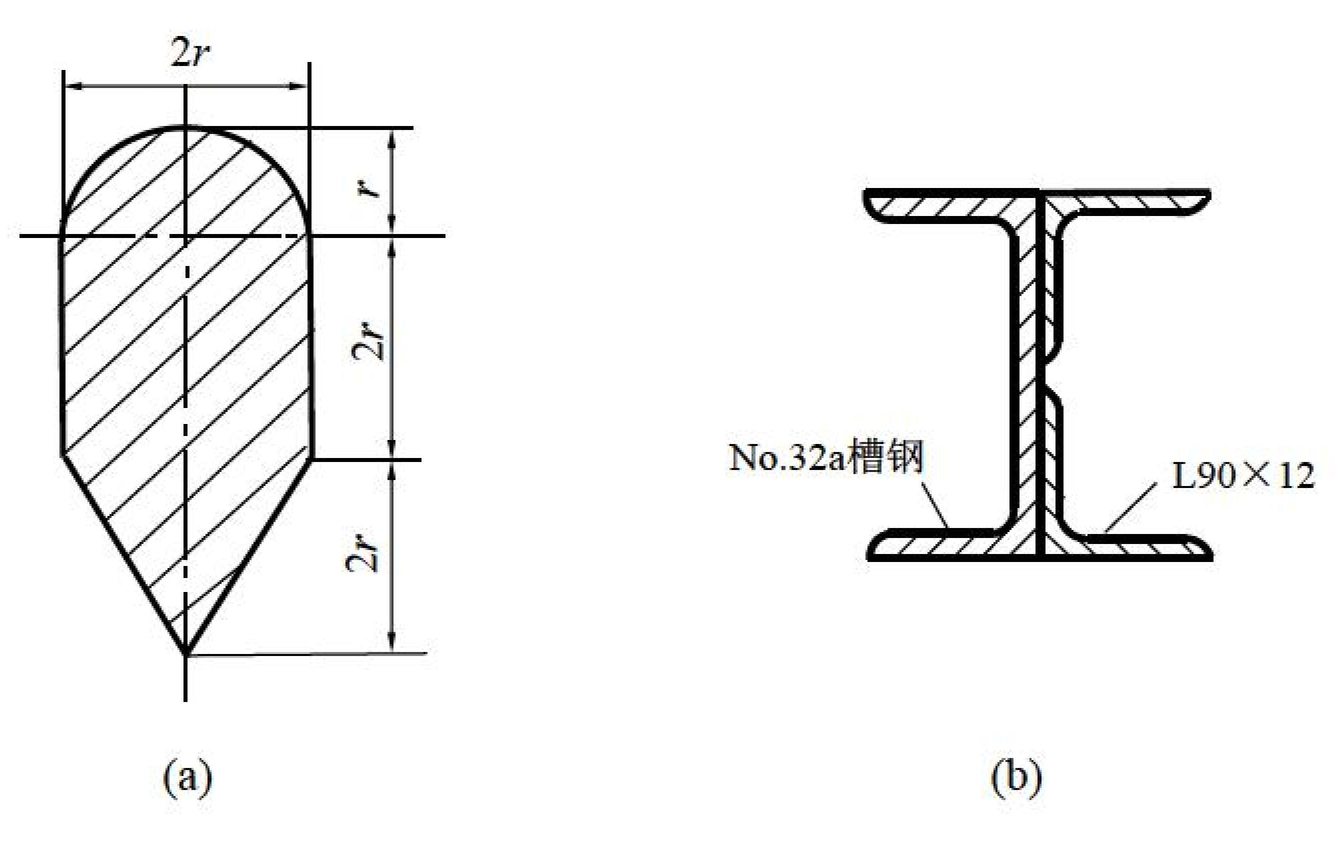
(a)



(b)

习题 A.5 图

A.6 试确定习题 A.6 图所示平面图形的形心主惯性轴的位置，并计算形心主惯性矩。



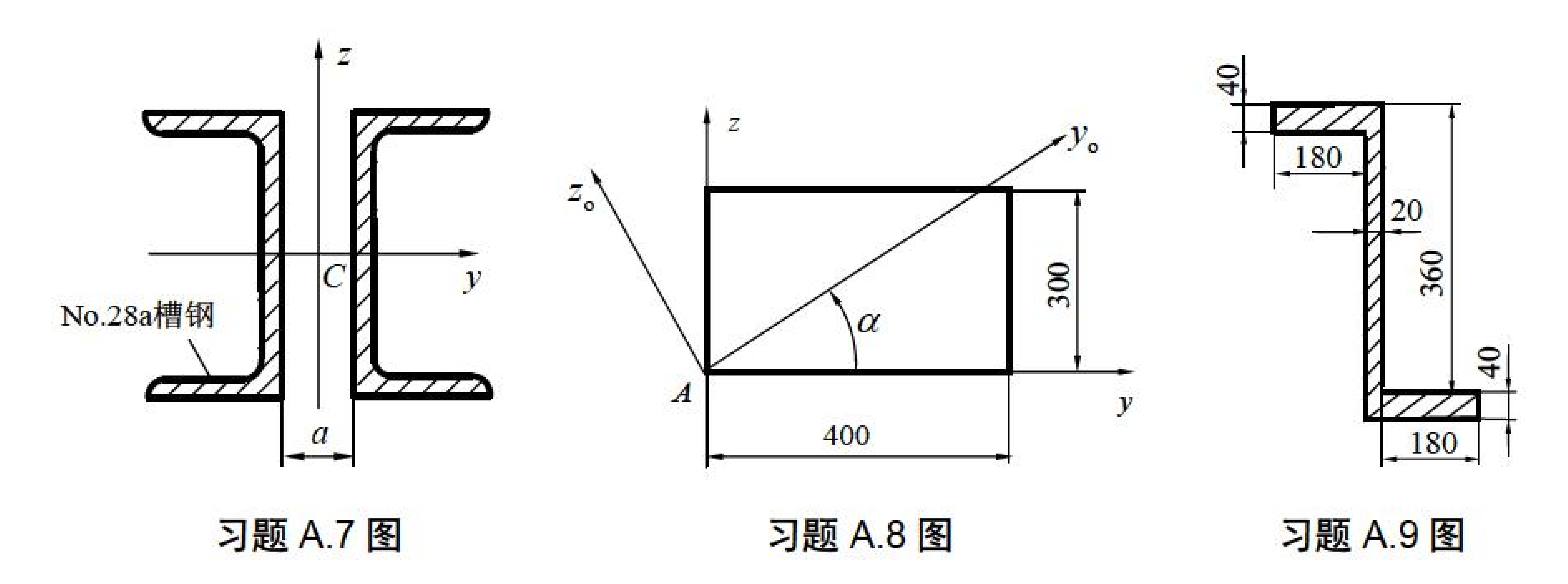
(a) (b)

习题 A.6 图

A.7 习题 A.7 图所示由两个 28 号槽钢组成的组合截面图形。(1)当 a =180mm 时，I_y、I_z 各为多少？(2)若欲使此截面对两对称轴的惯性矩 I_y、I_z 相等，则两槽钢的间距 a 应为多少？

A.8 试确定习题 A.8 图所示图形对 A 点的主惯性轴的位置，并计算主惯性矩 I_{y_0}、I_{z_0}。

A.9 试确定习题 A.9 图所示截面图形的形心主惯性轴的位置，并计算形心主惯性矩。



习题 A.7 图　　习题 A.8 图　　习题 A.9 图

在

附录 B　型钢表

表 B.1　热轧等边角钢[摘自《热扎等边角钢尺寸、外形、重量及允许偏差》(GB/T 9787—1988)]

符号意义：b —— 边宽度；　I —— 惯性矩；

d —— 边厚度；　i —— 惯性半径；

r —— 内圆弧半径；　W —— 弯曲截面系数；

r_1 —— 边端内圆弧半径；　z_0 —— 重心距离。

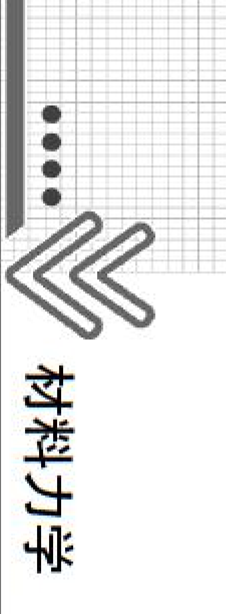
角钢型号	尺寸/mm			截面面积/cm²	理论重量/(kg/m)	外表面积/(cm²/m)	参考数值										
							$x-x$			x_0-x_0			y_0-y_0			x_1-x_1	z_0/cm
	b	d	r				I_x/cm⁴	i_x/cm	W_x/cm³	I_{x_0}/cm⁴	i_{x_0}/cm	W_{x_0}/cm³	I_{y_0}/cm⁴	i_{y_0}/cm	W_{y_0}/cm³	I_{x_1}/cm⁴	
2	20	3	3.5	1.132	0.889	0.078	0.40	0.59	0.29	0.63	0.75	0.45	0.17	0.39	0.20	0.81	0.60
		4		1.459	1.145	0.077	0.50	0.58	0.36	0.78	0.73	0.55	0.22	0.38	0.24	1.09	0.64
2.5	25	3		1.432	1.124	0.098	0.82	0.76	0.46	1.29	0.95	0.73	0.34	0.49	0.33	1.57	0.73
		4		1.859	1.459	0.097	1.03	0.74	0.59	1.62	0.93	0.92	0.43	0.48	0.40	2.11	0.76
3	30	3	4.5	1.749	1.373	0.117	1.46	0.91	0.68	2.31	1.15	1.09	0.61	0.59	0.51	2.71	0.85
		4		2.276	1.786	0.117	1.84	0.90	0.87	2.92	1.13	1.37	0.77	0.58	0.62	3.63	0.89
3.6	36	3		2.109	1.656	0.141	2.58	1.11	0.99	4.09	1.39	1.61	1.07	0.71	0.76	4.68	1.00
		4		2.756	2.163	0.141	3.29	1.09	1.28	5.22	1.38	2.05	1.37	0.70	0.93	6.25	1.04
		5		3.382	2.654	0.141	3.95	1.08	1.56	6.24	1.36	2.45	1.65	0.70	1.09	7.84	1.07

续表

角钢型号	尺寸/mm			截面面积 /cm²	理论重量 /(kg/m)	外表面积 /(cm²/m)	参考数值										
							$x-x$			x_o-x_o			y_o-y_o			x_1-x_1	z_o /cm
	b	d	r				I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	
		3		2.359	1.852	0.157	3.59	1.23	1.23	5.69	1.55	2.01	1.49	0.79	0.96	6.41	1.09
4	40	4		3.086	2.422	0.157	4.60	1.22	1.60	7.29	1.54	2.58	1.91	0.79	1.19	8.56	1.13
		5		3.791	2.976	0.156	5.53	1.21	1.96	8.76	1.52	3.10	2.30	0.78	1.39	10.74	1.17
		3	5	2.659	2.088	0.177	5.17	1.40	1.58	8.20	1.76	2.58	2.14	0.89	1.24	9.12	1.22
4.5	45	4		3.486	2.736	0.177	6.65	1.38	2.05	10.56	1.74	3.32	2.75	0.89	1.54	12.18	1.26
		5		4.292	3.369	0.176	8.04	1.37	2.51	12.74	1.72	4.00	3.33	0.88	1.81	15.25	1.30
		6		5.076	3.985	0.176	9.33	1.36	2.95	14.76	1.70	4.46	3.89	0.88	2.06	18.36	1.33
		3		2.971	2.332	0.197	7.18	1.55	1.96	11.37	1.96	3.22	2.98	1.00	1.57	12.50	1.34
5	50	4	5.5	3.897	3.059	0.197	9.26	1.54	2.56	14.70	1.94	4.16	3.82	0.99	1.96	16.69	1.38
		5		4.803	3.770	0.196	11.21	1.53	3.13	17.79	1.92	5.03	4.64	0.98	2.31	20.90	1.42
		6		5.688	4.465	0.196	13.05	1.52	3.68	20.68	1.91	5.85	5.42	0.98	2.63	25.14	1.46
		3		3.343	2.624	0.221	10.19	1.75	2.48	16.14	2.20	4.08	4.24	1.13	2.02	17.56	1.48
5.6	56	4	6	4.390	3.446	0.220	13.18	1.73	3.24	20.92	2.18	5.28	5.46	1.11	2.52	23.43	1.53
		5		5.415	4.251	0.220	16.02	1.72	3.97	25.42	2.17	6.42	6.61	1.10	2.98	29.33	1.57
		8		8.367	6.568	0.219	23.63	1.68	6.30	37.34	2.11	9.44	9.89	1.09	4.16	47.24	1.68
		4		4.978	3.907	0.248	19.03	1.96	4.13	30.17	2.46	6.78	7.89	1.26	3.29	33.35	1.70
		5		6.143	4.822	0.248	23.17	1.94	5.08	36.77	2.45	8.25	9.57	1.25	3.90	41.73	1.74
6.3	63	6	7	7.288	5.721	0.247	27.12	1.93	6.00	43.03	2.43	9.66	11.20	1.24	4.46	50.14	1.78
		8		9.515	7.469	0.247	34.46	1.90	7.75	54.56	2.40	12.25	14.33	1.23	5.47	67.11	1.85
		10		11.657	9.151	0.246	41.09	1.88	9.39	64.85	2.36	14.56	17.33	1.22	6.36	84.31	1.93

续表

角钢型号	尺寸/mm			截面面积 /cm²	理论重量 /(kg/m)	外表面积 /(cm²/m)	参考数值										
							$x-x$			x_o-x_o			y_o-y_o			x_1-x_1	z_o /cm
	b	d	r				I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	
7	70	4	8	5.570	4.372	0.275	26.39	2.18	5.14	41.80	2.74	8.44	10.99	1.40	4.17	45.74	1.86
		5		6.875	5.397	0.275	32.21	2.16	6.32	51.08	2.73	10.32	13.34	1.39	4.95	57.21	1.91
		6		8.160	6.406	0.275	37.77	2.15	7.48	59.93	2.71	12.11	15.61	1.38	5.67	68.73	1.95
		7		9.424	7.398	0.275	43.09	2.14	8.59	68.35	2.69	13.81	17.82	1.38	6.34	80.29	1.99
		8		10.667	8.373	0.274	48.17	2.12	9.68	76.37	2.68	15.43	19.98	1.37	6.98	91.92	2.03
7.5	75	5	9	7.412	5.818	0.295	39.97	2.33	7.32	63.30	2.92	11.94	16.63	1.50	5.77	70.56	2.04
		6		8.797	6.905	0.294	46.95	2.31	8.64	74.38	2.90	14.02	19.51	1.49	6.67	84.55	2.07
		7		10.160	7.976	0.294	53.57	2.30	9.93	84.96	2.89	16.02	22.18	1.48	7.44	98.71	2.11
		8		11.503	9.030	0.294	59.96	2.28	11.20	95.07	2.88	17.93	24.86	1.47	8.19	112.97	2.15
		10		14.126	11.089	0.293	71.98	2.26	13.64	113.92	2.84	21.48	30.05	1.46	9.56	141.71	2.22
8	80	5	9	7.912	6.211	0.315	48.79	2.48	8.34	77.33	3.13	13.67	20.25	1.60	6.66	85.36	2.15
		6		9.397	7.376	0.314	57.35	2.47	9.87	90.98	3.11	16.08	23.72	1.59	7.65	102.50	2.19
		7		10.860	8.525	0.314	65.58	2.46	11.37	104.07	3.10	18.40	27.09	1.58	8.58	119.70	2.23
		8		12.303	9.658	0.314	73.49	2.44	12.83	116.60	3.08	20.61	30.39	1.57	9.46	136.97	2.27
		10		15.126	11.874	0.313	88.43	2.42	15.64	140.09	3.04	24.76	36.77	1.56	11.08	171.74	2.35
9	90	6	10	10.637	8.350	0.354	82.77	2.79	12.61	131.26	3.51	20.63	34.28	1.80	9.95	145.87	2.44
		7		12.301	9.656	0.354	94.84	2.78	14.54	150.47	3.50	23.64	39.18	1.78	11.19	170.30	2.48
		8		13.944	10.946	0.353	106.47	2.76	16.42	168,97	3.48	26.55	43.97	1.78	12.35	194.80	2.52
		10		14.167	13.476	0.353	128.58	2.74	20.07	203.90	3.45	32.04	53.26	1.76	14.52	244.07	2.59
		12		20.306	15.940	0.352	149.22	2.71	23.57	236.21	3.41	37.12	62.22	1.75	16.49	293.76	2.67



续表

角钢型号	尺寸/mm			截面面积/cm²	理论重量/(kg/m)	外表面积/(cm²/m)	参考数值										
							$x-x$			x_o-x_o			y_o-y_o			x_1-x_1	z_o /cm
	b	d	r				I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_t /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	I_x /cm⁴	
10	100	6	12	11.932	9.366	0.393	114.95	3.10	15.68	181.98	3.90	25.74	47.92	2.00	12.69	200.07	2.67
		7		13.796	10.830	0.393	131.86	3.09	18.10	208.97	3.89	29.55	54.74	1.99	14. 26	233.54	2.71
		8		15.638	12.276	0.393	148.24	3.08	20.47	235.07	3.88	33.24	61.41	1.98	15.75	267.09	2.76
		10		19.261	15.120	0.392	179.51	3.05	25.06	284.68	3.84	40.26	74.35	1.96	18.54	334.48	2.84
		12		22.800	17.898	0.391	208.90	3.03	29.48	330.95	3.81	46.80	86.84	1.95	21.08	402.34	2.91
		14		26.256	20.611	0.391	236.53	3.00	33.73	374.06	3.77	52.90	99.00	1.94	23.44	470.75	2.99
		16		29.627	23.257	0.390	262.53	2.98	37.82	414.16	3.74	58.57	110.89	1.94	25.63	539.80	3.06
11	110	7	12	15.196	11.928	0.433	177.16	3.41	22.05	280.94	4.30	36.12	73.38	2.20	17.51	310.64	2.96
		8		17.238	13.532	0.433	199.46	3.40	24.95	316.49	4.28	40.69	82.42	2.19	19.39	355.20	3.01
		10		21.261	16.690	0.432	242.19	3.38	30.60	384.39	4.25	49.42	99.98	2.17	22.91	444.65	3.09
		12		25.200	19.782	0.431	282.55	3.35	36.05	448.17	4.22	57.62	116.93	2.15	26.15	534.60	3.16
		14		29.056	22.809	0.431	320.71	3.32	41.31	508.01	4.18	65.31	133.40	2.14	29.14	625.16	4.24
12.5	125	8	14	19.750	15.504	0.492	297.03	3.88	32.52	470.89	4.88	53.28	123.16	2.50	25.86	521.01	3.37
		10		24.373	19.133	0.491	361.67	3.85	39.97	573.89	4.85	64.93	149.46	2.48	30.62	651.93	3.45
		12		28.912	22.696	0.491	423.16	3.83	41.17	671.44	4.82	75.96	174.88	2.46	35.03	783.42	3.53
		14		33.367	26.193	0.490	481.65	3.80	54.16	763.73	4.78	86.41	199.57	2.45	39.13	915.61	3.61
14	140	10	14	27.373	21.488	0.551	514.65	4.34	50.58	817.27	5.46	82.56	212.04	2.78	39.20	915.11	3.82
		12		32.512	25.522	0.551	603.68	4.31	59.80	958.79	5.43	96.85	248.57	2.76	45.02	1099.28	3.90
		14		37.567	29.490	0.550	688.81	4.28	68.75	1093.56	5.40	110.47	284.06	2.75	50.45	1284.22	3.98
		16		42.539	33.393	0.549	770.24	4.26	77.46	1221.81	5.36	123.42	318.67	2.74	55.55	1470.07	4.06

续表

角钢型号	尺寸/mm			截面面积/cm²	理论重量/(kg/m)	外表面积/(cm²/m)	参考数值										
							$x-x$			x_0-x_0			y_0-y_0			x_1-x_1	z_0/cm
	b	d	r				I_x/cm⁴	I_x/cm⁴	I_z/cm⁴	I_x/cm⁴	I_x/cm⁴	I_x/cm⁴	I_x/cm⁴	I_x/cm⁴	I_x/cm⁴	I_x/cm⁴	
16	160	10	16	31.502	24.729	0.630	779.53	4.98	66.70	1237.30	6.27	109.36	321.76	3.20	52.76	1365.33	4.31
		12		37.441	29.391	0.630	916.58	4.95	78.98	1455.68	6.24	128.67	377.49	3.18	60.74	1639.57	4.39
		14		43.296	33.987	0.629	1048.36	4.92	90.05	1665.02	6.20	147.17	431.70	3.16	68.24	1914.68	4.47
		16		49.067	38.518	0.629	1175.08	4.89	102.63	1865.57	6.17	164.89	484.59	3.14	75.31	2190.82	4.55
18	180	12		42.241	33.159	0.710	1321.35	5.59	100.82	2100.10	7.05	165.00	542.61	3.58	78.41	2332.80	4.89
		14		48.896	38.383	0.709	1514.48	5.56	116.25	2407.42	7.02	189.14	621.53	3.56	88.38	2723.48	4.97
		16		55.467	43.542	0.709	1700.99	5.54	131.13	2703.37	6.98	212.40	698.60	3.55	97.83	3115.29	5.05
		18		61.955	48.634	0.708	1875.12	5.50	145.64	2988.24	6.94	234.78	762.01	3.51	105.14	3502.43	5.13
20	200	14	18	54.642	42.894	0.788	2103.55	6.20	144.70	3343.26	7.82	236.40	863.83	3.98	111.82	3734.10	5.46
		16		62.013	48.680	0.788	2366.15	6.18	163.65	3760.89	7.79	265.93	971.41	3.96	123.96	4270.39	5.54
		18		69.301	54.401	0.787	2620.64	6.15	182.22	4164.54	7.75	294.48	1076.74	3.94	135.52	4808.13	5.62
		20		76.505	60.056	0.787	2867.30	6.12	200.42	4554.55	7.72	322.06	1180.04	3.93	146.55	5347.51	5.69
		24		90.661	71.168	0.785	3338.25	6.07	236.17	5294.97	7.64	374.41	1381.53	3.90	166.65	6457.16	5.87

表 B.2　热轧不等边角钢[摘自《热扎不等边角钢尺寸、外形、重量及允许偏差》(GB/T 9788—1988)]

符号意义：

B—— 长边长度；　b —— 短边长度；

d —— 边厚；　r —— 内圆弧半径；

r_1 —— 边端内圆弧半径；　x_o —— 形心坐标；

y_o —— 形心坐标；　I—— 惯性矩；

i —— 惯性半径；　W —— 弯曲截面系数

型号	尺寸/mm				截面面积/cm²	理论重量/(kg/m)	外表面积/(m²/m)	参考数值														
								x − x			y − y			$x_1 - x_1$		$y_1 - y_1$		u − u				
	B	b	d	r				I_x/cm⁴	i_x/cm	W_x cm³	I_y/cm⁴	i_y/cm	W_y/cm³	I_{x_1}/cm⁴	y_o/cm	I_{y_1}/cm⁴	x_o/cm	I_u/cm⁴	i_u/cm	W_u/cm³	tanα
2.5/1.6	25	16	3	3.5	1.162	0.912	0.080	0.70	0.78	0.43	0.22	0.44	0.19	1.56	0.86	0.43	0.42	0.14	0.34	0.16	0.392
			4		1.499	1.176	0.079	0.88	0.77	0.55	0.27	0.43	0.24	2.09	0.90	0.59	0.46	0.17	0.34	0.20	0.381
3.2/2	32	20	3		1.492	1.171	0.102	1.53	1.01	0.72	0.46	0.55	0.30	3.27	1.08	0.82	0.49	0.28	0.43	0.25	0.382
			4		1.939	1.522	0.101	1.93	1.00	0.93	0.57	0.54	0.39	4.37	1.12	1.12	0.53	0.35	0.42	0.32	0.374
4/2.5	40	25	3	4	1.890	1.487	0.127	3.08	1.28	1.15	0.93	0.70	0.49	5.39	1.32	1.59	0.59	0.56	0.54	0.40	0.385
			4		2.467	1.936	0.127	3.93	1.26	1.49	1.18	0.69	0.63	8.53	1.37	2.14	0.63	0.71	0.54	0.52	0.381
4.5/2.8	45	28	3	5	2.149	1.687	0.143	4.45	1.44	1.47	1.34	0.79	0.62	9.10	1.47	2.23	0.64	0.80	0.61	0.51	0.383
			4		2.806	2.203	0.143	5.69	1.42	1.91	1.70	0.78	0.80	12.13	1.51	3.00	0.68	1.02	0.60	0.66	0.380
5/3,2	50	32	3	5.5	2.431	1.908	0.161	6.24	1.60	1.84	2.02	0.91	0.82	12.49	1.60	3.31	0.73	1.20	0.70	0.68	0.404
			4		3.177	2.494	0.160	8.02	1.59	2.39	2.58	0.90	1.06	16.65	1.65	4.45	0.77	1.53	0.69	0.87	0.402

续表

型号	尺寸/mm				截面面积/cm^2	理论重量/(kg/m)	外表面积/(m^2/m)	参考数值													
								$x-x$			$y-y$			x_1-x_1		y_1-y_1		$u-u$			
	B	b	d	r				I_x /cm^4	i_x /cm	W_x cm^3	I_y /cm^4	i_y /cm	I_x /cm^4	i_x /cm	W_x cm^3	I_y /cm^4	i_y /cm	I_x /cm^4	i_x /cm	W_x cm^3	tanα
5.6/3.6	56	36	3	6	2.743	2.153	0.181	8.88	1.80	2.32	2.92	1.03	1.05	17.54	1.78	4.70	0.80	1.73	0.79	0.87	0.408
			4		3.590	2.818	0.180	11.45	1.79	3.03	3.76	1.02	1.37	23.39	1.82	6.33	0.85	2.23	0.79	1.13	0.408
			5		4.415	3.466	0.180	13.86	1.77	3.71	4.49	1.01	1.65	29.25	1.87	7.94	0.88	2.67	0.78	1.36	0.404
6.3/4	63	40	4	7	4.058	3.185	0.202	16.49	2.02	3.87	5.23	1.14	1.70	33.30	2.04	8.63	0.92	3.12	0.88	1.40	0.398
			5		4.993	3.920	0.202	20.02	2.00	4.74	6.31	1.12	2.43	41.63	2.08	10.86	0.95	3.76	0.87	1.71	0.396
			6		5.908	4.638	0.201	23.36	1.98	5.59	7.29	1.11	2.71	49.98	2.12	13.12	0.99	4.34	0.86	1.99	0.393
			7		6.802	5.339	0.201	26.53	1.96	6.40	8.24	1.10	2.78	58.07	2,15	15.47	1.03	4.97	0.86	2.29	0.389
7/4.5	70	45	4	7.5	4.547	3.570	0.226	23.17	2.26	4.86	7.55	1.29	2.17	45.92	2.24	12.26	1.02	4.40	0.98	1.77	0.410
			5		5.609	4.403	0.225	27.95	2.23	5.92	9.13	1.28	2.65	57.10	2.28	15.39	1.06	5.40	0.98	2.19	0.407
			6		6.647	5.218	0.225	32.54	2.21	6.95	10.62	1.26	3.12	68.35	2.32	18.58	1.09	6.35	0.98	2.39	0.404
			7		7.657	6.011	0.225	37.22	2.20	8.03	12.01	1.25	3.57	79.99	2.36	21.84	1.13	7.16	0.97	2.94	0.402
7.5/5	75	50	5	8	6.125	4.808	0.245	34.86	2.39	6.83	12.61	1.44	3.30	70.00	2.40	21.04	1.17	7.41	1.10	2.74	0.435
			6		7.260	5.699	0.245	41.12	2.38	8.12	14.70	1.42	3.88	84.30	2.44	25.37	1.21	8.54	1.08	3.19	0.435
			8		9.467	7.431	0.244	52.39	2.35	10.52	18.53	1.40	4.99	112.50	2.52	34.23	1.29	10.87	1.07	4.10	0.429
			10		11.590	9.098	0.244	62.71	2.33	12.79	21.96	1.38	6.04	140.80	2.60	43.43	1.36	13.10	1.06	4.99	0.423
8/5	80	50	5		6.375	5.005	0.255	41.96	2.56	7.78	12.82	1.42	3.32	85.21	2.60	21.06	1.14	7.66	1.10	2.74	0.388
			6		7.560	5.935	0.255	49.49	2.56	9.25	14.95	1.41	3.91	102.53	2.65	25.41	1.18	8.85	1.08	3.20	0.387
			7		8.724	6.848	0.255	56.16	2.54	10.58	16.96	1.39	4.48	119.33	2.69	29.82	1.21	10.18	1.08	3.70	0.384
			8		9.867	7.745	0.254	62.83	2.52	11.92	18.85	1.38	5.03	136.41	2.73	34.32	1.25	11.38	1.07	4.16	0.381

续表

型号	尺寸/mm				截面面积 /cm²	理论重量 /(kg/m)	外表面积 /(m²/m)	参考数值													
								$x-x$			$y-y$			x_1-x_1		y_1-y_1		$u-u$			
								I_x /cm⁴	i_x /cm	W_x cm³	I_y /cm⁴	i_y /cm	I_x /cm⁴	i_x /cm	W_x cm³	I_y /cm⁴	i_y /cm	I_x /cm⁴	i_x /cm	W_x cm³	$\tan\alpha$
9/5.6	90	56	5	9	7.212	5.661	0.287	60.45	2.90	9.92	18.32	1.59	4.21	121.32	2.91	29.53	1.25	10.98	1.23	3.49	0.385
			6		8.557	6.717	0.286	71.03	2.88	11.74	21.42	1.58	4.96	145.59	2.95	35.58	1.29	12.90	1.23	4.18	0.384
			7		9.880	7.756	0.286	81.01	2.86	13.49	24.36	1.57	5.70	169.66	3.00	41.71	1.33	14.67	1.22	4.72	0.382
			8		11.183	8.779	0.286	91.03	2.85	15.27	27.15	1.56	6.41	194.17	3.04	47.93	1.36	16.34	1.21	5.29	0.380
10/6.3	100	63	6	10	9.617	7.550	0.320	99.06	3.21	14.64	30.94	1.79	6.35	199.71	3.24	50.50	1.43	18.42	1.38	5.25	0.394
			7		11.111	8.722	0.320	113.45	3.20	16.88	35.26	1.78	7.29	233.00	3.28	59.14	1.47	21.00	1.38	6.02	0.394
			8		12.584	9.878	0.319	127.37	3.18	19.08	39.39	1.77	8.21	266.32	3.32	67.88	1.50	23.50	1.37	6.78	0.391
			10		15.467	12.142	0.319	153.81	3.15	23.32	47.12	1.74	9.98	333.06	3.40	85.73	1.58	28.33	1.35	8.24	0.387
10/8	100	80	6	10	10.637	8.350	0.354	107.04	3.17	15.19	61.24	2.40	10.16	199.83	2.95	102.68	1.97	31.65	1.72	8.37	0.627
			7		12.301	9.656	0.354	122.73	3.16	17.52	70.78	2.39	11.71	233.20	3.00	119.98	2.01	36.17	1.72	9.60	0.626
			8		13.944	10.946	0.353	137.92	3.14	19.81	78.58	2.37	13.21	266.61	3.04	137.37	2.05	40.58	1.71	10.80	0.625
			10		17.167	13.476	0.353	166.87	3.12	24.24	94.65	2.35	16.12	333.63	3.12	172.48	2.13	49.10	1.69	13.12	0.622
11/7	110	70	6		10.637	8.350	0.354	133.37	3.54	17.85	42.92	2.01	7.90	265.78	3.53	69.08	1.57	25.36	1.54	6.53	0.403
			7		12.301	9.656	0.354	153.00	3.53	20.60	49.01	2.00	9.09	310.07	3.57	80.82	1.61	28.95	1.53	7.50	0.402
			8		13.944	10.946	0.353	172.04	3.51	23.30	54.87	1.98	10.25	354.39	3.62	92.70	1.65	32.45	1.53	8.45	0.401
			10		17.167	13.467	0.353	208.39	3.48	28.54	65.88	1.96	12.48	443.13	3.70	116.83	1.72	39.20	1.51	10.29	0.397
12.5/8	125	80	7	11	14.096	11.066	0.403	227.98	4.02	26.86	74.42	2.30	12.01	454.99	4.01	120.32	1.80	43.81	1.76	9.92	0.408
			8		15.989	12.551	0.403	256.77	4.01	30.41	83.49	2.28	13.56	519.99	4.06	137.85	1.84	49.15	1.75	11.18	0.407
			10		19.712	15.474	0.402	312.04	3.98	37.33	100.67	2.26	16.56	650.09	4.14	173.40	1.92	59.45	1.74	13.64	0.404
			12		23.351	18.330	0.402	364.41	3.95	44.01	116.67	2.24	19.43	780.39	4.22	209.67	2.00	69.35	1.72	16.01	0.400

续表

型号	尺寸/mm				截面面积/cm²	理论重量/(kg/m)	外表面积/(m²/m)	参考数值													
								$x-x$			$y-y$			x_1-x_1		y_1-y_1		$u-u$			
								I_x/cm⁴	i_x/cm	W_x cm³	I_y/cm⁴	i_y/cm	I_x/cm⁴	i_x/cm	W_x cm³	I_y/cm⁴	i_y/cm	I_x/cm⁴	i_x/cm	W_x cm³	$\tan\alpha$
14/9	140	90	8	12	18.038	14.160	0.453	365.64	4.50	38.48	120.69	2.59	17.34	730.53	4.50	195.79	2.04	70.83	1.98	14.31	0.411
			10		22.261	17.475	0.452	445.50	4.47	47.31	146.03	2.56	21.22	913.20	4.58	245.92	2.21	85.82	1.96	17.48	0.409
			12		26.400	20.724	0.451	521.59	4.44	55.87	169.79	2.54	24.95	1096.09	4.66	296.89	2.19	100.21	1.95	20.54	0.406
			14		30.456	23.908	0.451	594.10	4.42	64.18	192.10	2.51	28.54	1279.26	4.74	348.82	2.27	114.13	1.94	23.52	0.403
16/10	160	100	10	13	25.315	19.872	0.512	668.69	5.14	62.13	205.03	2.85	26.56	1362.89	5.24	336.59	2.28	121.74	2.19	21.92	0.390
			12		30.054	23.592	0.511	784.91	5.11	73.49	239.09	2.82	31.28	1635.56	5.32	405.94	2.36	142.33	2.17	25.79	0.388
			14		34.709	27.247	0.510	896.30	5.08	84.56	271.20	2.80	35.83	1908.50	5.40	476.42	2.43	162.23	2.16	29.56	0.385
			16		39.281	30.835	0.510	1003.04	5.05	95.33	301.60	2,77	40.24	2181.79	5.48	548.22	2.51	182.57	2.16	33.44	0.382
18/11	180	110	10	14	28.373	22.273	0.571	956.25	5.80	78.96	278.11	3.13	32.49	1940.40	5.89	447.22	2.44	166.50	2.42	26.88	0.376
			12		33.712	26.464	0.571	1124.72	5.78	93.53	325.03	3.10	38.32	2328.35	5.98	538.94	2.52	194.87	2.40	31.66	0.374
			14		38.967	30.589	0.570	1286.91	5.75	107.76	369.55	3.08	43.97	2716.60	6.06	631.95	2.59	222.30	2.39	36.32	0.372
			16		44.139	34.649	0.569	1443.06	5.72	121.64	411.85	3.06	49.44	3105.15	6.14	726.46	2.67	248.84	2.38	40.87	0.369
20/12.5	200	125	12		37.912	29.761	0.641	1570.90	6.44	116.73	483.16	3.57	49.99	3193.85	6.54	787.74	2.83	285.79	2.74	41.23	0.392
			14		43.867	34.436	0.640	1800.97	6.41	134.65	550.83	3.54	57.44	3726.17	6.62	922.47	2.91	326.58	2.73	47.34	0.390
			16		49.739	39.045	0.639	2023.35	6.38	152.18	615.44	3.52	64.69	4258.86	6.70	1058.86	2.99	366.21	2.71	53.32	0.388
			18		55.526	43.588	0.639	2238.30	6.35	169.33	677.19	3.49	71.74	4792.00	6.78	1197.13	3.06	404.83	2.70	59.18	0.385

表 B.3　热轧槽钢[摘自《热扎槽钢尺寸、外形、重量及允许偏差》(GB/T 707—1988)]

符号意义：

h—— 高度；
b—— 腿宽度；
d ——腰厚度；
t—— 平均腿厚度；
r—— 内圆弧半径；
r_1—— 腿端圆弧半径；
I—— 惯性矩；
W—— 弯曲截面系数；
i—— 惯性半径；
z_o——$y-y$ 轴与 y_1-y_1 轴间距。

型号	尺寸/mm						截面面积 /cm²	理论重量 /(kg/m)	参考数值							
									$x-x$			$y-y$			y_1-y_1	z_o /cm
	h	b	d	t	r	r_1			W_x /cm³	I_x /cm⁴	i_x /cm	W_y /cm³	I_y /cm⁴	i_y /cm	I_{y_1} /cm⁴	
5	50	37	4.5	7	7	3.5	6.928	5.348	10.4	26.0	1.94	3.55	8.30	1.10	20.9	1.35
6.3	63	40	4.8	7.5	7.5	3.8	8.451	6.634	16.1	50.8	2.45	4.50	11.9	1.19	28.4	1.36
8	80	43	5.0	8	8	4.0	10.248	8.045	25.3	101	3.15	5.79	16.6	1.27	37.4	1.43
10	100	48	5.3	8.5	8.5	4.2	12.748	10.007	39.7	198	3.95	7.80	25.6	1.41	54.9	1.52
12.6	126	53	5.5	9	9	4.5	15.692	12.318	62.1	391	4.95	10.2	38.0	1.57	77.1	1.59
14a	140	58	6.0	9.5	9.5	4.8	18.516	14.535	80.5	564	5.52	13.0	53.2	1.70	107	1.71
14b	140	60	8.0				21.316	16.733	87.1	609	5.35	14.1	61.1	1.69	121	1.67
16a	160	63	6.5	10	10	5.0	21.962	17.240	108	866	6.28	16.3	73.3	1.83	144	1.80
16	160	65	8,5	10	10	5.0	25.162	19.752	117	935	6.10	17.6	83.4	1.82	161	1.75
18a	180	68	7,0	10.5	10.5	5,2	25.699	20.174	141	1270	7.04	20.0	98.6	1.96	190	1.88

续表

型号	尺寸/mm						截面面积 /cm²	理论重量 /(kg/m)	参考数值							
									$x-x$			$y-y$			y_1-y_1	z_0 /cm
	h	b	d	t	r	r_1			W_x /cm³	I_x /cm⁴	i_x /cm	W_y /cm³	I_y /cm⁴	i_y /cm	I_{y1} /cm⁴	
18	180	70	9,0	10.5	10.5	5.2	29.299	23.000	152	1370	6.84	21.5	111	1.95	210	1.84
20a	200	73	7,0	11.0	11.0	5.5	28.837	22.637	178	1780	7.86	24.2	128	2.11	244	2.01
20	200	75	9,0	11.0	11.0	5.5	32.837	25.777	191	1910	7.64	25.9	144	2.09	268	1.95
22a	220	77	7,0	11.5	11.5	5.8	31.846	24.999	218	2390	8.67	28.2	158	2.23	298	2.10
22	220	79	9,0	11.5	11.5	5.8	36.246	28.453	234	2570	8.42	30.1	176	2.21	326	2.03
25a	250	78	7,0	12.0	12.0	6.0	34.917	27.410	270	3370	9.82	30.6	176	2.24	322	2.07
25b	250	80	9,0	12.0	12.0	6.0	39.917	31.335	282	3530	9.41	32.7	196	2.22	353	1.98
25c	250	82	11.0	12.0	12.0	6.0	44.917	35.260	295	3690	9.07	35.9	218	2.21	384	1.92
28a	280	82	7,5	12.5	12.5	6.2	40.034	31.427	340	4760	10.9	35.7	218	2.33	388	2.10
28b	280	84	9.5	12.5	12.5	6.2	45.634	35.823	366	5130	10.6	37.9	242	2.30	428	2.02
28c	280	86	11.5	12.5	12.5	6.2	51.234	40.219	393	5500	10.4	40.3	268	2.29	463	1.95
32a	320	88	8.0	14.0	14.0	7.0	48.513	38.083	475	7600	12.5	46.5	305	2.50	552	2.24
32b	320	90	10.0	14.0	14.0	7.0	54.913	43.107	509	8140	12.2	49.2	336	2.47	593	2.16
32c	320	92	12.0	14.0	14.0	7.0	61.313	48.131	543	8690	11.9	52.6	374	2.47	643	2.09
36a	360	96	9.0	16.0	16.0	8.0	60.910	47.814	660	11900	14.0	63.5	455	2.73	818	2.44
36b	360	98	11.0	16.0	16.0	8.0	68.110	53.466	703	12700	13.6	66.9	497	2.70	880	2.37
36c	360	100	13.0	16.0	16.0	8.0	75.310	59.118	746	13400	13.4	70.0	536	2.67	948	2.34
40a	400	100	10.5	18.0	18.0	9.0	75.068	58.928	879	17600	15.3	78.8	592	2.81	1070	2.49
40b	400	102	12.5	18.0	18.0	9.0	83.068	65.208	932	18600	15.0	82.5	640	2.78	1140	2.44
40c	400	104	14.5	18.0	18.0	9.0	91.068	71.488	986	19700	14.7	86.2	688	2.75	1220	2.42

表 B.4 热轧工字钢[摘自《热扎工字钢尺寸、外形、重量及允许偏差》(GB/T 706—2008)]

符号意义：h—— 高度； r_1—— 腿端圆弧半径；
b—— 腿宽度； I—— 惯性矩；
d——腰厚度； W—— 弯曲截面系数；
t—— 平均腿厚度； i—— 惯性半径；
r—— 内圆弧半径； S——半截面静力矩。

型号	尺寸/mm						截面面积/cm²	理论重量/(kg/m)	参考数值						
									x－x				y－y		
	h	b	d	t	r	r_1			I_x/cm⁴	W_x/cm³	i_x/cm	$I_x:S_x$/cm	I_y/cm⁴	W_y/cm³	i_y/cm
10	100	68	4.5	7.6	6.5	3.3	14.345	11.261	245	49.0	4.14	8.59	33.0	9.72	1.52
12.6	126	74	5.0	8.4	7.0	3.5	18.118	14.223	488	77.5	5.20	10. 8	46.9	12.7	1.61
14	140	80	5.5	9.1	7.5	3.8	21.516	16.890	712	102	5.76	12.0	64.4	16.1	1.73
16	160	88	6.0	9.9	8.0	4.0	26.131	20.513	1130	141	6.58	13.8	93.1	21.2	1.89
18	180	94	6.5	10.7	8.5	4.3	30.756	24.143	1660	185	7.36	15.4	122	26.0	2.00
20a	200	100	7.0	11.4	9.0	4.5	35.578	27.929	2370	237	8.15	17.2	158	31.5	2.12
20b	200	102	9.0	11.4	9.0	4.5	39.578	31.069	2500	250	7.96	16.9	169	33.1	2.06
22a	220	110	7.5	12.3	9.5	4.8	42.128	33.070	3400	309	8.99	18.9	225	40.9	2.31
22b	220	112	9.5	12.3	9.5	4.8	46.528	36.524	3570	325	8.78	18.7	239	42.7	2.27
25a	250	116	8.0	13.0	10.0	5.0	48.541	38.105	5020	402	10.2	21.6	280	48.3	2.40
25b	250	118	10.0	13.0	10.0	5.0	53.541	42.030	5280	423	9.94	21.3	309	52.4	2.40
28a	280	122	8.5	13.7	10.5	5.3	55.404	43.492	7110	508	11.3	24.6	345	56.6	2.50
28b	280	124	10.5	13.7	10.5	5.3	61.004	47.888	7480	534	11.1	24.2	379	61.2	2.49

续表

型号	尺寸/mm						截面面积/cm^2	理论重量/(kg/m)	参考数值						
									$x-x$				$y-y$		
	h	b	d	t	r	r_1			I_x/cm^4	W_x/cm^3	i_x/cm	$I_x:S_x$/cm	I_y/cm^4	W_y/cm^3	i_y/cm
32a	320	130	9.5	15.0	11.5	5.8	67.156	52.717	11100	692	12.8	27.5	460	70.8	2.62
32b	320	132	11.5	15.0	11.5	5.8	73.556	57.741	11600	726	12.6	27.1	502	76.0	2.61
32c	320	134	13.5	15.0	11.5	5.8	79.956	62.765	12200	760	12.3	26.8	544	81.2	2.61
36a	360	136	10.0	15.8	12.0	6.0	76.480	60.037	15800	875	14.4	30.7	552	81.2	2.69
36b	360	138	12.0	15.8	12.0	6.0	83.680	65.689	16500	919	14.1	30.3	582	84.3	2.64
36c	360	140	14.0	15.8	12.0	6.0	90.880	71.341	17300	962	13.8	29.9	612	87.4	2.60
40a	400	142	10.5	16.5	12.5	6.3	86.112	67.598	21700	1090	15.9	34.1	660	93.2	2.77
40b	400	144	12.5	16.5	12.5	6.3	94.112	73.878	22800	1140	15.6	33.6	692	96.2	2.71
40c	400	146	14.5	16.5	12.5	6.3	102.112	80.158	23900	1190	15.2	33.2	727	99.6	2.65
45a	450	150	11.5	18.0	13.5	6.8	102.446	80.420	32200	1430	17.7	38.6	855	114	2.89
45b	450	152	13.5	18.0	13.5	6.8	111.446	87.485	33800	1500	17.4	38.0	894	118	2.84
45c	450	154	15.5	18.0	13.5	6.8	120.446	94.550	35300	1570	17.1	37.6	938	122	2.79
50a	500	158	12.0	20.0	14.0	7.0	119.304	93.654	46500	1860	19.7	42.8	1120	142	3.07
50b	500	160	14.0	20.0	14.0	7.0	129.304	101.504	48600	1940	19.4	42.4	1170	146	3.01
50c	500	162	16.0	20.0	14.0	7.0	139.304	109.354	50600	2080	19.0	41.8	1220	151	2.96
56a	560	166	12.5	21.0	14.5	7.3	135.435	106.316	65600	2340	22.0	47.7	1370	165	3.18
56b	560	168	14.5	21.0	14.5	7.3	146.635	115.108	68500	2450	21.6	47.2	1490	174	3.16
56c	560	170	16.5	21.0	14.5	7.3	157.835	123.900	71400	2550	21.3	46.7	1560	183	3.16
63a	630	176	13.0	22.0	15.0	7.5	154.658	121.407	93900	2980	24.5	54.2	1700	193	3.31
63b	630	178	15.0	22.0	15.0	7.5	167.258	131.298	98100	3160	24.2	53.5	1810	204	3.29
63c	630	180	17.0	22.0	15.0	7.5	179.858	141.189	102000	3300	23.8	52.9	1920	214	3.27

附录 C　习题参考答案

第 2 章

2.1　(a) $F_{N1}=-3kN$，$F_{N2}=2kN$，$F_{N3}=4kN$；

(b) $F_{N1}=25kN$，$F_{N2}=5kN$，$F_{N3}=15kN$；

(c) $F_{N1}=-F$，$F_{N2}=F$；

(d) $F_{N1}=-2F$，$F_{N2}=F$，$F_{N3}=2F$。

2.2　$\sigma_m=10MPa$。

2.3　$\sigma_1=-113.2MPa$，$\sigma_2=31.8MPa$，$\sigma_3=44.2MPa$。

2.4　$\sigma=53.1MPa$。

2.5　$\alpha=26.6^\circ$。

2.6　$F_{N1}=30kN$，$F_{N2}=15kN$，$F_{N3}=25kN$；

$\sigma_1=100MPa$，$\sigma_2=60MPa$，$\sigma_3=125MPa$；

$\varepsilon_1=5\times10^{-4}$，$\varepsilon_2=3\times10^{-4}$，$\varepsilon_3=6.25\times10^{-4}$；

$\Delta l_1=0.5mm$，$\Delta l_2=0.45mm$，$\Delta l_3=1.25mm$；$\Delta l=2.2mm$。

2.7　$x=\dfrac{E_2A_2}{E_1A_1+E_2A_2}a$。

2.8　$\varDelta_A=5.6mm$。

2.9　$k=0.729kN/m^2$，$\Delta l=1.97mm$。

2.10　$\Delta l=0.08mm$。

2.11　$\varDelta_{CD}=1.003\dfrac{F\mu}{4E\delta}$。

2.12　$\varDelta_{BD}=6.34mm$，$\sigma=109.7MPa<[\sigma]$，安全。

2.13　$\varDelta_{AC}=0.683\times10^{-3}a$。

2.14　$\dfrac{V_{\varepsilon1}}{V_{\varepsilon2}}=3$。

2.15　$\sigma_{b2}>\sigma_{b1}>\sigma_{b3}$，$E_2>E_1>E_3$，$\delta_1>\delta_2>\delta_3$。

2.16　(1) $d_{\max n}\leqslant17.8mm$；(2) $A_{CD}=833mm^2$；(3) $F_{\max}\leqslant17.5kN$。

2.17　$\sigma=127.3MPa$，$E=210GPa$，$\mu=0.28$。

2.18　$\delta=16.6\%$，$\psi=61.56\%$。

2.19　$\sigma=30.0MPa<[\sigma]$，安全。

2.20　*AC* 杆选两根 80mm×7mm 等边角钢，*CD* 杆选两根 75mm×6mm 等边角钢。

2.21　$\sigma_A=13.4MPa<[\sigma]$，$\sigma_B=25.5MPa<[\sigma]$，安全。

2.22　螺栓内径 $d_1 \geqslant 23.2\text{mm}$。

2.23　$W \leqslant 47.12\text{kN}$。

2.24　$b \geqslant 122\text{mm}$，$b \geqslant 170\text{mm}$。

2.25　$\sigma_{AC} = 13.33\text{MPa}$，$\sigma_{CD} = 3.33\text{MPa}$，$\sigma_{DB} = 16.67\text{MPa}$。

2.26　$[F] = 68.7\text{kN}$。

2.27　$F_{\text{N1}} = \dfrac{5}{6}F$，$F_{\text{N2}} = \dfrac{1}{3}F$，$F_{\text{N3}} = -\dfrac{1}{6}F$。

2.28　$e = \dfrac{b(E_1 - E_2)}{2(E_1 + E_2)}$。

2.29　$F_{预} = \dfrac{hE_1A_1E_2A_2}{4l(E_1A_1 + E_2A_2)}$。

2.30　$\sigma_{钢} = -175\text{MPa}$，$\sigma_{铝} = -61.25\text{MPa}$。

2.31　$\sigma_1 = 16.2\text{MPa}$，$\sigma_2 = 45.9\text{MPa}$。

2.32　$\sigma_{AC} = \sigma_{DB} = -100.8\text{MPa}$，$\sigma_{CD} = -50.4\text{MPa}$。

第 3 章

3.1　$T_1 = -0.860\text{kN}\cdot\text{m}$，$T_2 = 2.005\text{kN}\cdot\text{m}$，$T_3 = 1.433\text{kN}\cdot\text{m}$，$T_4 = 0.382\text{kN}\cdot\text{m}$。

3.2　$T(x) = -0.0133x, (0 \leqslant x \leqslant 40)$。

3.3　$N = 18.5\text{kW}$。

3.4　(1) $\tau_{\max} = 46.52\text{MPa}$，(2) $N_{\text{k}} = 71.74\text{kW}$。

3.5　$\tau_{\max} = 19.22\text{MPa} < [\tau]$。

3.6　(1) $\tau_{\max} = 17.77\text{MPa} < [\tau]$，(2) $\varphi = 8.5^\circ$。

3.7　(1) $\varphi = 0.0178(\text{rad}) = 1.02^\circ$，

(2) $\tau_A = \tau_B = 71.3\text{MPa}$，$\tau_C = 35.7\text{MPa}$，

(3) $\gamma_C = 0.446 \times 10^{-3}$。

3.8　(1) $\tau_{\max} = 69.82\text{MPa}$，(2) $\varphi_{AC} = 2^\circ$。

3.9　(1) $d \geqslant 21.7\text{mm}$，(2) $P = 1.12\text{kN}$。

3.10　$\mu = 0.289$

3.11　(1) $E = 216.4\text{GPa}$，(2) $G = 81.7\text{GPa}$，(3) $\mu = 0.33$。

3.12　(1) $W_1/W_2 = 0.512$，(2) $I_{\text{P1}}/I_{\text{P2}} = 1.19$。

3.13　$d \geqslant 111.3\text{mm}$。

3.14　$d \geqslant 74.4\text{mm}$。

3.15　(1) $\tau_{\max,AB} = 45.17\text{MPa} < [\tau], \varphi'_{AB} = 0.462(^\circ/\text{m}) < [\varphi']$

(2) $\tau_{\max,BC} = 71.30\text{MPa} < [\tau], \varphi'_{AB} = 1.02(^\circ/\text{m}) < [\varphi']$。

3.16　$d \geqslant 87.5\text{mm}$。

3.17　截面 C 左侧 $\tau_{\max} = 59.8\text{MPa}$，右侧 $\tau_{\max} = 29.9\text{MPa}$，$\varphi_{AC} = \varphi_{CB} = 0.713^\circ$。

3.18　$T_1 = 1.32\text{kN}\cdot\text{m}$，$T_2 = 0.68\text{kN}\cdot\text{m}$，$\tau_{1\max} = 41.0\text{MPa}$，$\tau_{2\max} = 54.1\text{MPa}$。

3.19 $T_A = T_B = \dfrac{G\beta I_{PA} I_{PB}}{l_A I_{PA} + l_B I_{PB}}$。

3.20 (1) $\tau_{max} = 40.2\text{MPa}$，

(2) $\tau_1 = 34.4\text{MPa}$，

(3) $\varphi' = 0.56\ ^\circ/\text{m}$。

3.21 $\tau = 67.2\text{MPa} > [\tau] = 60\text{MPa}$，销钉强度不够，应改用 $d \geqslant 32\text{mm}$ 的销钉。

3.22 $\tau = 30.3\text{MPa} < [\tau] = 80\text{MPa}$，$\sigma_{bs} = 44\text{MPa} < [\sigma_{bs}] = 150\text{MPa}$，安全。

3.23 $\tau = 19.1\text{MPa} < [\tau] = 60\text{MPa}$，安全。

3.24 $\tau = 52.6\text{MPa} < [\tau] = 130\text{MPa}$，$\sigma_{bs} = 90.9\text{MPa} < [\sigma_{bs}] = 300\text{MPa}$，
$\sigma = 166.7\text{MPa} < [\tau] = 170\text{MPa}$，安全。

3.25 $\sigma_{bs} = 123\text{MPa} < [\sigma_{bs}] = 140\text{MPa}$，安全。

3.26 $M_e = 209\text{N}\cdot\text{m}$

第 4 章

4.1 (a) $F_{s1} = 2qa$，$M_1 = \dfrac{qa^2}{2}$；$F_{s2} = qa$，$M_2 = \dfrac{qa^2}{2}$。

(b) $F_{s1} = -qa$，$M_1 = -\dfrac{qa^2}{2}$；$F_{s2} = -qa$，$M_2 = -\dfrac{3qa^2}{2}$。

(c) $F_{s1} = 1.33\text{kN}$，$M_1 = 267\text{N}\cdot\text{m}$；$F_{s2} = -0.667\text{kN}$，$M_2 = 333\text{N}\cdot\text{m}$。

(d) $F_{s1} = -\dfrac{1}{2}q_o a$，$M_1 = -\dfrac{1}{6}q_o a^2$；$F_{s2} = \dfrac{1}{12}q_o a$，$M_2 = -\dfrac{1}{6}q_o a^2$。

4.2 (a) $|F_s|_{max} = \dfrac{1}{2}q_o l$，$|M|_{max} = \dfrac{1}{6}q_o l^2$。

(b) $|F_s|_{max} = \dfrac{11}{8}ql$，$|M|_{max} = ql^2$。

(c) $|F_s|_{max} = 45\text{kN}$，$|M|_{max} = 127.5\text{kN}\cdot\text{m}$。

(d) $|F_s|_{max} = 1.4\text{kN}$，$|M|_{max} = 2.4\text{kN}\cdot\text{m}$。

(e) $|F_s|_{max} = 10\text{kN}$，$|M|_{max} = 10\text{kN}\cdot\text{m}$。

(f) $|F_s|_{max} = 4.5\text{kN}$，$|M|_{max} = 5\text{kN}\cdot\text{m}$。

4.3 (a) $|F_s|_{max} = 15\text{kN}$，$|M|_{max} = 25\text{kN}\cdot\text{m}$。

(b) $|F_s|_{max} = ql$，$|M|_{max} = 1.5ql^2$。

(c) $|F_s|_{max} = 1.25ql$，$|M|_{max} = 0.78ql^2$。

(d) $|F_s|_{max} = 15\text{kN}$，$|M|_{max} = 40\text{kN}\cdot\text{m}$。

(e) $|F_s|_{max} = 8\text{kN}$，$|M|_{max} = 10\text{kN}\cdot\text{m}$。

(f) $|F_s|_{max} = 14\text{kN}$，$|M|_{max} = 20\text{kN}\cdot\text{m}$。

(g) $|F_s|_{max} = 280\text{kN}$，$|M|_{max} = 545\text{kN}\cdot\text{m}$。

(h) $|F_s|_{max} = 1.5ql$，$|M|_{max} = 2.625ql^2$。

(i) $|F_s|_{max} = \dfrac{M_e}{3a}$，$|M|_{max} = 2M_e$。

(j) $|F_s|_{max} = 20\text{kN}$，$|M|_{max} = 30\text{kN} \cdot \text{m}$。

(k) $|F_s|_{max} = 8\text{kN}$，$|M|_{max} = 8\text{kN} \cdot \text{m}$。

(l) $|F_s|_{max} = 10\text{kN}$，$|M|_{max} = 16\text{kN} \cdot \text{m}$。

4.4 (a) $|F_s|_{max} = qa$，$|M|_{max} = qa^2$。

(b) $|F_s|_{max} = 4\text{kN}$，$|M|_{max} = 4\text{kN} \cdot \text{m}$。

4.6 (a) $|M|_{max} = 6\text{kN} \cdot \text{m}$。

(b) $|M|_{max} = 2.5\text{kN} \cdot \text{m}$。

(c) $|M|_{max} = 2\text{kN} \cdot \text{m}$。

(d) $|M|_{max} = 13.3\text{kN} \cdot \text{m}$。

4.7 (a) $|F_s|_{max} = 1\text{kN}$。

(b) $|F_s|_{max} = 1\text{kN}$。

(c) $|F_s|_{max} = 10\text{kN}$。

(d) $|F_s|_{max} = 3\text{kN}$。

4.8 (a) $|M|_{max} = Fa$。

(b) $|M|_{max} = qa^2$。

(c) $|M|_{max} = 10\text{kN} \cdot \text{m}$。

(d) $|M|_{max} = \dfrac{ql^2}{40}$。

4.9 (a) $|F_s|_{max} = 11.45\text{kN}$，$|M|_{max} = 3.09\text{kN} \cdot \text{m}$。

(b) $|F_s|_{max} = \dfrac{q_o l}{4}$，$|M|_{max} = \dfrac{q_o l^2}{12}$。

(c) $|F_s|_{max} = 50\text{kN}$，$|M|_{max} = 27.8\text{kN} \cdot \text{m}$。

(d) $|F_s|_{max} = \dfrac{q_o l}{\pi}$，$|M|_{max} = \dfrac{q_o l^2}{\pi^2}$。

4.10 d 。

4.11 (a) $|M|_{max} = \dfrac{1}{2}qa^2$。

(b) $|M|_{max} = ql^2$。

(c) $|M|_{max} = Fl$。

(b) $|M|_{max} = ql^2$。

4.12 (a) $|F_N|_{max} = F$，$|F_s|_{max} = F$，$|M|_{max} = FR$。

(b) $|F_N|_{max} = 0.79F$，$|F_s|_{max} = 0.75F$，$|M|_{max} = 0.437FR$。

第 5 章

5.1 $\sigma_{\max}=100\text{MPa}$。

5.3 截面 $m—m$：$\sigma_A=-7.41\text{MPa}$，$\sigma_B=4.94\text{MPa}$，$\sigma_C=0$，$\sigma_D=7.41\text{MPa}$；
截面 $n—n$：$\sigma_A=9.26\text{MPa}$，$\sigma_B=-6.18\text{MPa}$，$\sigma_C=0$，$\sigma_D=-9.26\text{MPa}$。

5.4 $h/b=\sqrt{2}\approx 3/2$。

5.5 $\sigma_{\max}=40.7\text{MPa}$。

5.6 $F=47.4\text{kN}$。

5.7 $\sigma_{\max}=200\text{MPa}$。

5.8 $\sigma_a=6.04\text{MPa}$，$\tau_a=0.379\text{MPa}$；$\sigma_b=12.9\text{MPa}$，$\tau_b=0$。

5.9 $\sigma_{\max}=142\text{MPa}$，$\tau_{\max}=18.1\text{MPa}$。

5.10 $\tau=\dfrac{F_s}{4I_z}(h+h_0)z_1$，$\tau_{\max}=\dfrac{F_s b}{4I_z}(h+h_0)$。

5.11 $\tau_{\max}=\dfrac{F_s}{\pi r_o\delta}$。

5.13 $\sigma_{\max}=197\text{MPa}<[\sigma]$，安全。

5.14 $F_{\max}=958\text{kN}$。

5.15 $b\geqslant 277\text{mm}$，$h\geqslant 416\text{mm}$。

5.16 $[F]=55.2\text{kN}$。

5.17 $n=3.71$。

5.18 $F_{\max}=8.1\text{kN}$。

5.19 $d=24.4\text{mm}$。

5.20 No.28a 工字钢。

5.21 $a=1.384\text{m}$。

5.22 $\sigma_{\max}=\dfrac{128Fl}{27\pi d^3}$。

第 6 章

6.1 (a) 力偶 M_e 施加在 $x=l$ 处；(b)略。

6.2 (a) $w'=q_o(6lx^2-4x^3-l^3)/24EI$；(b) $M=q_o x(l-x)/2$；
(c) 梁承受均布载荷 q_o 作用。

6.3 $\theta_B=-q_o l^3/24EI$。

6.4 $w_B=-1134(\text{kN})/EI$。

6.5 $w_C=-244.8(\text{kN})/EI$。

6.6 (a) $q=1.438\text{kN/m}$；(b) $r=14.72\text{mm}$。

6.7 $w_{\max}=0.78\text{mm}$。

6.8 $\theta_A=-56(\text{kN}\cdot\text{m}^2)/EI$，顺时针；$w_C=-139(\text{kN}\cdot\text{m}^3)/EI$

6.9 $\theta_B=-7Fl^2/9EI$，$w_B=-5Fl^3/9EI$。

6.10　$\theta_A = -13ql^3/648EI$，$w_C = -ql^4/31104EI$。

6.11　$\theta_A = -Fl^2/9EI$，$\theta_B = Fl^2/9EI$，$w_{max} = w_C = -23Fl^3/648EI$。

6.12　$w_C = 5.9\text{mm}$。

6.13　$F = 16.88\text{N}$。

6.14　$w = -\dfrac{F}{3E}\left(\dfrac{l_1^3}{I_1}+\dfrac{l_2^3}{I_2}\right)-\dfrac{Fl_1l_2}{EI_2}(l_1+l_2)$，

$\theta = -\dfrac{Fl_1^2}{2EI_1}-\dfrac{Fl_2}{EI_2}\left(\dfrac{l_2}{2}+l_1\right)$。

6.15　$w_{总} = 2.37\times10^{-3}\text{mm}$

6.16　$w = 13.8\text{mm} < [w]$，安全。

6.17　两根 No.22a 槽钢。

6.18　(a) $F_B = \dfrac{3M_e}{4a}(\downarrow)$；(b) $F_A = F_B = \dfrac{11ql}{16}(\uparrow)$，$F_C = \dfrac{5ql}{8}(\downarrow)$。

6.19　$F_1 = \dfrac{135}{167}F$。

6.20　梁内最大正应力 $\sigma = 156\text{MPa}$；拉杆的正应力 $\sigma = 185\text{MPa}$。

第 7 章

7.3　$[F] = 387\text{kN}$。

7.4　(a) $\sigma_\alpha = -10\text{MPa}$，$\tau_\alpha = 34.6\text{MPa}$；

(b) $\sigma_\alpha = 75.95\text{MPa}$，$\tau_\alpha = 2.32\text{MPa}$；

(c) $\sigma_\alpha = -60\text{MPa}$，$\tau_\alpha = -20\text{MPa}$；

(d) $\sigma_\alpha = 36\text{MPa}$，$\tau_\alpha = 32.32\text{MPa}$。

7.5　(a) $\sigma_1 = 90\text{MPa}$，$\sigma_3 = -10\text{MPa}$，$\alpha_o = -18.4^\circ$，$\tau_{max} = 50\text{MPa}$；

(b) $\sigma_1 = 44.1\text{MPa}$，$\sigma_2 = 28.6\text{MPa}$，$\alpha_o = -22.5^\circ$，$\tau_{max} = 14.1\text{MPa}$；

(c) $\sigma_1 = 2.4\text{MPa}$，$\sigma_3 = -82.4\text{MPa}$，$\alpha_o = 22.5^\circ$，$\tau_{max} = 42.4\text{MPa}$；

(d) $\sigma_1 = 76.1\text{MPa}$，$\sigma_3 = 3.9\text{MPa}$，$\alpha_o = 28.2^\circ$，$\tau_{max} = 36.1\text{MPa}$。

7.6　(1) $\sigma_1 = 200\text{MPa}$，$\sigma_2 = 100\text{MPa}$，$\tau_{max} = 50\text{MPa}$；

(2) $\sigma_\alpha = 175\text{MPa}$，$\tau_{max} = -43.5\text{MPa}$。

7.7　$\sigma_1 = 120\text{MPa}$，$\sigma_2 = 20\text{MPa}$，$\sigma_3 = 0$，$\alpha = 30^\circ$。

7.9　$\sigma_1 = 142\text{MPa}$，$\sigma_2 = 30\text{MPa}$，$\sigma_3 = 0$，$\alpha = 75.3^\circ$。

7.10　$\sigma_x = 16.7\text{MPa}$，$\alpha = -33.6^\circ$。

7.11　点 1：$\sigma_3 = -23.15\text{MPa}$，$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$；

点 2：$\sigma_1 = 2\text{MPa}$，$\sigma_2 = 0$，$\sigma_3 = -13.58\text{MPa}$；

点 3：$\sigma_1 = 6.94\text{MPa}$，$\sigma_2 = 0$，$\sigma_3 = -6.94\text{MPa}$；

点 4：$\sigma_1 = 13.58\text{MPa}$，$\sigma_2 = 0$，$\sigma_3 = -2\text{MPa}$；

点 5：$\sigma_1 = 23.15\text{MPa}$，$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$。

7.12 (a) $\sigma_1 = 110\text{MPa}$，$\sigma_2 = 50\text{MPa}$，$\sigma_3 = 10\text{MPa}$，$\alpha_o = -26.6^\circ$，$\tau_{\max} = 50\text{MPa}$；

(b) $\sigma_1 = 72.4\text{MPa}$，$\sigma_2 = 40\text{MPa}$，$\sigma_3 = -12.4\text{MPa}$，$\alpha_o = 22.5^\circ$，$\tau_{\max} = 42.4\text{MPa}$；

(c) $\sigma_1 = 70\text{MPa}$，$\sigma_2 = 50\text{MPa}$，$\sigma_3 = -50\text{MPa}$，$\alpha_o = 45^\circ$，$\tau_{\max} = 60\text{MPa}$。

7.13 椭圆，长轴$l_1 = 400.172\text{mm}$，短轴$l_2 = 399.962\text{mm}$。

7.14 $F = 20.2\text{kN}$。

7.15 $F = 17.6\text{kN}$。

7.16 $\sigma_1 = 136.8\text{MPa}$，$\sigma_2 = 27.9\text{MPa}$，$\alpha_o = 34^\circ$。

7.17 $\upsilon_\varepsilon = 8.91(\text{kN}\cdot\text{m})/\text{m}^3$，$\upsilon_\text{d} = 5.16(\text{kN}\cdot\text{m})/\text{m}^3$

7.18 $\sigma_{\text{r}2} = 28.6\text{MPa} < [\sigma_\text{t}] = 40\text{MPa}$，安全。

7.19 $\sigma_{\text{r}3} = 900\text{MPa}$，$\sigma_{\text{r}4} = 842\text{MPa}$。

7.20 $\sigma_{\text{r}2} = 200.8\text{MPa} > [\sigma] = 170\text{MPa}$，强度不够。

第 8 章

8.1 $\sigma_{\max} = 157.8\text{MPa}$。

8.2 $\sigma_{\max} = 12\text{MPa} \leqslant [\sigma] = 12\text{MPa}$，$\dfrac{w_{\max}}{l} = 0.051 < \left[\dfrac{w}{l}\right] = \dfrac{1}{150}$，强度和刚度足够。

8.3 $\sigma_{\max} = 193.8\text{MPa} > [\sigma] = 150\text{MPa}$，强度不够。

8.4 (1) $\sigma = \dfrac{6Fl}{bh}\left(\dfrac{\cos\varphi}{h} - \dfrac{\sin\varphi}{b}\right)$；

(2) $\varphi = \arctan\left(\dfrac{b}{h}\right)$。

8.5 (a) $F_\text{N} = F\cos\theta$，$F_\text{s} = F\sin\theta$，$M = Fa\cos\theta + Fl\sin\theta$；

(b) $F_\text{N} = F_2$，$F_\text{s} = F_1$，$M = 2F_2 - F_1 l$；

(c) 截面 1—1：$F_{sy} = \dfrac{F_1}{2}$，$F_{sz} = \dfrac{F_2}{2}$，$T = \dfrac{F_1 a}{2}$，$M_y = F_2 a$，$M_z = F_1 a$；

截面 2—2：$F_{sy} = \dfrac{F_1}{2}$，$F_N = \dfrac{F_2}{2}$，$T = \dfrac{F_1 a}{2}$，$M_y = \dfrac{F_2 a}{2}$，$M_z = \dfrac{3}{4}F_1 a$。

8.6 选用 16 号工字钢。

8.7 $F_{\max} = 19\text{kN}$。

8.8 $d = 128\text{mm}$。

8.9 $\sigma_{\text{tmax}} = 26.9\text{MPa} < [\sigma_\text{t}]$，$\sigma_{\text{cmax}} = 32.3\text{MPa} < [\sigma_\text{c}]$。

8.10 $\sigma_{\text{tmax}} = 179.9\text{MPa}$，$\delta_{AB} = 0.98\text{mm}$。

8.11 $\sigma_{\max} = 0.572\dfrac{F}{a^2}$。

8.12 三杆的最大拉应力之比为 2∶3∶5，最大压应力之比为 4∶5∶7。

8.13 $P = 788\text{N}$。

8.14 $\sigma_{\text{r}3} = 64.8\text{MPa} < [\sigma]$，安全。

8.15 $\sigma_{\text{r}4} = 54.4\text{MPa} < [\sigma]$，安全。

8.16 (1) $\sigma_1 = 3.11\text{MPa}$， $\sigma_2 = 0$， $\sigma_3 = -0.22\text{MPa}$， $\tau_{\max} = 1.67\text{MPa}$；
(2) $\sigma_{r3} = 3.33\text{MPa} < [\sigma]$，安全。

8.17 $\delta = 2.65\text{mm}$。

8.18 $\sigma_{r3} = 84.2\text{MPa} < [\sigma]$，安全。

8.19 $\sigma_1 = 69.5\text{MPa}$， $\sigma_2 = 0$， $\sigma_3 = -7.7\text{MPa}$， $\tau_{\max} = 38.6\text{MPa}$

8.20 $d = 49.3\text{mm}$。

8.21 $\sigma_1 = 175.5\text{MPa}$， $\sigma_2 = 0$， $\sigma_3 = -2.9\text{MPa}$。

8.23 $d \geqslant 46\text{mm}$。

第 9 章

9.1 (a) F_{cr}=2540 kN；
(b) F_{cr}=2645kN；
(c) F_{cr}=3136kN；
最稳定的是(c)，最不稳定的是(a) 。

9.2 (a) 圆形截面 λ=88.8；
(b) 矩形截面 λ=128；
(c) 正方形截面 λ=86.6；
正方形截面压杆最稳定。

9.3 长 l 应是直径 d 的 25 倍，才能应用欧拉公式计算其临界压力。

9.4 8 倍。

9.5 压杆 BC 属于中长杆，用经验公式计算临界应力，即 $\sigma_{cr} = a - b\lambda$。

9.6 最大轴向压力 $F = 232.4\text{kN}$。

9.7 $n = 3.58 > [n]_{st}$，稳定。

9.8 (1) $F_{cr} = 269.4\text{kN}$；(2) $n = 1.697 < [n]_{st}$，托架不安全。

9.9 $[F] = 37\text{kN}$。

9.10 $n = 3.08$。

9.11 F_{cr}=355 kN。

9.12 $[F]$=20.64kN。

第 10 章

10.1 $F_T = 65.3\text{kN}$。

10.2 钢索 $\sigma_d = 117.5\text{MPa}$，工字钢 $\sigma_{d\max} = 11.41\text{MPa}$。

10.3 $v = 100\text{m/s}$。

10.4 $\Delta l = \dfrac{l^2\omega^2}{gEA}\left(P + \dfrac{P_1}{3}\right)$。

10.5 $n = 2600\text{r/min}$。

10.6 $\sigma_{d\max} = 86.24\text{MPa} < [\sigma]$，强度足够。

10.7 $\tau_{d\max} = 10\text{MPa}$。

10.8 $M_{\max}=\left(1+\dfrac{b\omega^2}{3g}\right)\mathrm{Pa}$。

10.9 $\sigma_{\mathrm{dmax}}=107\mathrm{MPa}$。

10.10 动荷因数 $K_{\mathrm{d}}^{\mathrm{a}}>K_{\mathrm{d}}^{\mathrm{b}}$，动变形 $\delta_{\mathrm{d}}^{\mathrm{a}}<\delta_{\mathrm{d}}^{\mathrm{b}}$。

10.11 $\sigma_{\mathrm{dmax}}=\dfrac{2Pl}{9W}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{243EIh}{2Pl^3}}\right)$，

$w_{\frac{1}{2}}=\dfrac{23Pl^3}{1296EI}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{243EIh}{2Pl^3}}\right)$。

10.12 $n=2.3<n_{\mathrm{st}}$，不安全。

10.13 (a) $\sigma_{\mathrm{st}}=0.0283\mathrm{MPa}$；(b) $\sigma_{\mathrm{d}}=6.9\mathrm{MPa}$；(c) $\sigma_{\mathrm{d}}=1.2\mathrm{MPa}$。

10.14 有弹簧时 $h=385\mathrm{mm}$，无弹簧时 $h=9.56\mathrm{mm}$。

10.15 二梁最大应力之比 $\dfrac{\sigma_{CD}}{\sigma_{AB}}=\dfrac{1}{2}$；二梁吸收能量之比 $\dfrac{V_{\varepsilon CD}}{V_{\varepsilon AB}}=\dfrac{1}{4}$。

第 11 章

11.1 $\sigma_{\max}=-\sigma_{\min}=75.5\mathrm{MPa}$，$r=-1$。

11.2 $\sigma_{\mathrm{m}}=549\mathrm{MPa}$，$\sigma_{\mathrm{a}}=12\mathrm{MPa}$，$r=0.957$。

11.3 $K_\sigma=1.55$，$K_\tau=1.26$，$\varepsilon_\sigma=0.77$，$\varepsilon_\tau=0.81$。

11.4 $\sigma_{\max}=65.2\mathrm{MPa}<[\sigma_{-1}]=74.085\mathrm{MPa}$，轴的强度足够。

11.5 I—I 截面：$n_\sigma=1.62>n$ 安全；II—II 截面：$n_\sigma=2.03>n$，安全。

11.6 (a) $\alpha=90^\circ$；(b) $\alpha=63^\circ26'$；(c) $\alpha=45^\circ$；(d) $\alpha=33^\circ41'$。

11.7 按疲劳强度计算：$n_\tau=5.06>n$，安全；按屈服强度算：$n_\tau=7.37>n$，安全。

11.8 最大载荷 $F_{\max}=88.3\ \mathrm{kN}$。

11.9 $n_\tau=1.15$。

11.10 点 1：$r=-1$，$n_\sigma=2.77$；点 2：$r=0$，$n_\sigma=2.46$；点 3：$r=0.87$，$n_\sigma=2.14$；点 4：$r=0.5$，$n_\sigma=2.14$。

11.11 (a) $[M]=409\mathrm{N\cdot m}$；(b) $[M]=636\mathrm{N\cdot m}$。

11.12 $n_{\sigma\tau}=1.88$。

11.13 $n_{\sigma\tau}=2.24>n$，安全。

第 12 章

12.1 $V_{\varepsilon\min}=F^2l/(3EA)$。

12.2 $V_\varepsilon=51q_0^2l^5/(30420EI)$。

12.3 $V_\varepsilon=17q^2l^5/(15360EI)$。

12.4 $V_\varepsilon=8F^2R^3/(Ed^4)$。

12.5 当 $a/l=4/5$ 时，$\delta_{DH}=Fl^2(4l-5a)/(2EI)=0$。

12.6 $\theta_B = \dfrac{35qa^3}{48EI}$(顺时针）。

12.7 $\theta_C = -\dfrac{Fa}{6EI}(3a+2l)$(顺时针)，$w_C = \dfrac{Fa^2(l+a)}{3EI}$(向下）。

12.8 $\theta_A = \dfrac{2Ma}{EI}$(逆时针）。

12.9 利用功的互等定理，在 A 处施加一个数值等于 F 的力偶 M，并测出这时 C 处的挠度 w_C，则此值即为欲测之力 F 作用下的 θ_A。

12.10 $\delta_{By} = FR^3/(2EI)$（方向向下），$\delta_{Bx} = 0.356FR^3/(EI)$(方向向右)，
$\theta_B = 0.571FR^3/(EI)$(顺时针）。

12.11 $w_A = Fa^2/(3EI) + 3Fa^2l/(EI)$（方向向下）。

12.12 $\Delta_{A_y} = 32Fa^3/(E\pi d^4)$（向上），$\varphi_A = 96Fa^2/(E\pi d^4)$（顺时针）。

12.13 $w_A = 16q_0l^4/(405EI)$（方向向下）。

12.14 $w_D = (M_e l/2)(l/4)/EI = M_e l^2/(8EI)$。

12.15 $\Delta_{Ex} = 2Fa^3/(3EI)$，$\theta_{BE} = Fa^2/(2EI)$（$B$ 面逆时针，E 面顺时针）。

12.16 $\theta_A = \dfrac{5qa^3}{3EI}$（顺时针），$w_A = \dfrac{3qa^4}{2EI}$（向下）

附录 A

A.1 $S_y = \dfrac{2}{3}r^3$，$z_C = \dfrac{4r}{3\pi}$

A.2 (a) $\overline{y}_C = 0$，$\overline{z}_C = 261\text{mm}$；　(b) $\overline{y}_C = 3.33\text{mm}$，$\overline{z}_C = 0$；

(c) $\overline{y}_C = \overline{z}_C = \dfrac{5}{6}a$，；　(d) $\overline{y}_C = -5.94\text{mm}$，$\overline{z}_C = 75.9\text{mm}$。

A.3 (a) $I_y = \dfrac{bh^3}{12}$；　(b) $I_y = \dfrac{2ah^3}{15}$；　(c) $I_y = \dfrac{a^4}{12}$。

A.4 (a) $I_y = I_z = 2.227\times10^5\text{mm}^4$，$I_{yz} = 7.75\times10^4\text{mm}^4$；

(b) $I_y = I_z = \dfrac{\pi R^4}{16}$，$I_{yz} = \dfrac{R^4}{8}$。

A.5 (a) $I_y = 1.74\times10^8\text{mm}^4$；

(b) $I_y = \dfrac{\pi d^4}{64} - \dfrac{ba^3}{3} - \dfrac{bad^2}{4} + \dfrac{ba^2d}{2} \approx \dfrac{\pi d^4}{64} - \dfrac{bad^2}{4}$。

A.6 (a) $\overline{y}_C = 0$，$\overline{z}_C = 2.85r$，$I_{y_C} = 10.38r^4$，$I_{z_C} = 2.06r^4$；

(b) $\overline{y}_C = 87.9\text{mm}$，$\overline{z}_C = 0$，$I_{y_C} = 1.51\times10^{-4}\text{m}^4$，$I_{z_C} = 1.14\times10^{-4}\text{m}^4$。

A.7 (1) $I_y = 9.52\times10^7\text{mm}^4$，$I_z = 1.03\times10^8\text{mm}^4$；

(2) $a = 171.4\text{mm}$。

A.8 $\alpha_o = 34.4^\circ$，$I_{y_o} = 88.6\times10^8\text{mm}^4$，$I_{z_o} = 11.4\times10^8\text{mm}^4$。

A.9 $\alpha_o = 26.4^\circ$ 或 $\alpha_o = 116.4^\circ$，$I_{yco}\, 7.041\times10^8\text{mm}^4$，$I_{zco} = 0.541\times10^8\text{mm}^4$。

参 考 文 献

[1] 刘鸿文. 材料力学Ⅰ[M]. 6版. 北京：高等教育出版社，2016.
[2] 刘鸿文. 材料力学Ⅱ[M]. 6版. 北京：高等教育出版社，2016.
[3] 孙训方，方孝淑，关来泰. 材料力学Ⅰ[M]. 5版. 北京：高等教育出版社，2009.
[4] 孙训方，方孝淑，关来泰. 材料力学Ⅱ[M]. 5版. 北京：高等教育出版社，2009.
[5] 范钦珊，殷雅俊，唐靖林. 材料力学[M]. 3版. 北京：清华大学出版社，2014.
[6] 闫晓鹏，武瑛. 材料力学[M]. 北京：清华大学出版社，2013.
[7] 别辽耶夫 • H. M. 材料力学[M]. 王光远，干光瑜，顾震隆，译. 北京：高等教育出版社，1985.
[8] Ferdinand P. B. 材料力学[M]. 4版. 张燕，王红囡，彭丽，译. 北京：清华大学出版社，2008.